

01

Структура электромагнитного поля круглого экранированного волновода в движущейся системе отсчета

© В.В. Бирюков, В.А. Грачев

Нижегородский государственный технический университет
им. Р.Е. Алексеева, Нижний Новгород
E-mail: physics@nntu.nnov.ru

Поступило в Редакцию 15 июля 2013 г.

Рассмотрено изменение структуры электромагнитного поля круглого волновода в движущейся системе отсчета (СО). Проанализирована структура поля в системе отсчета, движущейся со скоростью распространения волны в неподвижной СО. Предложена методика расчета характеристик волновода с неидеально проводящими экранирующими поверхностями на основе релятивистского подхода.

Расчет характеристик волнопроводов, ограниченных неидеально проводящими поверхностями, затрудняется тем, что граничное условие Шукина–Леонтовича носит в общем случае приближенный характер [1]. Однако в ряде случаев соответствующим выбором движущейся системы отсчета (СО) можно добиться точного выполнения граничного условия Шукина–Леонтовича. Полученные при этом компоненты электромагнитного поля и волнового вектора можно затем с помощью преобразований Лоренца пересчитать к исходной СО [2]. В работах [3,4] данный подход реализован для прямоугольного волновода и азимутально-симметричных волн круглого волновода.

В предлагаемой работе рассматривается трансформация структуры электромагнитного поля полого круглого волновода в движущейся системе отсчета. Направление движения системы отсчета совпадает с направлением распространения волны в волноводе. Скорость СО находится в диапазоне от нуля до скорости распространения волны в волноводе.

Рассмотрим круглый экранированный волновод, изображенный на рис. 1, а. Краевые задачи для собственных волн решаются в цилиндри-

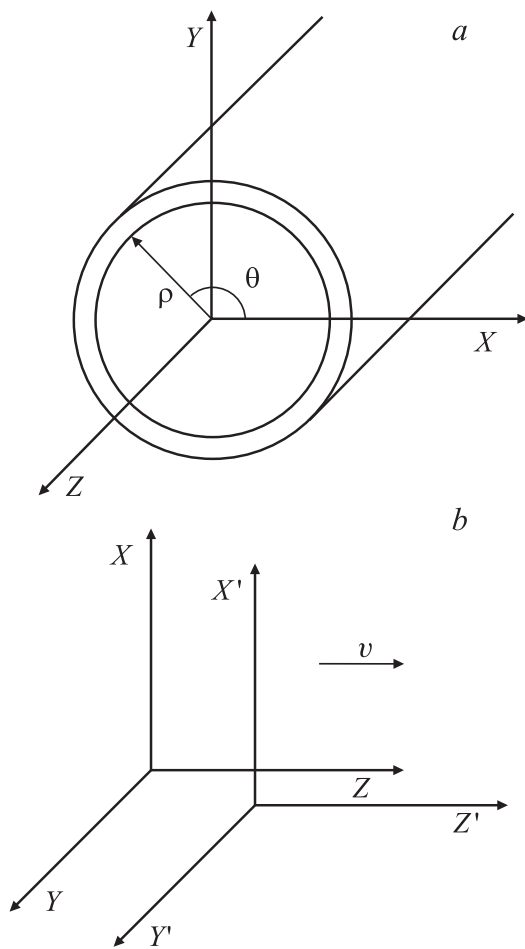


Рис. 1. *a* — круглый экранированный волновод. *b* — неподвижная и движущаяся СО.

ческой системе координат $\{\rho, \theta, z\}$. Компоненты поля (комплексные амплитуды) E -волн круглого экранированного волновода без потерь и соотношение для определения постоянной распространения имеют

вид [5]:

$$\begin{aligned}
 E_{\rho}^{nm} &= -j \frac{\beta}{\chi_{nm}} J'_n(\chi_{nm} \rho) \Theta_n(\theta) \exp(-j\beta z), \\
 E_{\theta}^{nm} &= -j \frac{n\beta}{\chi_{nm}^2 \rho} J_n(\chi_{nm} \rho) \Theta'_n(\theta) \exp(-j\beta z), \\
 E_z^{nm} &= J_n(\chi_{nm} \rho) \Theta_n(\theta) \exp(-j\beta z), \\
 H_{\rho}^{nm} &= j \frac{n\omega \varepsilon_0}{\chi_{nm}^2 \rho} J_n(\chi_{nm} \rho) \Theta'_n(\theta) \exp(-j\beta z), \\
 H_{\theta}^{nm} &= -j \frac{\omega \varepsilon_0}{\chi_{nm}} J'_n(\chi_{nm} \rho) \Theta_n(\theta) \exp(-j\beta z), \\
 H_z &= 0, \quad \beta \equiv \beta_{nm}^E = \sqrt{\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 - \left(\frac{v_{nm}}{a}\right)^2}, \quad (1)
 \end{aligned}$$

где $\Theta_n(\theta) = C_1 \cos n\theta + C_2 \sin n\theta$, $\Theta'_n(\theta) = -C_1 \sin n\theta + C_2 \cos n\theta$, $J'_n(\chi_{nm} \rho)$ — производная функции по всему аргументу $\chi_{nm} \rho$, $\chi_{nm} = v_{nm}/a$ — поперечное волновое число, v_{nm} — m -й корень функции Бесселя первого рода порядка n , a — радиус волновода.

Комплексные амплитуды компонент поля H -волн круглого экранированного волновода без потерь и соотношение для определения постоянной распространения имеют вид:

$$\begin{aligned}
 H_{\rho}^{nm} &= -j \frac{\beta}{\chi_{nm}} J'_n(\chi_{nm} \rho) \Theta_n(\theta) \exp(-j\beta z), \\
 H_{\theta}^{nm} &= -j \frac{n\beta}{\chi_{nm}^2 \rho} J_n(\chi_{nm} \rho) \Theta'_n(\theta) \exp(-j\beta z), \\
 H_z &= J_n(\chi_{nm} \rho) \Theta_n(\theta) \exp(-j\beta z), \\
 E_{\rho}^{nm} &= -j \frac{n\mu_0 \omega}{\chi_{nm}^2 \rho} J_n(\chi_{nm} \rho) \Theta'_n(\theta) \exp(-j\beta z), \\
 E_{\theta}^{nm} &= j \frac{\mu_0 \omega}{\chi_{nm}} J'_n(\chi_{nm} \rho) \Theta_n(\theta) \exp(-j\beta z), \\
 E_z^{nm} &= 0, \quad \beta \equiv \beta_{nm}^H = \sqrt{\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 - \left(\frac{v'_{nm}}{a}\right)^2}, \quad (2)
 \end{aligned}$$

где $\chi_{nm} = v'_{nm}/a$ — поперечное волновое число, v'_{nm} — m -й корень производной функции Бесселя первого рода порядка n .

Связь координат, времени и компонент поля в неподвижной и движущейся (рис. 1, б) системах отсчета определяется преобразованиями Лоренца, имеющими в цилиндрической системе координат вид:

$$\begin{aligned} \rho &= \rho', \quad \theta = \theta', \quad z = \frac{z' + vt'}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}, \quad t = \frac{t' + (v/c^2)z'}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}, \\ E_\rho &= \frac{E'_\rho + vB'_\theta}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}, \quad E_\theta = \frac{E'_\theta - vB'_\rho}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}, \quad E_z = E'_z, \\ B_\rho &= \frac{B'_\rho - (v/c^2)E'_\theta}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}, \quad B_\theta = \frac{B'_\theta + (v/c^2)E'_\rho}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}, \quad B_z = B'_z. \end{aligned} \quad (3)$$

Учитывая, что фаза — величина инвариантная по отношению к переходу из одной инерциальной СО в другую: $\varphi = \omega t - \beta z = \omega' t' - \beta' z' = \varphi'$, получим выражения для продольного волнового числа и частоты в движущейся СО:

$$\beta' = \frac{\beta - (v/c^2)\omega}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}, \quad \omega' = \frac{\omega - v\beta}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}. \quad (4)$$

Таким образом, выражения для компонент поля E -волн (комплексных амплитуд) в движущейся СО принимают вид:

$$\begin{aligned} E_z'^{nm} &= J_n(\chi_{nm}\rho')\Theta_n(\theta') \exp(-j\beta z'), \\ E_\rho'^{nm} &= -j \frac{\beta - (v/c^2)\omega}{\chi_{nm}\sqrt{1 - (v/c)^2}} J'_n(\chi_{nm}\rho')\Theta_n(\theta') \exp(-j\beta z'), \\ E_\theta'^{nm} &= -jn \frac{\beta - (v/c^2)\omega}{\chi_{nm}^2\rho'\sqrt{1 - (v/c)^2}} J_n(\chi_{nm}\rho')\Theta'_n(\theta') \exp(-j\beta z'), \\ H_z' &= 0, \quad H_\rho'^{nm} = j \frac{n\varepsilon_0(\omega - v\beta)}{\chi_{nm}^2\rho'\sqrt{1 - (v/c)^2}} J_n(\chi_{nm}\rho')\Theta'_n(\theta') \exp(-j\beta z'), \\ H_\theta'^{nm} &= -j \frac{\varepsilon_0(\omega - v\beta)}{\chi_{nm}\sqrt{1 - (v/c)^2}} J'_n(\chi_{nm}\rho')\Theta_n(\theta') \exp(-j\beta z'). \end{aligned} \quad (5)$$

В случае азимутально-симметричных E -волн ($n = 0$) отличными от нуля остаются только три компоненты: $E_z'^{nm}$, $E_\rho'^{nm}$ и $H_\theta'^{nm}$.

Аналогично выражения для компонент поля H -волн (комплексных амплитуд) в движущейся СО:

$$\begin{aligned}
 E_z'^{nm} &= 0, & E_\rho'^{nm} &= -j \frac{n\mu_0(\omega - v\beta)}{\chi_{nm}^2 \rho' \sqrt{1 - (v/c)^2}} J_n(\chi_{nm} \rho') \Theta_n'(\theta') \exp(-j\beta z'), \\
 E_\theta'^{nm} &= j \frac{\mu_0(\omega - v\beta)}{\chi_{nm} \sqrt{1 - (v/c)^2}} J_n'(\chi_{nm} \rho') \Theta_n(\theta') \exp(-j\beta z'), \\
 H_z'^{nm} &= J_n(\chi_{nm} \rho') \Theta_n(\theta') \exp(-j\beta z'), \\
 H_\rho'^{nm} &= -j \frac{\beta - (v/c^2)\omega}{\chi_{nm} \sqrt{1 - (v/c)^2}} J_n'(\chi_{nm} \rho') \Theta_n(\theta') \exp(-j\beta z'), \\
 H_\theta'^{nm} &= -j \frac{n[\beta - (v/c^2)\omega]}{\chi_{nm}^2 \rho' \sqrt{1 - (v/c)^2}} J_n(\chi_{nm} \rho') \Theta_n'(\theta') \exp(-j\beta z'). \quad (6)
 \end{aligned}$$

В случае азимутально симметричных H -волн ($n = 0$) отличными от нуля остаются только три компоненты: $H_z'^{nm}$, $H_\rho'^{nm}$ и $E_\theta'^{nm}$.

Зная выражения для компонент поля можно определить комплексные амплитуды компонент вектора Умова–Пойнтинга в движущейся СО:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{S}' = \frac{1}{2} [\mathbf{E}', \mathbf{H}'^*] &= \frac{1}{2} \left\{ \mathbf{e}_\rho (E_\theta' H_z'^* - E_z' H_\theta'^*) + \mathbf{e}_\theta (E_z' H_\rho'^* - E_\rho' H_z'^*) \right. \\
 &\quad \left. + \mathbf{e}_z (E_\rho' H_\theta'^* - E_\theta' H_\rho'^*) \right\}.
 \end{aligned}$$

Для E -волн составляющие вектора Умова–Пойнтинга приобретают следующий вид:

$$\begin{aligned}
 S_\rho' &= -\frac{1}{2} E_z' H_\theta'^* = -\frac{1}{2} j \frac{\varepsilon_0(\omega - v\beta)}{\chi_{nm} \sqrt{1 - (v/c)^2}} J_n(\chi_{nm} \rho') J_n'(\chi_{nm} \rho') \Theta_n^2(\theta'), \\
 S_\theta' &= \frac{1}{2} E_z' H_\rho'^* = -\frac{1}{2} j \frac{n\varepsilon_0(\omega - v\beta)}{\chi_{nm}^2 \rho' \sqrt{1 - (v/c)^2}} J_n^2(\chi_{nm} \rho') \Theta_n(\theta') \Theta_n'(\theta'), \\
 S_z' &= \frac{1}{2} (E_\rho' H_\theta'^* - E_\theta' H_\rho'^*) = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0(\omega - v\beta)(\beta - \frac{v}{c^2}\omega)}{\chi_{nm}^2 (1 - (v/c)^2)} \\
 &\quad \times \left\{ -\frac{n^2}{\chi_{nm}^2 \rho'^2} J_n^2(\chi_{nm} \rho') \Theta_n'^2(\theta') - J_n'^2(\chi_{nm} \rho') \Theta_n^2(\theta') \right\}. \quad (7)
 \end{aligned}$$

При $v = \beta c^2/\omega$ продольная компонента вектора Умова–Пойнтинга становится равной нулю. Направление вектора Умова–Пойнтинга в различных точках поперечного сечения волновода при указанной скорости СО показано на рис. 2, *a, b*. На этом же рисунке представлено распределение по сечению волновода плотности потока мощности E -волн. Черный цвет соответствует нулевой плотности, белый — максимальной.

Для H -волн составляющие вектора Умова–Пойнтинга приобретают следующий вид:

$$\begin{aligned} S'_\rho &= \frac{1}{2} E'_\theta H'_z{}^* = \frac{1}{2} j \frac{\mu_0(\omega - v\beta)}{\chi_{nm} \sqrt{1 - (v/c)^2}} J_n(\chi_{nm} \rho') J'_n(\chi_{nm} \rho') \Theta_n^2(\theta'), \\ S'_\theta &= -\frac{1}{2} E'_\rho H'_z{}^* = \frac{1}{2} j \frac{n\mu_0(\omega - v\beta)}{\chi_{nm}^2 \rho' \sqrt{1 - (v/c)^2}} J_n^2(\chi_{nm} \rho') \Theta_n(\theta') \Theta'_n(\theta'), \\ S'_z &= \frac{1}{2} (E'_\rho H'_\theta{}^* - E'_\theta H'_\rho{}^*) = \frac{1}{2} \frac{\mu_0(\omega - v\beta) (\beta - \frac{v}{c^2} \omega)}{\chi_{nm}^2 (1 - (v/c)^2)} \\ &\quad \times \left\{ \frac{n^2}{\chi_{nm}^2 \rho'^2} J_n^2(\chi_{nm} \rho') \Theta_n'^2(\theta') - J_n'^2(\chi_{nm} \rho') \Theta_n^2(\theta') \right\}. \end{aligned} \quad (8)$$

Как и в случае E -волн, при $v = \beta c^2/\omega$ продольная компонента вектора Умова–Пойнтинга становится равной нулю. На рис. 2, *c, d* показаны направление вектора Умова–Пойнтинга и распределение по сечению волновода плотности потока мощности H -волн.

В выражениях (5)–(8) в явном виде присутствует зависимость от скорости движения новой СО. Рассмотрим случай, когда СО движется со скоростью, равной групповой скорости v_{gr} распространения электромагнитной волны в исходной системе отсчета. Групповая скорость определяется выражением $v_{gr} = c^2\beta/\omega$.

В неподвижной СО при $\beta = 0$ распространение энергии вдоль волноведущей структуры прекращается, поле вдоль продольной координаты экспоненциально убывает — волна становится реактивно затухающей. Частота, при которой $\beta = 0$ называется критической и определяется следующей формулой $\omega_{cr} = \chi c$.

В движущейся СО при $v = v_{gr}$ продольное волновое число и частота принимают вид $\beta' = 0$, $\omega' = \omega_{cr}$, а структура поля совпадает со структурой поля волны рассматриваемого типа в исходной системе

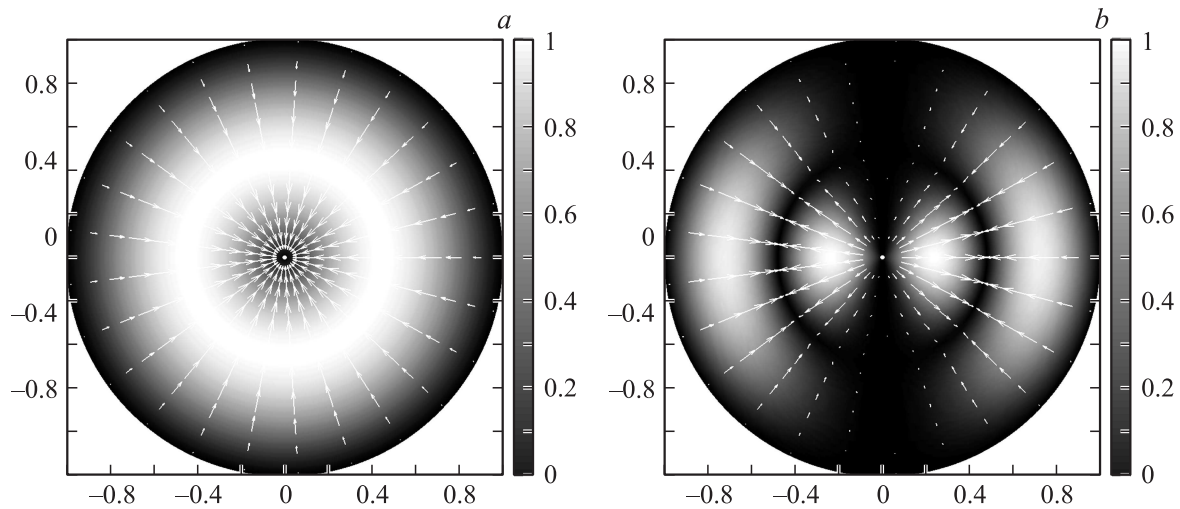


Рис. 2. Плотность потока мощности волн E_{01} (a), E_{11} (b), H_{01} (c) и H_{11} (d) в СО, движущейся со скоростью v_{gr} .

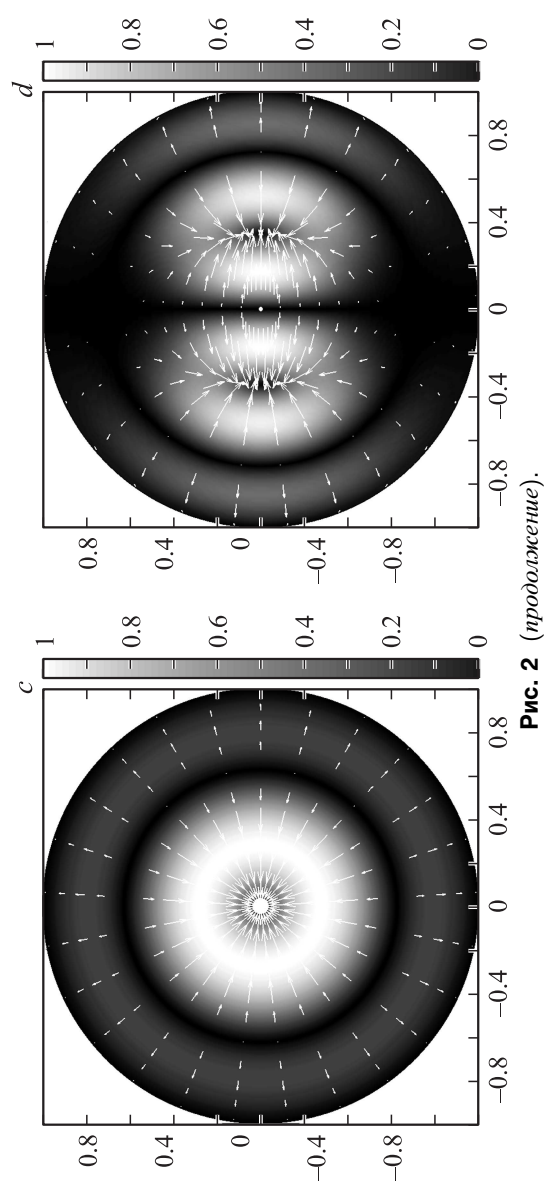


Рис. 2 (продолжение).

отсчета на критической частоте. Кроме того, как видно из рисунков, электромагнитная волна падает на поверхность проводника нормально, что является условием строгого выполнения граничных условий Шукина—Леонтовича [1,5]. При этом, как показано в работе [2], если тело движется так, что его поверхность не смещается в перпендикулярном самой себе направлении, то граничные условия на этой поверхности имеют точно такой же вид, как для неподвижного тела.

Это позволяет предположить следующую методику расчета характеристик волновода с неидеально проводящими стенками. Сначала рассчитываются характеристики волновода на критической частоте. При этом граничные условия могут быть определены точно и задача решена строго. Затем переходом в движущуюся систему отсчета можно найти соответствующие характеристики на любой заданной частоте. В случае волновода с неидеально проводящими стенками критической можно считать частоту, на которой действительная часть коэффициента распространения по величине равна мнимой.

Список литературы

- [1] Ильинский А.С., Слепян Г.Я. Колебания и волны в электродинамических системах с потерями. М.: Изд-во МГУ, 1983. 232 с.
- [2] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 620 с.
- [3] Бирюков В.В. // Письма в ЖТФ. 2008. Т. 34. В. 2. С. 75–82.
- [4] Бирюков В.В., Пилипосян С.Е. // Тез. докл. НТК ИСТ-2010. Н. Новгород, 2010. С. 99.
- [5] Неганов В.А., Осипов А.В., Раевский С.Б., Яровой Г.П. Электродинамика и распространение радиоволн. М.: Радио и связь, 2005. 648 с.