# Лабораторная работа № 4
# Помехоустойчивый код БЧХ

## 1. Цель работы

Получить навыки формирования помехоустойчивого кода БЧХ и моделирования его работы в программе Multisim.

## 2. Общие сведения

Циклические коды Боуза-Чоудхури-Хоквингема (БЧХ) позволяют устранить две и более ошибки.

Как и во всех помехоустойчивых кодах это достигается тем, что вместе с информационными битами передаются контрольные биты. Информационные биты располагаются в старших разрядах машинного слова, а контрольные биты – в младших. Напомним, что в коде Хэмминга контрольные биты распылены по машинному слову (они размещаются вперемежку с информационными битами).

Для формирования контрольных битов кода БЧХ могут использоваться различные порождающие полиномы.

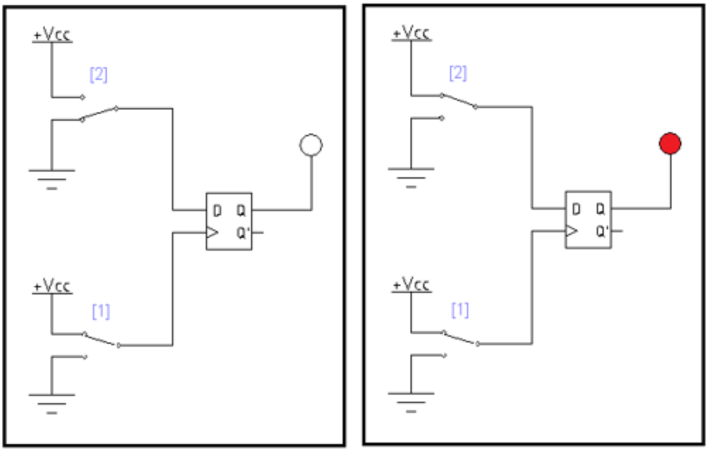
Формирование контрольных битов на передающей стороне происходит путём целочисленного деления информационных битов (сообщения) на так называемый **порождающий полином**. Остаток от деления является контрольными битами, которые передаются вместе с информационными битами. На приёмной стороне поступившие двоичные числа многократно делят на порождающий полином (и циклически сдвигают числа влево) до тех пор, пока остаток от деления не станет меньше определённой величины. На последней стадии декодирования производят многократный циклический сдвиг двоичных чисел вправо.

В результате перечисленных операций происходит исправление имеющихся ошибок, которые появились в канале связи.

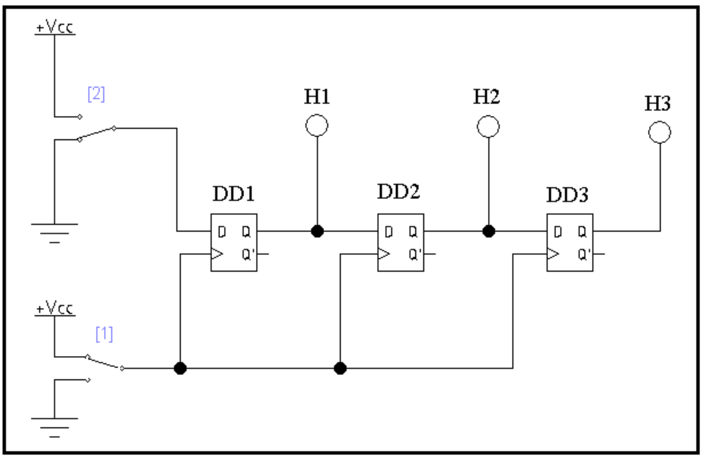
На передающей стороне код формируется с помощью устройства, который называется **кодером**. На приёмной стороне извлечение информационных битов и исправление возникших ошибок осуществляется с помощью **декодера**.

Основными элементами кодеров и декодеров являются регистры сдвига, которые строят на схемах Исключающее ИЛИ и синхронных (тактируемых) D-триггерах. На следующих рисунках показаны D-триггеры. Другое название этих цифровых последовательностных устройств – триггеры задержки (от английского слова Delay). Такое название триггеры получили потому, что запись сигнала в триггер происходит только при поступлении тактового импульса (с задержкой до момента поступления синхроимпульса).

Алгоритм работы D-триггера следующий. Записываемая информация подаётся на вход D (для этого используется ключ 2). Запись информации происходит в момент перехода ключа 1 из нуля в единицу (по переднему фронту тактового импульса).




Регистр сдвига содержит несколько последовательно соединённых D-триггеров (например, как на рисунке – три). При поступлении тактовых импульсов информация продвигается слева направо, например, в таком порядке 100, 010, 001. Как известно, на регистрах сдвига реализуются операции умножения и деления двоичных чисел. При циклическом сдвиге выход регистра сдвига соединяется со входом.



# 3. Задания на выполнение лабораторной работы

## 3.1. Задание 1. Вычисление остатка

Вычислить остаток от деления двоичного числа на порождающий полином в соответствии с заданным вариантом.

Таблица 3.1.1

| Вар. | Полином | Число | Вар. | Полином | Число |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $x^3 + x^2 + 1$ | 11010001 | 9 | $x^3 + x + 1$ | 11001001 |
| 2 | $x^2 + x + 1$ | 11010001 | 10 | $x^3 + x^2 + 1$ | 11001010 |
| 3 | $x^3 + x + 1$ | 11010001 | 11 | $x^2 + x + 1$ | 11001011 |
| 4 | $x^3 + x^2 + 1$ | 11010001 | 12 | $x^3 + x + 1$ | 11001100 |
| 5 | $x^2 + x + 1$ | 11010001 | 13 | $x^3 + x^2 + 1$ | 11001101 |
| 6 | $x^3 + x + 1$ | 11010001 | 14 | $x^2 + x + 1$ | 11001110 |
| 7 | $x^3 + x^2 + 1$ | 11010001 | 15 | $x^3 + x + 1$ | 11001111 |
| 8 | $x^2 + x + 1$ | 11010001 | 16 | $x^3 + x^2 + 1$ | 11010000 |

## 3.2. Задание 2. Моделирование нахождения остатка

С помощью программы Multisim найти остаток от деления двоичного числа на порождающий полином для исходных данных из задания 3.1.

## 3.3. Задание 3. Формирование кода БЧХ

Для своего варианта расчётным путём сформировать помехоустойчивый циклический код БЧХ, у которого число информационных разрядов $k = 7$, число контрольных разрядов $r = 8$, а порождающий полином $g(x) = x^8 + x^7 + x^6 + x^4 + 1$.

Проверить правильность формирования кода путём повторного деления сформированного кода БЧХ на порождающий полином.

Таблица 3.3.1

| Вар. | Данные | Вар. | Данные |
|---|---|---|---|
| 1 | 1100001 | 9 | 1101001 |
| 2 | 1100010 | 10 | 1101010 |
| 3 | 1100011 | 11 | 1101011 |
| 4 | 1100100 | 12 | 1101100 |
| 5 | 1100101 | 13 | 1101101 |
| 6 | 1100110 | 14 | 1101110 |
| 7 | 1100111 | 15 | 1101111 |
| 8 | 1101000 | 16 | 1110100 |

## 3.4. Задание 4. Декодирование кода БЧХ

Декодировать код, сформированный в предыдущем задании, предварительно выполнив искажения в указанных разрядах принимаемых данных.

Таблица 3.4.1

| Вар. | Искажённые разряды | Вар. | Искажённые разряды |
|---|---|---|---|
| 1 | 14,7 | 9 | 12, 7 |
| 2 | 14,8 | 10 | 12, 8 |
| 3 | 14,9 | 11 | 12, 9 |
| 4 | 14,10 | 12 | 12, 10 |
| 5 | 14,11 | 13 | 12, 11 |
| 6 | 14,12 | 14 | 12, 13 |
| 7 | 14,13 | 15 | 11, 10 |
| 8 | 13,10 | 16 | 11,9 |

# 4. Порядок выполнения лабораторной работы

## 4.1. Методические указания к заданию 3.1

Для примера рассмотрим процедуру деления двоичного числа 101101100000000 на порождающий полином $x^3 + x^2 + 1$.

Заданное число представим в виде полинома [2]:

$$101101100000000 \rightarrow x^{14} + x^{12} + x^{11} + x^{9} + x^{8}$$

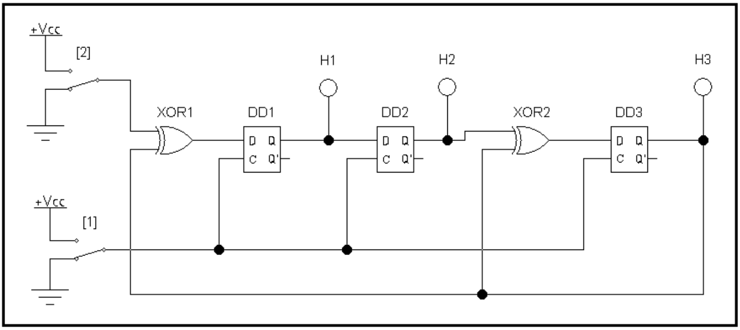
$$
\begin{array}{l|l}
\cancel{x^{14}} + x^{12} + \cancel{x^{11}} + x^{9} + x^{8} & x^{3} + x^{2} + 1 \\
\oplus\ \cancel{x^{14}} + x^{13} + \cancel{x^{11}} & \overline{x^{11} + x^{10} + x^{7} + x^{5} + x^{2} + x + 1} \\
\hline
\quad \cancel{x^{13}} + \cancel{x^{12}} + x^{9} + x^{8} & \\
\quad \oplus\ \cancel{x^{13}} + \cancel{x^{12}} + x^{10} & \\
\hline
\quad\quad \cancel{x^{10}} + \cancel{x^{9}} + x^{8} & \\
\quad\quad \oplus\ \cancel{x^{10}} + \cancel{x^{9}} + x^{7} & \\
\hline
\quad\quad\quad \cancel{x^{8}} + \cancel{x^{7}} & \\
\quad\quad\quad \oplus\ \cancel{x^{8}} + \cancel{x^{7}} + x^{5} & \\
\hline
\quad\quad\quad\quad \cancel{x^{5}} & \\
\quad\quad\quad\quad \oplus\ \cancel{x^{5}} + x^{4} + x^{2} & \\
\hline
\quad\quad\quad\quad\quad \cancel{x^{4}} + x^{2} & \\
\quad\quad\quad\quad\quad \oplus\ \cancel{x^{4}} + x^{3} + x & \\
\hline
\quad\quad\quad\quad\quad\quad \cancel{x^{3}} + \cancel{x^{2}} + x & \\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad \oplus\ \cancel{x^{3}} + \cancel{x^{2}} + 1 & \\
\hline
\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad x + 1 &
\end{array}
$$

В результате деления получен остаток x + 1, который эквивалентен двоичному числу 011.

## 4.2. Методические указания к заданию 3.2

На следующем рисунке показана схема, предназначенная для деления двоичных чисел на порождающий полином $g(x) = x^3 + x^2 + 1$ . Напомним, что в результате такого деления формируются контрольные биты кода БЧХ.

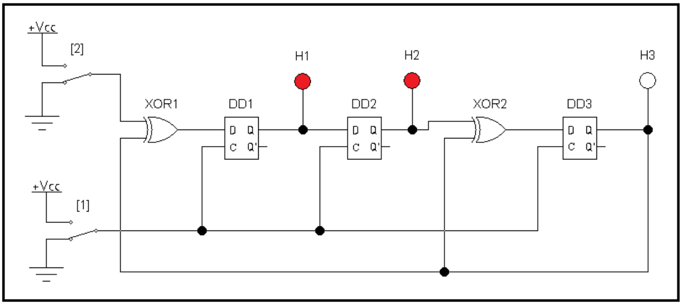
Схема состоит из трёх D-триггеров. Число триггеров в схемах деления соответствует максимальной степени порождающего полинома. Кроме D-триггеров в схеме используется две двухвходовые схемы Исключающее ИЛИ. Входы схем Исключающее ИЛИ подключают к выходам тех триггеров, которые соответствуют членам полинома с ненулевыми коэффициентами. В данном случае в полиноме отсутствует слагаемое *x*, поэтому выход триггера DD1 и напрямую соединён со входом триггера DD2 (не через схему Исключающее ИЛИ).



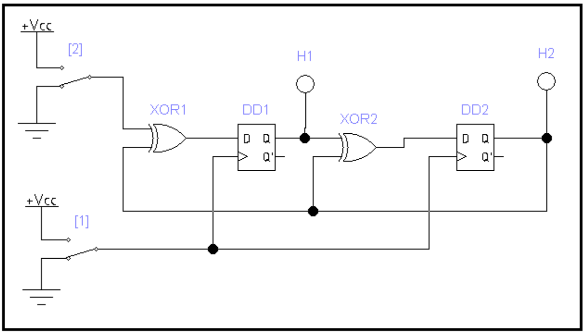

Ввод обрабатываемых данных (информационных битов) производят с помощью ключа, обозначенного символами [2]. Ввод начинают со старших битов. Например, для числа 101101100000000 ввод начинается с единицы.

Ввод каждого информационного бита подтверждается с помощью ключа [1]. Напомним, что синхронные D-триггеры срабатывают только при поступлении тактового сигнала на вход C. Переключение триггера происходит по переднему фронту синхроимпульса (когда ключ [1] переходит из нижнего положения в верхнее, тактовый импульс переходит из 0 в 1).

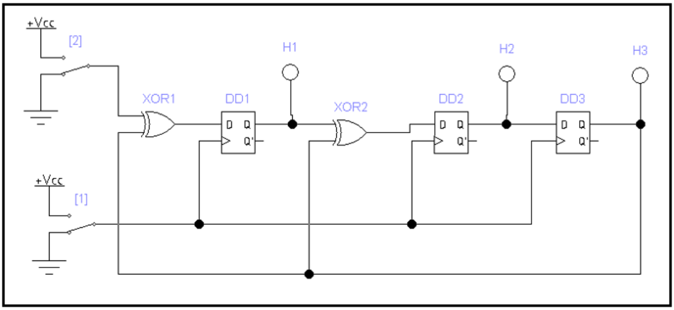
Результат моделирования показан на следующем рисунке. Старший триггер DD3 находится в состоянии «0» (светодиод H3 не горит). Триггеры DD1 и DD2 находятся в состоянии «1» (светодиоды H1 и H2 горят). В результате моделирования получено число 011, которое точно совпадает с результатом ручного расчёта, который приведён в предыдущем пункте методических указаний. Необходимо обратить внимание на то, что при записи двоичного результата старший бит находится слева, а в схеме – справа.



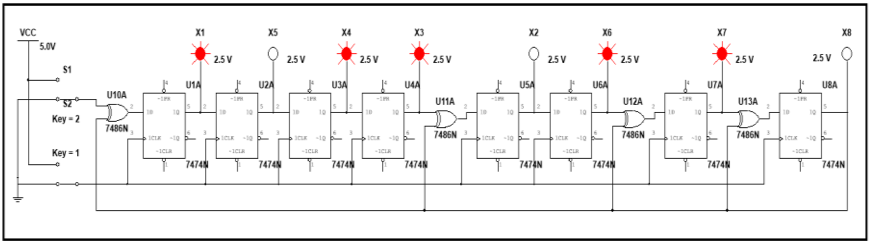

Для порождающего полинома $g(x) = x^2 + x + 1$ схема деления показана на следующем рисунке. Схема содержит только два триггера, так как это полином второй степени. Наличие двух схем Исключающее ИЛИ говорит о том, что в полиноме нет неиспользуемых слагаемых (нет нулевых коэффициентов).




Если для кодирования используется порождающий полином $g(x) = x^3 + x + 1$ , то схема нахождения остатка выглядит так:




Ниже показана схема нахождения остатка для порождающего полинома $g(x) = x^8 + x^7 + x^6 + x^4 + 1$.




## 4.3. Методические указания к заданию 3.3

Устранить две ошибки (и более) в принятых данных позволяют циклические коды Боуза-Чоудхури-Хоквингема (БЧХ).

Циклический код БЧХ *v(x)* на передающей стороне формируется следующим образом [2]:

$$v(x) = x^{n-k}u(x) + (x^{n-k}u(x)\,\mathrm{mod}(g(x))), \qquad (4.3.1)$$

где *x* – фиктивная переменная; *u(x)* - кодируемая последовательность данных (информационные биты); *n* – число бит в передаваемых данных (суммарное число информационных и контрольных бит); *k* - число информационных бит в машинном слове; mod - операция вычисления остатка от деления; + - операция конкатенации (соединения, склеивания) информационных и контрольных битов; *g(x)* – порождающий полином.

В выражении (4.3.1) первое слагаемое описывает информационные биты, сдвинутые влево на $x^{n-k}$ разрядов. Второе слагаемое описывает контрольные биты.

В данном задании рассматривается одна из разновидностей кодов БЧХ длиной *n* = 15. Данный код формирую с помощью порождающего полинома восьмой степени ($r$ = 8):

$$g(x) = x^8 + x^7 + x^6 + x^4 + 1.$$

Степень полинома определяет число контрольных битов. Число информационных разрядов в таком коде $k = n - r$ = 15 – 8 = 7. Код позволяет исправить две ошибки ($s$ = 2).

Рассмотрим порядок построения циклического кода БЧХ на передающей стороне.

*Пример 1.*

Дано 7 информационных бит 1011011. Запишем информационные биты в виде полинома:

$$u(x) = x^6 + x^4 + x^3 + x + 1. \qquad (4.3.2)$$

Порядок построения полинома *u(x)* иллюстрирует следующая таблица:

Таблица 4.3.1

| Номера разрядов | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Слагаемые | $x^6$ | $x^5$ | $x^4$ | $x^3$ | $x^2$ | $x$ | 1 |

Таблицу нужно трактовать следующим образом: если в соответствующем разряде данных информационный бит равен единице, то в полином нужно включить нижерасположенный член ряда. Этим объясняется отсутствие в полиноме (4.3.2) слагаемых $x^2$ и $x^5$.

Для нахождения первого слагаемого в выражении (4.3.1) нужно полином (4.3.2) умножить на $x^8$ (заметим, что число контрольных битов $n - k = 15 - 7 = 8$):

$$x^{n-k} \cdot u(x) =$$

$$x^8 \cdot (x^6 + x^4 + x^3 + x + 1) = x^{14} + x^{12} + x^{11} + x^9 + x^8. \qquad (4.3.3)$$

Смысл предыдущей операции очень прост: информационные разряды за счёт умножения на $x^8$ смещаются влево на восемь позиций (в сторону старших разрядов). Это сделано для того, чтобы разделить информационные и контрольные биты (информационные разряды будут располагаться в передаваемых данных слева, а контрольные биты – справа).

Для нахождения контрольных битов нужно найти остаток от деления полинома (4.3.3) на порождающий полином *g(x):*

$$(x^{14} + x^{12} + x^{11} + x^9 + x^8) \bmod (x^8 + x^7 + x^6 + x^4 + 1) =$$

$$= x^6 + x^5 + x^3 + x^2 + 1. \qquad (4.3.4)$$

Именно контрольные биты (4.3.4) позволяют на приёмной стороне определить, есть ли искажения и при необходимости восстановить один или два неверно принятых бита. Сформированный в соответствии с (4.3.1) помехоустойчивый код описывается полиномом:

$$v(x) = x^{14} + x^{12} + x^{11} + x^{9} + x^{8} + x^{6} + x^{5} + x^{3} + x^{2} + 1. \qquad (4.3.5)$$

Чтобы проверить верно ли сформирован полином (4.3.5), достаточно его разделить на порождающий полином *g(x).* Если остаток от деления равен нулю, то код сформирован правильно. В соответствии с полиномом (4.3.5) в линию нужно передать двоичный код:

**1011011**01101101. (4.3.6)

Несложно заметить, что первые семь бит сформированного кода полностью совпадают с информационными битами (с сообщением). Следующие восемь бит являются контрольными. Соотношение между числом информационных и контрольных битов наглядно показывает, почему такие коды называют избыточными.

### 4.4. Методические указания к заданию 3.4

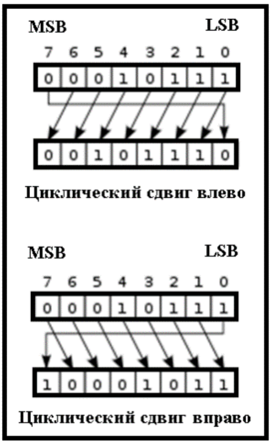
В процесс передачи по каналу связи (или записи в память цифрового устройства) сформированный код БЧХ $v(x)$ может быть искажён и на приём поступит изменённый код $f(x)$. Декодирование полученных данных $f(x)$ происходит в соответствии со следующим **алгоритмом**:

1) выполняется деление принятой последовательности $f(x)$ на порождающий полином $g(x)$;

2) вычисляется вес остатка $w$ (количество единиц в остатке);

3) если $w > s$, где $s$ – допустимое число ошибок, исправляемых данным кодом, то производится циклический сдвиг влево на один разряд принятой последовательности $f(x)$ и вновь выполняется шаг 1;

4) если $w <= s$, то производится суммирование полученной последовательности с остатком;




5) производится циклический сдвиг полученной последовательности вправо на количество разрядов, равное числу сдвигов влево, выполненное в процессе декодирования принятой последовательности.

*Замечание.*

При описании алгоритма декодирования использован термин «циклический сдвиг».

**Сдвиг** – это изменение позиций битов в машинном слове на одну и ту же величину. При циклическом сдвиге вход устройства соединён с собственным входом. Следующий рисунок иллюстрирует порядок перемещения битов при циклических сдвигах влево и вправо. На рисунке приняты обозначения: LSB – младший значащий разряд; MSB – старший значащий разряд.

Рассмотрим процесс декодирования на примере кода, сформированного в предыдущем задании.

*Пример 2.*

Предположим, что в данных (4.3.6) произошло искажение разрядов 13 и 11. Напомним, что отсчёт разрядов ведётся справа налево, начиная с нуля. В результате на приём поступило двоичное число 111001101101101.

Запишем его в виде полинома:

$$f(x) = x^{14} + x^{13} + x^{12} + x^{9} + x^{8} + x^{6} + x^{5} + x^{3} + x^{2} + 1.$$

Выполним декодирование. Результаты расчётов на каждой итерации приведены в таблице 4.4.1. Так как данный код позволяет исправлять две ошибки ( $s = 2$ ), расчёты следует вести до тех пор, пока не будет выполнено условие $w \leq 2$.

В таблице 4.4.1 использованы такие обозначения:

$C^{i}(x)$ - частное от деления $f^{i}(x)$ на порождающий полином $g(x)$ на *i* – той итерации; $P^{i}(x)$ - остаток от деления $f^{i}(x)$ на порождающий полином $g(x)$ на *i* – той итерации.

На пятой итерации вес остатка достиг значения, при котором следует прекратить дальнейшие расчёты ($w$ = 2). За пять проведённых итераций было выполнено четыре циклических сдвига влево.

Выполненные операции позволяют наглядно понять, почему этот код называют циклическим. При выполнении сдвига влево крайний левый разряд считался соседним с крайним правым разрядом. По этой причине на итерациях 2, 3, 4 последними слагаемыми полиномов $f^{i}(x)$ являются единицы. Это объясняется тем, что в этих случаях $x^{14} = 1$ и единица переходит в младший разряд последовательности. На пятой итерации полином $f^{5}(x)$ не содержит слагаемого $x^{14}$. Это объясняется тем, что на предыдущей итерации $x^{14} = 0$.

В соответствии с алгоритмом декодирования теперь следует перейти к шагу 4 и найти сумму величин на последней итерации:

$$R(x) = f^5(x) + P^5(x) =$$
$$= x^{13} + x^{12} + x^{10} + x^9 + x^7 + x^6 + x^4 + x^3 + x^2 + x + x^2 + 1 = \qquad (4.4.1)$$
$$= x^{13} + x^{12} + x^{10} + x^9 + x^7 + x^6 + x^4 + x^3 + x + 1.$$

Полученный полином (4.4.1) следует пробразовать в двоичное число:

$$R(x) = 011011011011011. \qquad (4.4.2)$$

В соответствии с шагом 5 алгоритма декодированную последовательность (4.4.2) нужно циклически сдвинуть вправо на четыре разряда. Этапы сдвига показаны в табл. 4.4.2.

Таблица 4.4.1

| Ит. | | Полиномы | Вес $w$ |
|---|---|---|---|
| 1 | $f^1(x)$ | $x^{14}+x^{13}+x^{12}+x^9+x^8+x^6+x^5+x^3+x^2+1$ | |
| | $C^1(x)$ | $x^6+x^2$ частное | |
| | $P^1(x)$ | $x^6+x^5+x^3+1$ остаток | 4 |
| 2 | $f^2(x)$ | $x^{14}+x^{13}+x^{10}+x^9+x^7+x^6+x^4+x^3+x+1$ | |
| | $C^2(x)$ | $x^6+x^4+x^3+1$ | |
| | $P^2(x)$ | $x^7+x^6+x^4+x$ | 4 |
| 3 | $f^3(x)$ | $x^{14}+x^{11}+x^{10}+x^8+x^7+x^5+x^4+x^2+x+1$ | |
| | $C^3(x)$ | $x^6+x^5+x$ | |
| | $P^3(x)$ | $x^6+x^5+x^4+x^2+1$ | 5 |
| 4 | $f^4(x)$ | $x^{12}+x^{11}+x^9+x^8+x^6+x^5+x^3+x^2+x+1$ | |
| | $C^4(x)$ | $x^4+x^2+1$ | |
| | $P^4(x)$ | $x^7+x^6+x^5+x^3+x$ | 5 |
| 5 | $f^5(x)$ | $x^{13}+x^{12}+x^{10}+x^9+x^7+x^6+x^4+x^3+x^2+x$ | |
| | $C^5(x)$ | $x^5+x^3+x\ \ +1$ | |
| | $P^5(x)$ | $x^2+1$ | 2 |

Таблица 4.4.2

| Номера сдвигов | Числа |
|---|---|
| *R(x)* | 011011011011011 |
| 1 сдвиг | 101101101101101 |
| 2 сдвиг | 110110110110110 |
| 3 сдвиг | 011011011011011 |
| 4 сдвиг | 101101101101101 |

Первые семь битов двоичного числа, полученного после четвёртого циклического сдвига вправо, являются информационными битами, в которых были исправлены две ошибки.

Таким образом, в результате декодирования получено число 1011011, которое точно совпадает с переданным числом.

## 5. Требования к отчёту

Отчёт подготавливается в электронном виде. Он должен содержать постановки задач, результаты расчётов, описание процедур деления полиномов и моделирования работы кодов БЧХ, матрицу с вычисленными значениями штрафных баллов. Фотография (скриншот) схемы моделирования должна отображать реальный результат.

## 6. Контрольные вопросы

6.1. Можно ли исправить возникшую ошибку в передаваемых данных, если для помехоустойчивого кодирования используется лишь единственный бит паритета?
6.2. Перечислите программы, предназначенные для моделирования радиоэлектронных устройств.
6.3. Как составить схему цифрового устройства по заданному логическому выражению?
6.4. Нужно ли исправлять искажённые контрольные биты?
6.5. Почему коды БЧХ называют избыточными?
6.6. Как по известному порождающему полиному определить необходимое число D-триггеров?
6.7. Как проверить, правильно ли сформирован код БЧХ на передающей стороне?
6.8. Какие операции должен выполнить декодер для исправления возникших ошибок в сообщении?
6.9. Почему используемые для построения кодеров и декодеров регистры называют регистрами сдвига?
6.10. Каков алгоритм работы D-триггера?
6.11. Что такое вес остатка?

## 7. Список литературы

1. Цилькер Б.Я., Орлов С.А. Организация ЭВМ и систем: Учебник для вузов. - СПБ: Питер, 2004. – 668 с.

2. Авдеев В.А. Периферийные устройства: интерфейсы, схемотехника, программирование. – М.: ДМК Пресс, 2009. – 848 с.

3. Алексеев А.П. Помехоустойчивое кодирование. Методические указания на проведение лабораторных работ. – Самара: ПГУТИ, 2013. – 22 с.