

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО СВЯЗИ
ПОВОЛЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ТЕЛЕКОММУНИКАЦИЙ И ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА ФИЗИКИ

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ
к выполнению лабораторных работ
по теме

СВЯЗАННЫЕ КОЛЕБАНИЯ

для студентов I курса очного и заочного отделения
по специальностям 090900; 200700; 210400; 210700; 090302; 210601;
II курса 010500; 220400; 222000; 230100; 230400; 230700; 231000

Составитель: ст.преп. Арсеньев А.Н.

ст.преп. Ефимова А.А.

Редактор: док.ф.-м.н., проф.Глущенко А. Г.

Рецензент: к.ф.-м.н.,доц. Шевченко Г. Н.

Самара 2016

ВНИМАНИЕ!

Подключение лабораторной установки к сети обязательно должно проводиться в присутствии преподавателя или лаборанта!

ПОДГОТОВКА И ВЫПОЛНЕНИЕ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ

- 1) При подготовке к выполнению лабораторной работы и к ее защите необходимо изучить краткую теорию и описание к работе; рассмотреть указанный материал по литературе. Изучение материала рационально строить в соответствии с приведенными контрольными вопросами.
- 2) Подготовить заготовку по лабораторной работе, в которую необходимо включить:
 - а) цель работы;
 - б) приборы и оборудование;
 - в) схема и описание лабораторной установки;
 - г) вывод расчетных формул;
 - е) пустые таблицы для результатов измерений;
 - д) после таблиц записать расчетные формулы и оставить пустое место для вычислений.
- 3) Получить у преподавателя допуск к выполнению работы.
- 4) Провести измерения и показать их преподавателю.
- 5) Оформить отчет:
 - а) сделать вычисления;
 - б) заполнить таблицы;
 - в) нарисовать графики;
 - г) написать вывод.
- 6) Сдать письменный отчет и ответить контрольные вопросы преподавателю.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Лабораторная работа № 76. Изучение связанных механических колебаний	5
Лабораторная работа № 66. Изучение связанных электрических колебаний	9
Приложение. Связанные колебания	13
1. Связанные механические колебания	14
2. Связанные электромагнитные колебания	20

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 76

Изучение связанных механических колебаний

ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Изучение особенностей и основных характеристик систем с несколькими степенями свободы на примере двух связанных простых колебательных систем.

ПРИБОРЫ И ПРИНАДЛЕЖНОСТИ

Установка для изучения связанных механических колебаний, состоящая из двух маятников, связанных пружиной; секундомер, линейка, легкая металлическая рейка.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Детлаф А.А., Яворский Б.М.* Курс физики. — М.: Академия, 2014.
2. *Трофимова Т.И.* Курс физики — М.: Академия, 2014.
3. *Савельев И.В.* Курс общей физики. Том 1. Механика. Молекулярная физика и термодинамика. — М.: КноРус, 2012.
4. *Савельев И.В.* Курс общей физики. Том 2. Электричество и магнетизм. Волны. Оптика.— М.: КноРус, 2012 *Волькенштейн В.С.* Сборник задач по общему курсу физики. — М.: Абрис, 2013.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что собой представляет связанная система? Примеры.
2. Что называют числом степеней свободы?
3. Какие колебания называют нормальными или модами?
4. Какие колебания называют синфазными?
5. Выведите уравнения синфазных колебаний, получите выражения для частоты этих колебаний.
6. Какие колебания называются антифазными?
7. Выведите уравнение антифазных колебаний, получите выражения для частоты антифазных колебаний?
8. Дайте определение явлению биения.
9. Получите уравнение биений.
10. Дайте определение периода биений.
11. Опишите порядок выполнения работы.

ОПИСАНИЕ УСТАНОВКИ И МЕТОДА ИЗМЕРЕНИЙ

Установка состоит из связанных пружинами маятников, укрепленных на штативе (рис. 1). Для отклонения маятников от положения равновесия на небольшую величину в ту или другую сторону в установке предусмотрено отчетное устройство, содержащие металлическую линейку и одновременно фиксирующее колебания маятника строго вдоль этой линейки. Для удобства наблюдения синфазных колебаний связанных маятников в устройстве предусмотрена возможность соединения их металлической рейкой.

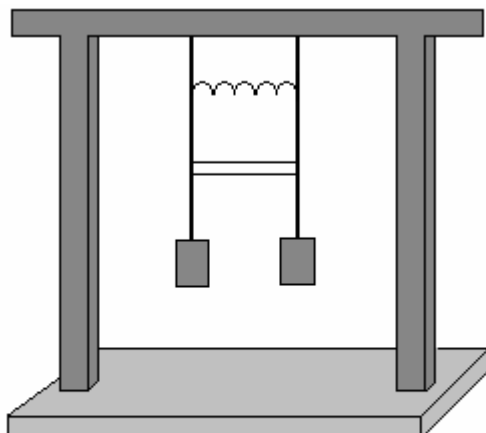


Рис. 1.

Установка для изучения связанных механических колебаний.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Провести измерения для **синфазных** колебаний связанных маятников.

Для этого соединить маятники металлической рейкой, возбудить синфазные колебания маятников, отклонив их на малый ($5-10^0$) угол в одном направлении. Измерить время 10 синфазных колебаний.

2. Рассчитать частоту синфазных колебаний по формуле

$$\nu_c = \frac{n}{t},$$

где: n – число колебаний, t – время.

3. Измерение повторить 5 раз.

4. Провести измерения для **антифазных** колебаний связанных маятников.

Для этого снять металлическую рейку и отклонить маятники на малый угол $(5 - 10^0)$ в противоположных направлениях. Измерить время 10 антифазных колебаний.

5. Рассчитать частоту антифазных колебаний по формуле

$$\nu_a = \frac{n}{t},$$

где: n – число колебаний, t – время.

6. Измерение повторить 5 раз.

7. Провести измерения для **биений** связанных маятников.

Для этого, придерживая перед пуском один маятник, отклонить другой маятник на малый угол $(5 - 10^0)$, отпустить маятники для возникновения биений (**маятники не должны соударяться между собой**).

За одно полное **биение** амплитуда колебаний одного из маятников уменьшается от максимума до нуля и вновь возрастает до максимума.

Измерить время 10 полных биений.

8. Рассчитать частоту биений по формуле

$$\nu_b = \frac{n}{t},$$

где: n – число биений, t – время.

9. Измерение повторить 5 раз.

10. Измерить l – длину маятника и d – расстояние от точки подвеса до пружины. Взять из таблицы для данного макета k – коэффициент упругости пружины и m – массу маятника.

11. Рассчитать теоретическую частоту синфазных колебаний

$$\nu_c = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}}$$

11. Рассчитать **теоретическую** частоту **антифазных** колебаний

$$\nu_a = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2kd^2}{ml^2}}$$

12. Рассчитать **теоретическую** частоту **биений**

$$\nu_b = \nu_a - \nu_c$$

13. Данные занести в таблицу

№	Синфазные колебания			Антифазные колебания			Биения		
	$\nu_{\text{опыт.}}$	$\langle \nu \rangle$	$\nu_{\text{теор.}}$	$\nu_{\text{опыт.}}$	$\langle \nu \rangle$	$\nu_{\text{теор.}}$	$\nu_{\text{опыт.}}$	$\langle \nu \rangle$	$\nu_{\text{теор.}}$
1									
2									
3									
4									
5									

$$\langle \nu \rangle = \frac{\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4 + \nu_5}{5}$$

14. Сравнить измеренные и теоретические частоты синфазных и антифазных колебаний, биений. Сделать вывод.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 66

Изучение связанных электрических колебаний

ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Изучение особенностей колебаний систем с несколькими степенями свободы на примере двух электрических колебательных контуров с емкостной связью между контурами.

ПРИБОРЫ И ПРИНАДЛЕЖНОСТИ

Генератор прямоугольных импульсов Г5-15, осциллограф, два конденсатора емкостью по 24 пФ, две катушки индуктивности по 25 мГн, набор конденсаторов емкости связи от 250 пФ до 2 нФ, резистор 130 Ом.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Детлаф А.А., Яворский Б.М.* Курс физики. — М.: Академия, 2014.
2. *Трофимова Т.И.* Курс физики — М.: Академия, 2014.
3. *Савельев И.В.* Курс общей физики. Том 1. Механика. Молекулярная физика и термодинамика. — М.: КноРус, 2012.
4. *Савельев И.В.* Курс общей физики. Том 2. Электричество и магнетизм. Волны. Оптика.— М.: КноРус, 2012
5. *Волькенштейн В.С.* Сборник задач по общему курсу физики. — М.: Абрис, 2013.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какие колебания называются связанными? Приведите примеры связанных колебательных систем.
2. Что называется числом степеней свободы? Приведите примеры систем с различным числом степеней свободы.
3. Какие колебания называются нормальными?
4. Выведите уравнения синфазных колебаний. Чему равна частота этих колебаний?
5. Выведите уравнение антифазных колебаний. Чему равна частота этих колебаний?
6. Что такое биения? При каких условиях возникают биения? Получите уравнение биений.

7. Выведите зависимость периода биений и периода связанных колебаний от величины емкости связи.
8. Опишите схему установки. Каким образом в этой схеме можно получить синфазные, антифазные колебания, биения?
9. Какое влияние на колебания в связанной системе оказывает сопротивление R и активные сопротивления элементов схемы?

ОПИСАНИЕ УСТАНОВКИ И МЕТОДА ИЗМЕРЕНИЙ

Экспериментальная схема установки показана на рис 1. Колебания в системе связанных контуров возбуждаются при помощи генератора прямоугольных импульсов Г5-15. Частота следования импульсов 50 – 100 Гц, длительность импульсов $T_{им}$ выбирается из условия $\tau \gg T_{им}$, где τ – частота следования импульсов. В промежутках между импульсами, подаваемыми в схему, в системе связанных контуров происходят свободные затухающие колебания. Скорость затухания определяется величиной активных потерь в элементах схемы и сопротивлении R , введенном в схему для наблюдения колебаний тока на экране осциллографа. Напряжение, снимаемое с сопротивления R , подается на вход Y осциллографа, это напряжение пропорционально току через сопротивление R .

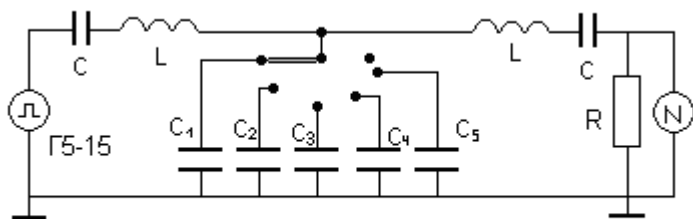


Рис. 1
Схема установки

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

Перед выполнением работы необходимо ознакомиться с инструкциями по эксплуатации генератора прямоугольных сигналов и осциллографа. Проверить заземление приборов.

1. Подключить генератор и осциллограф к лабораторному макету, включить генератор и осциллограф, дать приборам прогреться 3– 4 минуты.
2. Установить:
 - а) на генераторе частоту следования сигналов 3 – 4 КГц,
 - б) на генераторе мощность, такую, чтобы картинка занимала примерно $2/3$ экрана осциллографа,

в) длительность развертки осциллографа 5 – 20 мкс.

3. Подключить осциллограф к выходу генератора и пронаблюдать форму импульсов, подаваемых на схему; измерить их длительность.
4. Подключить осциллограф к сопротивлению R ; регулируя длительность развертки осциллографа и уровень синхронизации, получить на экране осциллографа устойчивую картину биений (2 – 3 периода).
5. С помощью переключателя длительности развертки осциллографа провести измерения периода колебаний и периода биений.
6. Пролетать аналогичные измерения для 5 значений емкости связи $C_1 - C_5$.
7. Рассчитать периоды биений и колебаний для $C_1 - C_5$ по формулам:

$$T_{\theta} \approx \frac{C_{12}}{C} T_0,$$

$$T = \frac{C_{12}}{C_{12} + C/2} T_0,$$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{LC}}.$$

8. По результатам расчета построить графики зависимости периодов биений $T_{\theta}(C_{12})$ и периода колебаний $T(C_{12})$ от емкости связи. Отметить на этих графиках экспериментально полученные результаты в виде точек.
9. Отключить емкость связи, получить на экране устойчивую картину затухающих колебаний, измерить период этих колебаний. Рассчитать период колебаний по формуле

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}}.$$

10. Записать выводы о результатах теоретического и экспериментального исследования.

Приложение

СВЯЗАННЫЕ КОЛЕБАНИЯ

До сих пор мы изучали колебательные системы, для определения состояния которых требовалось знать закон изменения только одной величины. Для математического или физического маятников это смещение x или угол отклонения φ . Для колебательного контура – заряд q и т. д. Это системы с одной степенью свободы. Каждая из этих систем характеризуется одной собственной частотой колебаний.

Числом степеней свободы называется число независимых величин, с помощью которых однозначно определяется состояние системы.

В природе существует множество колебательных систем, так или иначе связанных друг с другом. В механике, например, такую систему с двумя степенями свободы образуют два математических маятника массой m и длиной l , связанные невесомой пружиной с коэффициентом жесткости k (рис. 10.).

В электродинамике аналогом двух связанных маятников является электрическая цепь, состоящая из двух колебательных контуров LC , связанных общей емкостью C_{12} или связанные индуктивно (рис. 9).

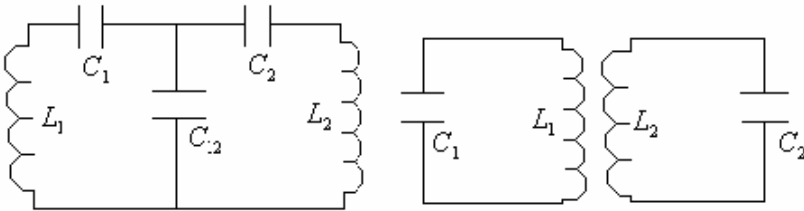


рис.9

Связанные колебательные контура.

Колебательные системы, между которыми имеется связь, посредством которой они взаимодействуют друг с другом, называются **связанными**. Это системы с двумя степенями свободы. Для задания их состояния требуется две величины. В отличие от одиночного маятника, уединенного контура, эти системы имеют две собственные частоты.

В общем случае движение системы с двумя степенями свободы очень сложно, непохожее на простое гармоническое колебания. Однако можно показать, что при линейных уравнениях движения это сложное движение связанной системы с двумя степенями свободы может

быть представлено как суперпозиция двух независимых простых гармонических колебаний, происходящих одновременно.

Эти простые гармонические колебания, с помощью которых может быть представлено сложное движение связанной системы, называются **нормальными** или **собственными колебаниями**, или **гармониками**, или **нормальными модами**, или простыми модами. Частоты, соответствующие этим гармоникам или модам, называются нормальными частотами.

Задавая определенные начальные условия, можно в связанной системе возбудить колебания, соответствующие одной нормальной моде или гармонике.

1. Связанные механические колебания

В случае двух связанных маятников первая мода возникает, если в системе возбудить синфазные колебания, а другая – при возбуждении антифазных колебаний.

Найдем частоты этих мод или нормальные частоты.

Для возбуждения **синфазных колебаний** оба связанных маятника отклоняют на одинаковый малый ($5-10^\circ$) угол $\varphi_1 = \varphi_2$ в одну и ту же сторону от положения равновесия (рис. 10).

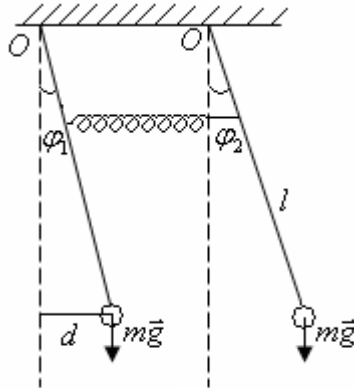


рис. 10

синфазные механические
колебания

Воспользуемся основным законом вращательного движения вокруг неподвижной оси O :

$$J\vec{\varepsilon} = \sum \vec{M}_{\text{внешн.}}$$

или

$$J\vec{\varepsilon} = \vec{M}_{\text{тяж.}} + \vec{M}_{\text{упр.}}, \quad (1)$$

где: $M_{\text{тяж}}$ – момент силы тяжести;

$M_{\text{упр}}$ – момент силы упругости;

J – момент инерции маятника относительно оси O ,

$\vec{\varepsilon}$ – его угловое ускорение.

Так как пружина не деформирована, сила упругости, а следовательно, и ее момент $M_{\text{упр}} = 0$. Тогда равенство (1) в скалярной форме переписывается в виде:

$$J\varepsilon = -M_{\text{тяж.}} \quad (2)$$

Знак $(-)$ означает, что момент силы тяжести стремится вернуть маятник в положение равновесия. Так как

$$\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2},$$

$$M_{\text{тяж.}} = mgd,$$

где: m – масса маятника;

d – плечо силы тяжести,

то равенство (2) можно представить в виде:

$$J \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mgd \quad (3)$$

$d = l \sin \varphi$, а т. к. угол φ мал, то $\sin \varphi \approx \varphi$ и $d = l\varphi$, и (3):

$$J \frac{d^2\varphi}{dt^2} + mgl\varphi = 0 \quad (4)$$

Разделив обе части этого равенства на J , получим дифференциальное уравнение гармонического колебания для величины φ :

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{mgd}{J}\varphi = 0 \quad (5)$$

где, $\frac{mgd}{J} = \omega_c^2$ – есть квадрат циклической частоты синфазных колебаний.

Подставив значение $J \approx ml^2$, где l – длина маятника, получим

$$\omega_c = \sqrt{\frac{g}{l}},$$

следовательно, **частота синфазных колебаний:**

$$\nu_c = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (6)$$

Рассмотрим **антифазные колебания** маятников, для чего разведем маятники в противоположные стороны на один и тот же небольшой угол ($5 - 10^\circ$) $\varphi_1 = -\varphi_2$. При этом пружина деформируется на величину $2x$ (рис. 11).

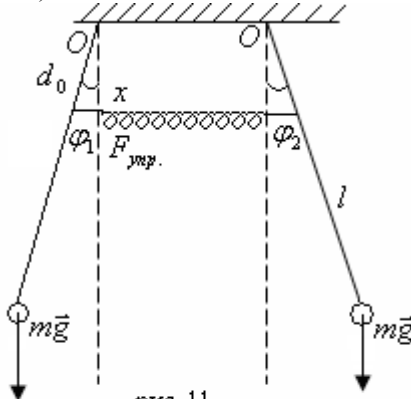


рис. 11

Антифазные механические колебания

Теперь кроме силы тяжести на маятник будут действовать силы упругости $|F_{упр}| = 2kx$.

В скалярной форме уравнение (1) имеет вид:

$$J\varepsilon = M_{тяж.} - M_{упр.} \quad (7)$$

Так как

$$M_{упр.} = F_{упр.} d_0 = 2kx d_0,$$

где d_0 – расстояние от оси O до связи (пружины);

k – жесткость пружины.

При малом угле φ

$$x = d_0 \sin \varphi \approx d_0 \varphi.$$

Равенство (7) переписывается в виде:

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} \left(\frac{mgd}{J} + \frac{2kd_0^2}{J} \right) \varphi = 0 \quad (8)$$

Получили дифференциальное уравнение антифазных колебаний. Здесь

$$\omega_a^2 = \frac{mgd}{J} + \frac{2kd_0^2}{J},$$

или учитывается, что $J \approx ml^2$, циклическая частота антифазных колебаний

$$\omega_a = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2kd_0^2}{ml^2}},$$

а частота антифазных колебаний:

$$\nu_a = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2kd_0^2}{ml^2}} \quad (9)$$

Таким образом, в рассмотренной системе возникают две нормальные моды с частотами ν_a и ν_c . Изменяя силу связи, т. е. k и d_0 , можно получить очень близкие по частоте две нормальные моды.

Если систему привести в движение произвольным образом, возникает сложное движение, которое будет суперпозицией двух близких мод:

$$\varphi_1(t) = A_1 \cos(\omega_c t + \alpha_1) + A_2 \cos(\omega_a t + \alpha_2).$$

Положим начальные фазы $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$; если частоты складываемых колебаний близки, т. е.

$$\omega_a - \omega_c = \Delta\omega \ll \omega_{cp} \frac{\omega_a + \omega_c}{2},$$

то возникают так называемые биения.

Эффект биения будет наибольшим, если $A_1 = A_2 = A$. Тогда, используя формулу суммы косинусов

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2},$$

получим **уравнение биения**:

$$\varphi(t) = 2A \cos \frac{\Delta\omega}{2} t \cos \frac{\omega_c + \omega_a}{2} t, \quad (10)$$

где $\left| 2A \cos \frac{\Delta\omega}{2} t \right|$ – **амплитуда биения**,

$\Delta\omega$ – **циклическая частота биений**,

$\frac{2\pi}{\Delta\omega} = T_\delta$ – **период биения**.

Графически биение 1-го маятника изображены на рис. 12а.

Для возбуждения биения отклоним один маятник на $2A$, а второй будем удерживать в нулевой точке. Затем одновременно отпустим оба маятника. Амплитуда колебаний (a , следовательно, и энергия E) первого маятника уменьшается, а второго – возрастает (см. рис. 12б).

Через $\frac{1}{2}T_\delta$ первый маятник остановится, а второй будет иметь амплитуду $\approx 2A$. При этом энергия колебаний переходит от одного маятника к другому полностью. Этот процесс будет периодически повторяться.

Один полный оборот энергии от первого маятника ко второму и опять к первому и представляет одно биение (рис. 12в).

Очевидно, что этот полный оборот энергии колебаний происходит за время, равное периоду биения T_δ . Если $\Delta\omega = \omega_a - \omega_c$ – циклическая частота биения, то **частота биения**:

$$\nu_\delta = \nu_a - \nu_c \quad (11)$$

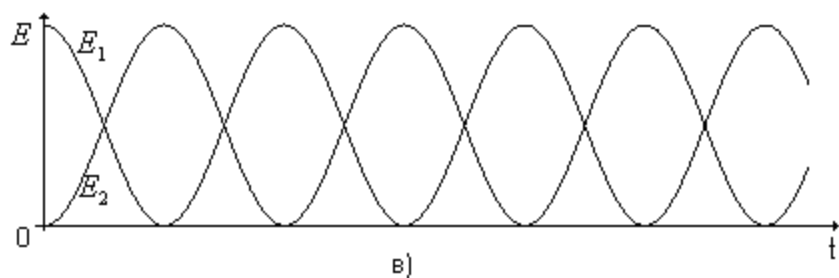
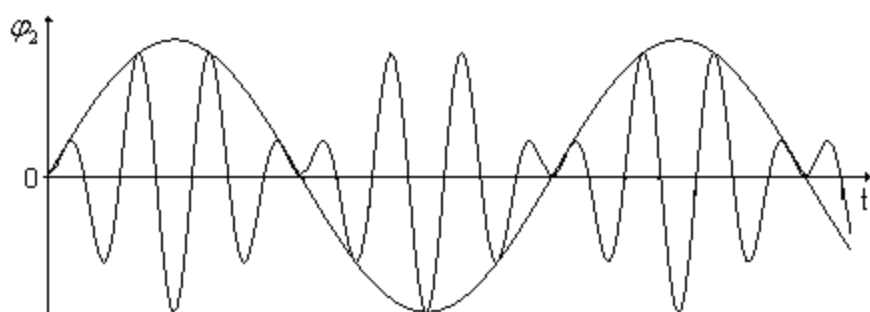
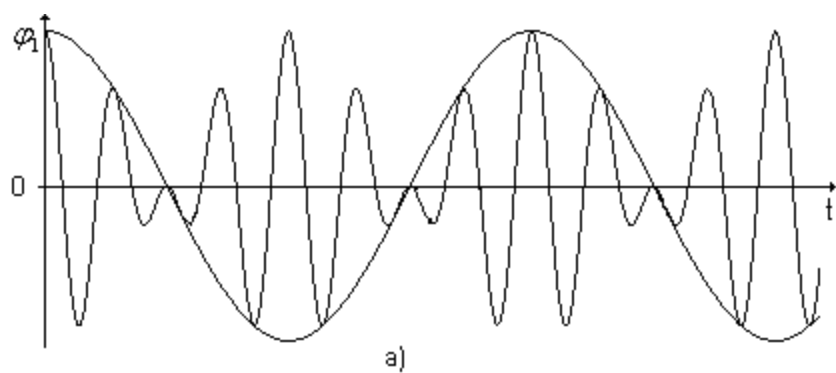


рис. 12

Биения: а) колебания первого маятника, б) второго маятника, в) энергия маятников.

2. Связанные электромагнитные колебания

Примером системы с двумя степенями свободы является схема из двух электрических CL контуров с емкостной связью C_{12} между ними (рис.13) Величина C_{12} определяет степень взаимной связи контуров.

Рассмотрим влияние емкости связи на характеристики результирующего колебания. Полагаем для простоты контуры одинаковыми. Если емкость связи C_{12} замкнута, контуры CL взаимно независимы и колебания, например, зарядов $q(t)$ на каждой из емкостей C описывается уравнением:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0 \quad (12)$$

где $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ – собственная частота колебательных контуров. Изменение зарядов описывается гармоническими функциями:

$$q(t) = q_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (13)$$

Если емкость связи отключена, то схема рис. 13 представляет собой единственный колебательный контур с индуктивностью $2L$ и емкостью $C/2$, резонансная частота которого равна ω_0 .

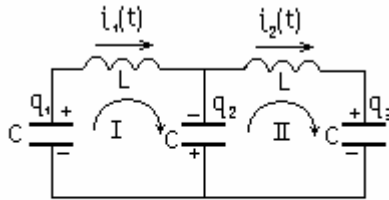


рис. 13

Два контура с емкостной связью.

Введение элемента связи меняет характер электрических связей в каждом из контуров. Однако, можно показать, что сложное колебание, происходящее в системе может быть представлено как суперпозиция двух независимых гармонических колебаний, которые получили название **нормальных** или **собственных** колебаний системы. Частоты

этих колебаний называются нормальными и могут быть не равны собственным частотам контуров, входящих в систему.

Выведем уравнения, описывающие систему связанных электрических контуров (рис. 13). В силу закона сохранения электрического заряда $q_3 = q_1 - q_2$. Законы Кирхгофа для контуров I и II, направление обхода которых показано на рис. 13:

$$\begin{aligned} U_1 + U_3 &= -L \frac{di_1}{dt} \\ -U_3 + U_2 &= -L \frac{di_2}{dt} \end{aligned} \quad (14)$$

где U_1, U_2, U_3 — напряжения на емкостях с зарядами q_1, q_2, q_3 соответственно.

Для уменьшения числа неизвестных в системе уравнений (14) используем соотношения: $U_C = q/C$, $i = dq/dt$.

Система уравнений (27) принимает вид:

$$\begin{aligned} L \frac{d^2 q_1}{dt^2} + \frac{q_1 - q_2}{C_{12}} + \frac{q_1}{C} &= 0 \\ L \frac{d^2 q_2}{dt^2} + \frac{q_2 - q_1}{C_{12}} + \frac{q_2}{C} &= 0 \end{aligned} \quad (15)$$

Систему связанных уравнений (15) относительно функций времени можно преобразовать в два независимых уравнения, это позволяет упростить решение задачи. Для этого каждое уравнение системы (15) разделим на L и вначале сложим, потом вычтем:

$$\begin{aligned} \frac{d^2(q_1 + q_2)}{dt^2} + \frac{1}{LC}(q_1 + q_2) &= 0 \\ \frac{d^2(q_1 - q_2)}{dt^2} + \frac{1}{L} \left(\frac{1}{C} + \frac{2}{C_{12}} \right) (q_1 - q_2) &= 0 \end{aligned} \quad (16)$$

Решение уравнений (16) может быть найдено в виде:

$$\begin{aligned} q_1 + q_2 &= 2A \cdot \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \\ q_1 - q_2 &= 2B \cdot \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{aligned} \quad (17)$$

где амплитуды колебаний для удобства обозначены $2A$ и $2B$, частоты колебаний определяются формулами:

$$\omega_1 = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{1}{L} \left(\frac{1}{C} + \frac{2}{C_{12}} \right)} \quad (18)$$

можно найти искомые функции времени для зарядов:

$$q_1 = A \cdot \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + B \cdot \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \quad (19)$$

$$q_2 = A \cdot \cos(\omega_1 t + \varphi_1) - B \cdot \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

Таким образом, колебания зарядов в каждом из контуров может быть представлено в виде суммы двух гармонических колебаний с частотами ω_1 и ω_2 , которые называются нормальными. Значения переменных величин в произвольный момент времени t определяются начальными условиями ($t = 0$). Выпишем начальные значения зарядов и токов, используя (32) и определение силы тока $i = dq/dt$:

$$q_{10} = A \cdot \cos \varphi_1 + B \cdot \cos \varphi_2$$

$$q_{20} = A \cdot \cos \varphi_1 - B \cdot \cos \varphi_2$$

$$i_{10} = -A\omega_1 \sin \varphi_1 - B\omega_2 \sin \varphi_2 \quad (20)$$

$$i_{20} = -A\omega_1 \sin \varphi_1 + B\omega_2 \sin \varphi_2$$

Рассмотрим различные способы возбуждения колебаний в системе.

Синфазные колебания. Пусть в начальный момент времени заряды на емкостях равны, а знаки соответствуют рис. 13, то есть

$$B = 0, \quad q_{10} = q_{20} A \cdot \cos \varphi_1.$$

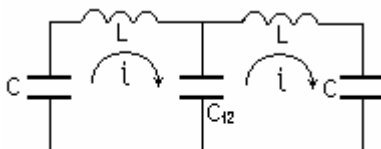


рис. 14

Синфазные электромагнитные колебания

Этот случай соответствует синфазным колебаниям: в обоих контурах происходят колебания с нормальной частотой ω_1 , совпадающей с собственной частотой каждого из контуров ω_0 . В этом случае в про-

извольный момент времени заряд на емкости $q_3(t) = 0$ и ток через элемент связи не протекает. Колебания происходят так, как если бы отсутствовал участок цепи, содержащий емкость связи C_{12} (рис. 14).

Антифазные колебания. Пусть в начальный момент времени заряды на емкостях C одинаковы, причем верхние пластины заряжены положительно, то есть $A = 0$, $q_{10} = -q_{20} = B \cdot \cos \varphi_2$. В этом случае токи $i_{12} = -i_{20}$ равны по величине и противоположны по направлению (рис. 15).

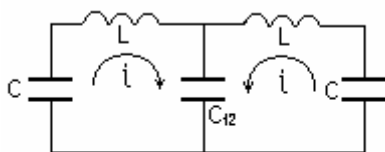


рис. 15

Антифазные электромагнитные колебания.

Биения. Пусть в начальный момент времени заряжена только одна из емкостей C , то есть $q_{10} \neq 0$, $q_{20} = 0$. Учитывая (33), а также для упрощения полагая начальные фазы $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$, получим:

$$q_{20} = A \cdot \cos \varphi_1 - B \cdot \cos \varphi_2 = A - B = 0,$$

то есть $A = B$. Тогда в любой момент времени:

$$q_1 = q_{10} (\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t) = \frac{q_{10}}{2} (\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t)$$

$$q_2 = q_{20} (\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t) = \frac{q_{10}}{2} (\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t)$$

Используя формулу суммы косинусов, получим решение в виде:

$$\begin{aligned} q_1 &= q_{10} \cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \cdot \cos \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \\ q_2 &= -q_{10} \sin \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \cdot \sin \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \end{aligned} \quad (21)$$

Из (21) видно, что колебания зарядов q_1 , q_2 происходят с частотой $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$, а амплитуда колебаний меняется при этом с частотой $\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$. Зависимость зарядов на конденсаторах q_1 , q_2 от времени показана на рис. 16.

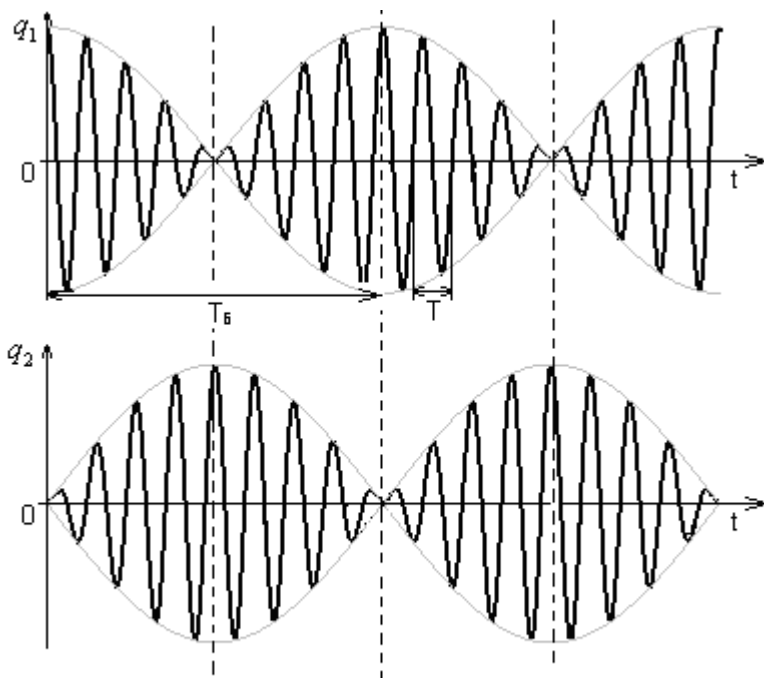


рис.16

Биения в связанных колебательных контурах.

В начальный момент времени вся энергия сосредоточена в первом колебательном контуре, в котором происходят колебания с частотой $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$. За счет элемента связи вся энергия постепенно передается во второй колебательный контур до тех пор, пока вся энергия не будет сосредоточена во втором колебательном контуре. Затем начинается

обратный переход энергии в первый контур. Время перехода энергии из первого контура во второй и обратно t_{δ} можно получить из уравнения (21):

$$\frac{(\omega_2 - \omega_1)t_{\delta}}{2} = \pi$$

Отсюда частота, с которой колебательные контуры обмениваются энергией, равна:

$$\omega_{\delta} = \frac{2\pi}{t_{\delta}} = \omega_2 - \omega_1.$$

Таким образом, при заряде одной из емкостей в каждом из колебательных контуров осуществляется сложное колебание, характеризующееся периодическими изменениями амплитуды, биения. Биения наблюдаются также при сложении однонаправленных колебаний с близкими частотами (см. лабораторную работу №76).

При слабой связи между контурами $\frac{C}{C_{12}} \gg 1$ частота обмена энергией

$$\begin{aligned} \omega_{\delta} &= \omega_1 - \omega_2 = \sqrt{\frac{1}{LC} \left(1 + \frac{2C}{C_{12}}\right)} - \sqrt{\frac{1}{LC}} = \sqrt{\frac{1}{LC}} \left(\sqrt{1 + \frac{2C}{C_{12}}} - 1 \right) \approx \\ &\approx \sqrt{\frac{1}{LC}} \left\{ \left(1 + \frac{1}{2} \frac{2C}{C_{12}}\right) - 1 \right\} = \omega_0 \frac{C}{C_{12}} \end{aligned}$$

Период биений:

$$T_{\delta} \approx \frac{2\pi}{\omega_{\delta}} \frac{C_{12}}{C} = \frac{C_{21}}{C} T_0,$$

где: T_0 – период собственных колебаний в LC контуре.