ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО СВЯЗИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение

высшего образования

«ПОВОЛЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ТЕЛЕКОММУНИКАЦИЙ И ИНФОРМАТИКИ»

Кафедра высшей математики

И.А. Блатов

Е.А. Алашеева

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Учебное пособие

Самара

2018

УДК 519.2

Рекомендовано к изданию методическим советом ПГУТИ,

протокол № , от ..2018 г.

Рецензент:

Зав каф.ЭиА ПГУТИ ,

д.ф.-м.н, доцент, Клюев Д.С.

Блатов И.А, Алашеева, Е. А.

Б **Теория вероятностей:** учебное пособие / И.А.Блатов, Е. А. Алашеева. – Самара: ПГУТИ, 2018. –118 с.

Учебное пособие «Теория вероятностей» содержит основные понятия об уравнениях в частных производных и методах их решения, данное пособие разработано в соответствии с ФГОС ВО по направлению подготовки 02.03.03 Математическое обеспечение и администрирование информационных систем и предназначено для студентов 2 курса факультета ИСТ для самостоятельной подготовки.

ISBN

Оглавление

Предмет «теория вероятностей»

Определение 1.1

Теория вероятностей – раздел математики, который изучает закономерности случайных явлений.

Определение 1.2

Основное понятие – *понятие случайного события*.

Определение 1.3

Случайное событие – событие, которое может произойти или не произойти при наличии определенных обстоятельств.

Пример 1.1

а) однократно бросается игральная кость. Событием будет, в частности, появление грани с четным числом очков

б) в овощехранилище закладывается картофель. Событием будет, например, наличие не менее 10 % нестандартного картофеля, заложенного в хранилище.

в) на определенное время включается телевизор. За событие может быть принят отказ телевизора за определенный период его работы.

События обычно обозначаются большими латинскими буквами A, B, C...

Заметим, что в результате эксперимента событие может либо произойти, либо нет.

Определение 1.4

Детерминированное событие – всегда происходит или никогда не происходит при наличии определенных условий.

Определение 1.5

Можно выделить:

1. *Достоверное событие* – событие всегда происходит.
2. *Невозможное событие* – событие никогда не происходит.

Замечание 1.1

Достоверное событие обозначается Ω, *невозможное событие* обозначается $\varnothing$.

Контрольные вопросы

1. Что изучает предмет теория вероятностей?
2. Дайте определение случайного события.
3. Приведите собственные примеры случайных событий.
4. Дайте определение детерминированного события.
5. Какие случайные события обязательно можно выделить?
6. Как обозначается достоверное событие?
7. Как обозначается невозможное событие?
8. Как обозначают случайные события.

Основные понятия теории вероятности

Классическое определение вероятности

Случайные события обозначим $(A, B, C, A_1, ...A_n)$

Определение 2.1

Случайные события $(A_1, ...A_n)$ называются *попарно-несовместимыми*, если никакие два из них не могут наступить одновременно.

Определение 2.2

Случайные события $(A_1, ...A_n)$ называются *равновозможными*, если все они наступают с одинаковой частотой.

Определение 2.3

Случайные события $(A_1, ...A_n)$ образуют *полную группу*, если они попарно-несовместимы и в результате любого испытания наступает хотя бы одно из них.

Определение 2.4

Испытания – совокупность условий, при которых происходят или не происходят события.

Определение 2.5

Генеральная совокупность - конечная совокупность элементарных исходов (случайных событий) $(A, B, C, A_1, ...A_n)$, которые обладают тремя свойствами:

1. Попарно-несовместимые
2. Равновозможные
3. Образуют полную группу

Замечание 2.1

Вышеперечисленные условия являются обязательными.

Замечание 2.2

На основе элементарных событий конструируются более сложные события, являющиеся их комбинациями.

Теорема 2.1

Пусть *A* – некоторое случайное событие, которое наступает в результате некоторых испытаний.

Обозначим через $m = m_A$ число элементарных исходов, благоприятствующих событию *A*, т.е. исходов, при которых оно наступает, а через n обозначим общее число элементарных исходов, тогда вероятностью события *A* называется число, определяющееся формулой:

$$P(A) = \frac{m}{n} \tag{2.1}$$

Замечание 2.3

Для любого события *A* значение $0 \le P(A) \le 1$, причем P(Ø)=0 и P(Ω)=1.

Пример 2.1

Рассмотрим классический пример нахождения вероятности появления «орла» или «решки» при подбрасывании монеты.

Отметим, что данные события (появление «орла» и появление «решки») образуют группу попарно несовместных событий: $\lambda = \{A_1, A_2\}$.

Далее вычисляем по формуле (2.1): $m = 1, n = 2$.

$$P(A_1) = \frac{m}{n} = \frac{1}{2}$$

$$P(A_2) = \frac{1}{2}$$

Пример 2.2

Пусть A состоит в том, что в элементарном испытании 2 раза выпал орёл. Найти вероятность A.

A_1	*ооо*
A_2	*оор*
A_3	*оро*
A_4	*орр*
A_5	*роо*
A_6	*рор*
A_7	*рро*
A_8	*ррр*

$$n = 8$$
$$m = 3$$
$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{8}$$

Контрольные вопросы

1. Дайте определение попарно несовместных событий.
2. Дайте определение равновозможных событий.
3. Дайте определение полной группы событий.
4. Приведите теорему о классическом определении теории вероятностей.
5. Дайте определение испытания.
6. Дайте определение генеральной совокупности.

Основные формулы комбинаторики

В узком смысле комбинаторика – это подсчёт различных комбинаций, которые можно составить из некоторого множества дискретных объектов. Под объектами понимаются какие-либо обособленные предметы или живые существа – люди, звери, грибы, растения, насекомые и т.д. При этом комбинаторику совершенно не волнует, что множество состоит из тарелки манной каши, паяльника и болотной лягушки. Принципиально важно, что эти объекты поддаются перечислению – их три (дискретность) и существенно то, что среди них нет одинаковых.

Упорядоченная выборка с возвращением

Пусть в урне имеется 3 занумерованных шара с номерами 1,2,3. Из урны случайным образом выбирается один шар, записывается его номер и шар возвращается в урну, после чего шары перемешиваются и из урны снова не глядя извлекается шар. Все возможные комбинации выбранной пары шаров в рассматриваемой схеме:

$$(1,1);(1,2);(1,3);$$
$$(2,1);(2,2);(2,3);$$
$$(3,1);(3,2);(3,3).$$

Всего возможных комбинаций 9.

Пусть в урне имеется n шаров, занумерованных числами от 1 до n. Из урны случайным образом берется один шар, причем номер выбранного шара записывается, выбранный шар возвращается обратно в урну, после чего шары тщательно перемешиваются и процедура повторяется вновь. Номер второго выбранного шара записывается после номера первого. И так r раз. В результате будем иметь последовательность, состоящую из r чисел, причем эти числа не обязательно различны между собой. Общее число всех возможных последовательностей такого рода можно подсчитать описанным выше способом. К каждому из выбранных шаров имеется n различных способов выбрать второй шар и т.д.

Вывод: *число способов выбрать r шаров из n занумерованных шаров, с возвращением выбранного шара обратно в урну и с учетом порядка шаров в группе (так, что например, выборка (1,2,3, ..., r) считается отличной от выборки (2,1,3, ...,r)) равно:*

$$\underbrace{nnn}_{r} = n^r = \overline{A}_n^r \tag{2.2}$$

Упорядоченная выборка без возвращения

Пусть в урне имеется 3 занумерованных шара с номерами 1,2,3. Из урны случайным образом выбирается один шар, записывается его номер , но обратно шар не возвращается в урну, после чего шары перемешиваются и из урны снова не глядя извлекается шар.

Тогда имеется три возможности для выбора первого шара и только две для выбора второго шара. Всегда же число возможных комбинаций выбираемых пар шаров будет $3 \cdot 2 = 6$. Выпишем все возможные комбинации:

(1,2), (1,3),

(2,1), (2,3),

(3,1), (3,2).

Далее, из урны, содержащей n занумерованных шаров по одному и без возвращения выбирается r шаров.

Вывод: *число способов, сколькими можно выбрать r шаров из n, с учетом порядка шаров внутри выбранных групп, равно:*

$$n(n-1)...(n-r) = \frac{n!}{(n-r)!} = A_n^r \tag{2.3}$$

Выражение n(n-1)…(n-r+1) называется числом размещения из n элементом по r и обозначается A_n^r.

Замечание 2.4

В рассматриваемых схемах две выборки из r шаров считаются различными, даже если они не отличаются составом выбранных шаров, а отличаются только порядком, в котором эти шары извлекаются из урны.

Замечание 2.5

Для упорядоченной в выборки с возвращением число r может быть любым натуральным числом, а для упорядоченной выборки без возвращения число $r \leq n$.

Рассмотрим частный случай.

Если из урны содержащий n занумерованных шаров один за другим по одному извлекать все шары до последнего (т.е. r=n) и располагать их в соответствии с порядком их извлечения (первый вытащенный шар – первым, второй – вторым и т.д), то в результате такого выбора все шары, выбранные из урны, окажутся расположенными в какой-то последовательности их номеров.

Если теперь все выбранные шары положить обратно в урну, тщательно их перемешать и повторить процедуру выбора, то выбранные шары также окажутся расположенными в некоторой последовательности их номеров, но отличной от первой.

Сколько всего таких последовательностей номеров возможно?

Вывод: *общее число таких последовательностей получится из формулы (2.3) при* $r = n$ *, т.е. равно* $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.

Это число называется числом перестановок из n *элементов и обозначается:*

$$P_n = n! \tag{2.4}$$

Неупорядоченная выборка без возвращения

Пусть из урны, содержащей n занумерованных шаров по одному один за другим вынимаются r шаров, причем вытащенный из урны шар обратно в урну не возвращается.

Будем считать одинаковыми две последовательности из r шаров, если они отличаются только порядком шаров в этих последовательностях, т.е. иначе говоря две выборки из r шаров считаются различными, если они различаются составом входящих в эти выборки шаров.

При подсчёте числа способов, которыми могут быть выбраны r шаров из n без возвращения с учетом порядка внутри выбранных групп, учитывались не только выборки из r шаров, отличавшиеся составом шаров, но и все перестановки шаров в этих выборках. Всего таких перестановок для каждой из этих выборок равно r!. Все выборки отличающиеся только перестановками шаров в этих выборках, теперь считаются одинаковыми, т.е. принимаются за одну выборку.

Вывод: *общее число способов, сколькими можно извлечь r шаров из n занумерованных шаров без учета порядка, в котором расположены шары внутри выбранных групп, будет равно*: $\dfrac{n(n-1)...(n-r+1)}{r!}$.

Это выражение называется числом сочетаний из n элементов по r и обозначается C_n^r.

$$C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!} \qquad (2.5)$$

Представим комбинаторные формулы в виде таблицы:

$P_n = n!$	**Перестановки**
$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} \quad (n \geq m)$	**Размещение без повторений**
$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} \quad (n \geq m)$	**Сочетание без повторений**
$\overline{A}_n^m = n^m$	**Размещение с повторением**
$\overline{C}_n^m = C_{n+m-1}^m$	**Сочетание с повторением**
$P(A_1, A_2, ..., A_k) = \frac{n!}{n!n_2!...n_k!}$	**Перестановки с повторениями**

Пример 2.3

Требуется найти вероятность набрать нужный номер случайным образом.

Решение: 0,1,2,…,9 - цифры; A – событие, когда угадали номер.

$$P(A) = \frac{m}{n} \qquad m = 1, n - ?$$

$$n = \overline{A}_{10}^3 = 10^3 = 1000$$

$$P(A) = \frac{1}{1000}$$

Пример 2.4

В магазине имеется восемь сортов цветов. Какова вероятность того, что из пяти разных цветов, составленных случайных образом, попадутся красная и белая розы?

Решение: A – букет содержит красную и белую розы

$$P(A) = \frac{m}{n} \quad n - ?$$

$$n = C_8^5 = \frac{8!}{5!\,3!} = 56$$

$$m = C_6^3 = 20$$

$$P(A) = \frac{20}{56} = \frac{5}{14}$$

Пример 2.5 Задача о выигрыше в спортлото

Найти вероятность главного выигрыша в спортлото 5 из 36.

Решение:

Задачу можно интерпретировать следующим образом: имеется урна, содержащая 36 шаров, занумерованных числами от I до 36. Вычеркивание цифр в карточке можно отождествить случайный выбор шаров из урны без возвращения, причем порядок вынимаемых шаров несущественен (безразлично, в каком порядке зачеркиваются цифры в карточке). Как показано, всего способов извлечь 5 шаров из урны, без возвращения шаров в урну и без учета порядка в группе выбранных шаров C_{36}^5. При этом главный выигрыш будет только при одной из этих комбинаций, когда номера шаров (зачеркнутых цифр) совпадут с пятью числами "выигрышной серия". Поэтому искомая вероятность равна:

$$P(A) = \frac{1}{C_{36}^5} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33 \cdot 32} = \frac{1}{21 \cdot 17 \cdot 33 \cdot 32} = 2{,}6 \cdot 10^{-6}.$$

Пример 2.6 Задача о днях рождения

Найти вероятность того, что в группе из 25 человек ни у кого не совпадают дни рождения.

Решение:

Задачу можно интерпретировать так: в урне имеется 365 шаров, занумерованных числами от 1 до 365. Из урны случайным образом выбирается 25 шаров. Легко заметить что искомая вероятность определяется по формуле

$$P(A) = \frac{365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot (365 - 25 + 1)}{365^{25}} = (1 - \frac{1}{365}) \cdot \ldots \cdot (1 - \frac{24}{365}).$$

Контрольные вопросы

1. Какие задачи решает комбинаторика?
2. Приведите вывод формулы для упорядоченной выборки с возвращением.
3. Приведите вывод формулы для упорядоченной выборки без возвращения.
4. Приведите вывод формулы для неупорядоченной выборки без возвращения.

Другие вероятностные модели

Статистическая вероятность

Определение 3.1

Статистическая вероятность вычисляется по формуле:

$$P*(A)=\frac{m_A^*}{n^*}\quad , \tag{3.1}$$

где m^* - количество элементов совокупности, удовлетворяющих заданному свойству *A*, n^* - объем статической совокупности.

Пример 3.1

Наблюдения показывают, что в среднем среди 1000 новорожденных детей 515 мальчиков. Какова частота рождения мальчика в такой серии наблюдений?

Решение:

$$W(A)=\frac{515}{1000}\approx 0.515$$

Геометрическая вероятность

Теорема 3.1

Пусть на плоскости имеется множество λ, а в нем имеется множество λ_1. Какова вероятность того, что при случайном выборе попадется λ_1?

$$S_1 = mes\lambda_1$$
$$S_2 = mes\lambda$$

Формула для вычисления геометрической вероятности:

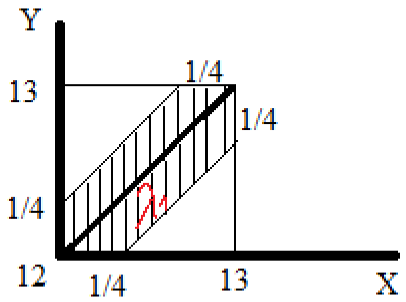
$$P(A)=\frac{mes\lambda_1}{mes\lambda} \tag{3.2}$$

Пример 3.2 Задача о встрече

Встречаются два человека, с 12 до 13 часов, каждый ждет 15 минут и уходит. Какова вероятность того, что встреча состоится?

Решение:

Первый человек пришел к моменту Х
Второй человек пришел к моменту У



$$(x-y)\le\frac{1}{4}$$

λ_1 - множество точек, удовлетворяющих условию

$\lambda=[12,13]\times[12,13]$ mes - площадь

$$P(A)=\frac{mes\lambda_1}{mes\lambda}=\frac{mes\lambda_1}{1}=mes\lambda_1$$

$$mes(\frac{\lambda}{\lambda_1})=2\cdot\frac{1}{2}\cdot(\frac{3}{4})^2=\frac{9}{16}\quad\Rightarrow\quad mes\lambda_1=1-\frac{9}{16}=\frac{7}{16}$$

Контрольные вопросы

1. Дайте определение статистической вероятности.
2. Дайте определение геометрической вероятности.
3. В чем состоит задача о встрече?

Задачи для самостоятельного решения

1. При бросании монеты вычислить вероятность выпадения «решки».

2. Пять различных книг расставлены наудачу на одной полке. Найти вероятность того, что две определенные книги окажутся рядом.

3. В группе 12 студентов, среди которых 8 отличников. По списку наудачу отобраны 9 студентов, найти вероятность того, что среди отобранных студентов 5 отличников.

4. При испытании партии приборов относительная частота годных приборов оказалась равной 0,9. Найти число годных приборов, если всего было проверено 200 приборов.

5. В конверте среди 100 фотокарточек находится одна разыскиваемая. Из конверта наудачу извлекают 10 карточек. Найти вероятность того, что среди них окажется нужная.

6. В окружность вписан квадрат. В круг наудачу бросается точка. Какова вероятность того, что эта точка попадает в круг.

Сумма случайных событий и её свойства

Определение 4.1

Пусть A и B – случайные события, тогда их суммой называется случайное событие $C = A + B$ состоящая в том, что наступило хотя бы одно событие A или B.

Геометрическая интерпретация

Если элементарные исходы изображать точками на плоскости, то любое событие может быть изображено некоторым множеством точек на плоскости. Такая геометрическая интерпретация событий делает очень наглядными различные соотношения между ними.

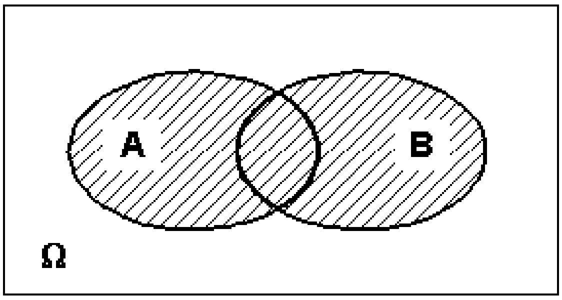


Рисунок 4.1

Пример 4.1 ***Артиллерийский пример суммы случайных событий***

Два орудия стреляют в цель, тогда если A – первое орудие попало в цель, и B – второе орудие стреляет в цель, тогда $C = A + B$ - событие, означающее, что цель поражена.

Свойства операции

Теорема 4.1

Если A и B – несовместные случайные события, то справедлива формула

$$P(A+B) = P(A) + P(B) \tag{4.1}$$

Доказательство:

n - общее число исходов

m_A - число исходов, благоприятное событию A

m_B - число исходов, благоприятное событию B

m_{A+B} - число исходов, благоприятных событию $A+B$, тогда в силу попарно-несовместимости случайных событий A и B будет справедлива формула

$$m_{A+B} = m_A + m_B \tag{4.2}$$

$$P(A) = \frac{m_A}{n},\ P(B) = \frac{m_B}{n},\ P(A+B) = \frac{m_{A+B}}{n} \tag{4.3}$$

Из формул получаем:

$$P(A+B) = \frac{m_{A+B}}{n} = \frac{m_A + m_B}{n} = \frac{m_A}{n} + \frac{m_B}{n} = P(A) + P(B) \text{ ч.т.д.}$$

Следствие 4.1

Пусть $A_1, A_2, ..., A_n$ - попарно-несовместимые случайные события, тогда справедлива формула

$$P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n) \tag{4.4}$$

Аксиоматическое построение теории вероятности

Историческая справка

Если число элементарных событий, образующих полную группу, бесконечно, то определить вероятность события по классической формуле уже нельзя (за исключением тривиального случая, когда событие А получено объединением конечного числа элементарных событий), даже если принять гипотезу о равновозможности всех элементарных событий.

Действительно, в этом случае и в знаменателе и в числителе формулы будут стоять ∞, т.к. событие А состоит из бесконечного числа элементарных событий. В этом случае понятие вероятности вводится *аксиоматически.*

Аксиоматическое определение вероятности впервые предложено академиком Андреем Николаевичем Колмогоровым в 1933 г.

Основные формулы

$A_1, A_2, ..., A_n$ - множество случайных событий, причем каждому *A* поставлено в соответствии число *P(A)*, называемое вероятностью и при этом выполнены следующие аксиомы:

1. $P(A) \in [0,1]$
2. Существуют невозможные и достоверные события такие, что вероятность невозможных событий = 0, а вероятность достоверных событий = 1.
3. Существуют свойства попарной несовместимости случайных событий и, если случайные события $A_1, A_2, ..., A_n$ попарно-несовместимы, то:

   $$P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n) \text{(аддитивность)} \quad (5.1)$$

4. Если $A_1, A_2, ..., A_n$ - бесконечная последовательность попарно-несовместимых событий, то справедлива формула

   $$P(\sum_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \text{(счетная аддитивность)} \quad (5.2)$$

Произведение случайных событий

Вероятность противоположных событий

Определение 6.1

Пусть *A* и *B* – случайные события, тогда их произведение $C = A \cdot B$, состоящее в том, что произошли оба события *A* и *B*.

Геометрическая интерпретация

Снова элементарные исходы изобразим точками на плоскости:

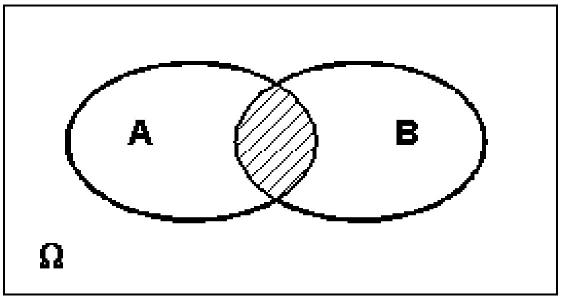


Рисунок 6.1

Определение 6.2

Пусть A – случайное событие, тогда противоположным к нему событием $\overline{A}$ называется событие, состоящее в том, что событие A не произошло $A \sim \overline{A}$

Геометрическая интерпретация

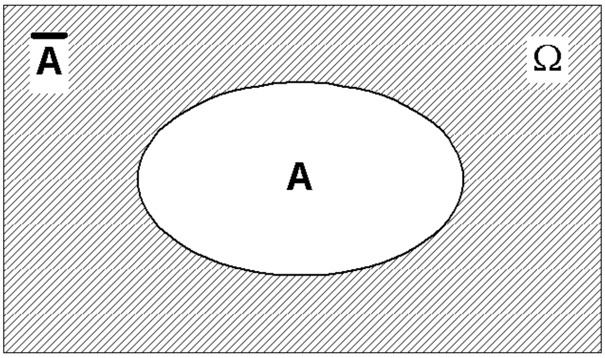


Рисунок 6.2

Теорема 6.1

Пусть $\overline{A}$ противоположное к A событие, тогда справедлива формула:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) \tag{6.1}$$

Доказательство:

$$\left.\begin{array}{l} A + \overline{A} = \lambda \ , \ P(A + \overline{A}) = P(\lambda) = 1 \\ \\ \\ \end{array}\right\} \Rightarrow \quad P(A) + P(\overline{A}) = 1$$

$P(A+\overline{A}) = P(A) + P(\overline{A})$

$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ ч.т.д.

Пример 6.1

На таможню поступают товары партиями из n комплектов. При этом в каждой партии таможня проверяет m комплектов, причем известно, что контрабанда содержится в k комплектах. Какова вероятность того, что таможня обнаружит контрабанду?

Решение:

$$P(\overline{A}) - ? \qquad P(\overline{A}) = \frac{m_{\overline{A}}}{N}$$

$$N = C_n^k \quad , \quad m_{\overline{A}} = C_{n-m}^k$$

$$P(\overline{A}) = \frac{C_{n-m}^k}{C_n^k} \quad ; \quad P(A) = 1 - \frac{C_{n-m}^k}{C_n^k}$$

Свойство произведения случайных событий

Теорема 6.2

Пусть A и B несовместные случайные события, тогда справедлива формула:

$$P(AB) = 0$$

Доказательство:

Раз они несовместны, то они не могут произойти одновременно $\Rightarrow$ AB - невозможное событие.

Условная вероятность и её свойства

Определение 7.1

Условной вероятностью события *A*, при условии наступления события *B*, называется число $P_B(A)$ равное вероятности события *A*, при условии, что событие *B* уже наступило.

Теорема 7.1

В рамках классического определения вероятности, справедлива формула:

$$P_B(A) = \frac{P(AB)}{P(B)} \tag{7.1}$$

Доказательство:

Пусть m_A, m_B, m_{AB} число исходов, благоприятствующих соответствующим событиям; n – общее число исходов. Тогда, по определению условной вероятности, будем иметь формулу:

$$P_B(A) = \frac{m_{AB}}{m_B} = \frac{m_{AB}/n}{m_B/n} = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

В прочих вероятностных моделях, в том числе и при аксиоматической, формула (7.1) принимается в качестве определения условия вероятности.

Следствие 7.2

$$P(AB) = P_B(A) * P(B) \tag{7.2}$$

Теорема 7.2

Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – произвольные случайные события, тогда справедлива формула: $P(A_1, A_2, \ldots, A_n) = P(A_1) * P_{A1}(A_2) * P_{A1A2}(A_3) \ldots P_{A1A2 \ldots A_{n-1}}(A_n)$

Доказательство:

В силу формулы (7.2):

$$(P(A_1, A_2, ..., A_n) = P(A_1) * P_{A1}(A_2 A_3 A_n) =$$
$$= P(A_1) * P_{A1}(A_2) * P_{A1A2}(A_3, ..., A_n) = P(A_1) * P_{A1}(A_2) * P_{A1A2}(A_3) ... P_{A1A2} ... A_{n-1}(A_n)$$

Следствие 7.2

$$P(ABC) = P(A) * P_A(B) * P_{AB}(C) \qquad (7.3)$$

Пример 7.1

Даны шарики, 10 красных, 7 зеленых, 8 синих. Наугад достаем 3 шарика. Какова вероятность того, что будут извлечены шарики красные, зеленые, синие в указанном порядке?

Решение:

А-красные, В-зеленые, С-синие. По формуле (7.3)

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

n=25, $P(A) = \frac{10}{25}$

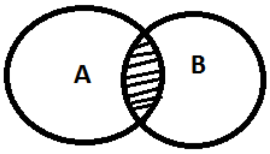
n1=24, $P(B) = \frac{m1}{n1} = \frac{7}{24}$

n2=23, $P(A) = \frac{m2}{n2} = \frac{8}{23}$

Вероятность суммы произвольных событий

Если A, B – несовместные случайные события, то $P(A+B) = P(A) + P(B)$

Пусть случайные события A и B – произвольные, необязательно несовместны. $P(A+B)=?$



По аналогии с теоремой множеств:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB) \tag{8.1}$$

Теорема 8.1

Пусть A и B –произвольные случайные события, тогда справедлива формула (8.1).

***Доказательство*:**

$$A+B=\underbrace{A(B+\overline{B})}_{\Omega}+\underbrace{B(A+\overline{A})}_{\Omega}=AB+A\overline{B}+BA+B\overline{A}=AB+A\overline{B}+B\overline{A} \tag{8.2}$$

Ω - достоверное случайное событие

$$\left.\begin{array}{ll} A=A(B+\overline{B})=AB+A\overline{B}; & P(A)=P(AB)+P(A\overline{B}) \\ B=B(A+\overline{A})=BA+B\overline{A}; & P(B)=P(AB)+P(B\overline{A}) \end{array}\right\} \to$$ события в правых частях несовместны.

$$\to \left.\begin{array}{l} P(\overline{A}B)=P(A)-P(AB)(3) \\ P(\overline{B}A)=P(B)-P(AB)(4) \end{array}\right\}$$ подставим в формулу (8.2)

Тогда получим:

$$\mathrm{P(A + B) = P(AB) + P(A\overline{B}) + P(B\overline{A}) =}$$
$$\mathrm{= P(AB) + P(A) - P(AB) + P(B) - P(AB) = P(A) + P(B) - P(AB)}$$

Примеры решения задач

Задача 1

Из урны, содержащей 5 белых и 3 черных шара, извлекаются по одному без возвращения 2 шара. Найти вероятность того, что шар вытащенный вторым, окажется белым, если известно, что первый вытащенный шар оказался черным.

Решение:

Если первый вытащенный шар был белым, то в урне остается 7 шаров, из которых 5 белых и 2 черных. Следовательно, вероятность того, что второй вытащенный шар будет белым, если первым был вытащен черный шар, равна 5/7.

Задача 2

Брошены две игральные кости. Найти условную вероятность того, что выпали две пятерки, если известно, что сумма выпавших очков делиться на 5.

Решение:

Обозначим через А событие: выпали две пятерки, а через В событие: сумма выпавших очков делится на пять. Выпишем все возможные элементарные исходы при бросании игральных костей: (1,1),…,(1,6),…,(6,1),…,(6,6), всего 36 элементарных исходов, из них благоприятны событию В исходы: (1,4),(2,3),(3,2),(4,1),(5,5),(6.4),(4,6) - всего 7 элементарных исходов, из этих исходов благоприятен А исход (5,5). По этому искомая вероятность = $\frac{1}{7}$.

Задача 3

Из ста карточек с числами 00,01,…,98,99 случайно выбирается одна. Найти вероятность того, что сумма цифр выбранного числа равна 2 при условии, что их произведение равно 0. Пусть k и l соответственно сумма и произведение цифр на этой карточке.

Решение:

Обозначим через B - событие: l=0, из 100 возможных способов выбора карточки этому событию благоприятны те, при которых номер карточки содержит хотя бы один нуль. Эти исходы (00),…,(09),(10),(20),…,(90)- всего 19. Из этих исходов событию A благоприятны два (02) и (20). Поэтому искомая вероятность равна 2/19.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение суммы случайных событий.
2. Приведите геометрическую интерпретацию суммы случайных событий.
3. Перечислите свойства суммы случайных событий.
4. В чём состоит аксиоматическое построение теории вероятности? Приведите основные аксиомы.
5. Дайте определение произведения событий.
6. Дайте определение противоположных событий.
7. Приведите теорему о вероятности противоположных событий.
8. Дайте определение условной вероятности.
9. Приведите формулу для вычисления вероятности произведения произвольных событий.
10. Приведите формулу для вычисления вероятности суммы противоположных событий.

Формула полной вероятности

Теорема 9.1

Пусть $B_1, B_2, \ldots, B_n$ – совокупность попарно несовместных случайных событий, образуют полную группу и А – произвольное случайное событие. Тогда справедлива формула:

$$P(A)=P_{B1}(A)*P(B_1)+P_{B2}(A)*P(B_2)+\ldots+P_{Bn}(A)*P(B_n) \quad (8.1)$$

называется формулой полной вероятности.

Доказательство:

По определению полной группы имеем:

$$\begin{aligned} &B_1+B_2+\ldots+B_n=\Omega \\ &A(B_1+B_2+\ldots+B_n)=A\Omega \\ &AB_1+AB_2+\ldots+AB_n=A \end{aligned} \quad (8.2)$$

События в левой части формулы (8.2) попарно несовместны в силу попарной несовместимости случайного события

$$B_i \to P(A)=P(AB_1+AB_2+\ldots+AB_n)=P(AB_1)+$$

$$+P(AB_2)+\ldots+P(AB_n)=P_{B1}(A)*P(B_1)+P_{B2}(A)*P(B_2)+\ldots+P_{Bn}(A)*P(B_n)$$

– есть формула (8.2).

Примеры решения задач

Задача 1

Два орудия стреляют в цель. Первое орудие поражает цель с вероятностью 0,7, а второе 0,9. Причем 1 орудие стреляет в 2 раза чаще. Наугад выбирается орудие и производится выстрел. Какова вероятность, что цель поражена.

Решение:

А – событие, состоящее в том, что цель поражена.

B_1 – событие, что стреляло первое орудие.

B_2– событие, что стреляло второе орудие.

P(A) - ?

Случайные события B_1, B_2 – попарно несовместны и образуют полную группу. Поэтому можно применить формулу (8.2)

$$P(A) = P_{B1}(A) * P(B_1) + P_{B2}(A) * P(B_2)$$

$$P(A) = 0.7 * \frac{2}{3} + 0.9 * \frac{1}{3} = \frac{23}{30}$$

Задача 2

Есть 2 корзины. В корзинах сидят животные: первая корзина – 7 кроликов, 5 зайцев; вторая корзина – 10 кроликов, 3 зайца. Из первой корзины наугад пересаживаем во вторую корзину. Потом таким же образом вынимают зверя из второй корзины. Какова вероятность, что вынут зайца?

Решение:

A – случайное событие, что вынут заяц.

B_1 – событие, что из 1 корзины пересажен кролик.

B_2 – событие, что из 1 корзины пересажен заяц.

B_1 и B_2 образуют полную группу.

По формуле полной вероятности:

$$P(A) = \frac{7}{12} * \frac{3}{14} + \frac{5}{12} * \frac{2}{7} = \frac{82}{336}$$
$$P(B_1) = \frac{7}{12}, P(B_2) = \frac{5}{12}, P_{B1}(A) = \frac{3}{14}, P_{B2}(A) = \frac{2}{7}$$

Задача 3

На проверку поступают изделия. Каждое из них стандартно с вероятностью 0,9 и нестандартно с вероятностью 0,1. При контроле стандартное изделие принимается с вероятностью 0,95 и отбраковываются с вероятностью 0,05. Нестандартное изделие бракуется с вероятностью 0,9 и принимается с вероятностью 0,1. Найти вероятность того, что поступившее на проверку изделие не будет забраковано.

Решение:

Обозначим через A событие: поступившее на проверку изделие не будет забраковано, а через $B_1(B_2)$ событие: поступившее на проверку изделие стандартно (нестандартно). События B_1, B_2 несовместны и образуют полную группу событий. По формуле полной вероятности имеем:

$$P(A)=P(A/B_1)\cdot P(B_1)+P(A/B_2)\cdot P(B_2)=0,95\cdot 0,9+0,1\cdot 0,1=0,065.$$

Задача 4

Имеются 2 урны. В первой находятся 3 белых шара и 2 черных, во второй 4 белых и 1 черный. Из урны по схеме случайного выбора без возвращения удалили по одному шару, а оставшиеся шары ссыпали в одну урну, после чего из этой урны не глядя вынули один шар. Найти вероятность того, что этот шар - белый.

Решение:

Обозначим через A событие: шар, вытащенный из последней урны, белый. Через B_1 обозначим событие: шары, вытащенные из первой и второй урн, белые; Через B_2 обозначим событие: шар вытащенный из первой урны – белый, а шар вытащенный из второй урны - черный. Через B_3 обозначим событие: шар, вытащенный из первой урны – черный, а из второй урны – белый и наконец через B_4 обозначим событие: оба первоначально вытащенных шара оказались черными.

Явно, что события B_1, B_2, B_3, B_4 – несовместны и образуют полную группу событий. Поэтому по формуле полной вероятности:

$$P(A)= P(A/B_1)\cdot P(B_I)+ P(A/B_2)\cdot P(B_2)+ P(A/B_3)\cdot P(B_3)+ P(A/B_4)\cdot P(B_4).$$

Для $P(B_I)$, $P(B_2)$, $P(B_3)$, $P(B_4)$ имеем соответственно:

$$P(B_I)=\frac{3}{5}.\frac{4}{5}=\frac{12}{25};\quad P(B_2)=\frac{3}{5}.\frac{1}{5}=\frac{3}{25};\quad P(B_3)=\frac{2}{5}.\frac{4}{5}=\frac{8}{25};\quad P(B_4)=\frac{2}{5}.\frac{1}{5}=\frac{2}{25}.$$

Вероятности $P(A/B_1)$, $P(A/B_2)$, $P(A/B_3)$ и $P(A/B_4)$ соответственно равны $\frac{5}{8},\frac{6}{8},\frac{6}{8},\frac{7}{8}$.

Потому $P(A)=\frac{12}{25}\cdot\frac{5}{8}+\frac{3}{25}\cdot\frac{6}{8}+\frac{8}{25}\cdot\frac{6}{8}+\frac{2}{25}\cdot\frac{7}{8}=\frac{14}{20}=\frac{7}{10}$.

Формула Бейеса

Теорема 9.1

Пусть $B_1,B_2,\ldots,B_n$ –попарно несовместные случайные события, образующие полную группу и A – случайное событие. Тогда для любого $i\in[1,n]$ справедлива формула:

$$P_A(B_i)=\frac{P_{Bi}(A)*P(B_i)}{P(A)},1\le i\le n \qquad (9.1)$$

Доказательство:

Согласно условной вероятности :

$$\left.\begin{aligned} P(AB_i)&=P_A(B_i)*P(A) \quad (9.2)\\ P(AB_i)&=P_B(A)*P(B_i) \quad (9.3)\end{aligned}\right\}$$

Приравнивания правой части формул (9.2) и (9.3), получаем формулу (9.1).

Следствие 9.1

Имеет место формула:

$$P_A(B_i) = \frac{P_{Bi}(A) * P(B_i)}{P_{Bi}(A) * P(B_1) + P_{B2}(A) * P(B_2) + ... + P_{Bn}(A) * P(B_n)}$$

Удобно применять, когда известно, что событие А уже произошло и нужно выяснить вероятность того, что произошло другое, связанное с А событие.

Примеры решения задач

Задача 1

Сидят 2 таможенника (2 группы). Первый таможенник находит контрабанду с вероятностью 0,9, второй с вероятностью 0,3. Причем второй проверяет в 3 раза чаще, чем первый. Известно, что в партии товара была обнаружена контрабанда. Какова вероятность, что её проверял первый таможенник?

Решение:

А – случайное событие, что контрабанда обнаружена.

B_1- проверял первый таможенник.

B_2– проверял второй таможенник.

$$P(B_1) + P(B_2) = 1$$
$$P(B_1) = 3 * P(B_2)$$
$$P(B_1) = \frac{1}{4}, P(B_2) = \frac{3}{4}$$

$$P_A(B_1) = \frac{P_{B1}(A) * P(B_1)}{P_{B1}(A) * P(B_1) + P_{B2}(A) * P(B_2)} = \frac{0.9 * \frac{1}{4}}{0.9 * \frac{1}{4} + 0.3 * \frac{3}{4}} = \frac{0.9}{0.18} = \frac{1}{2}$$

Задача 3

Изделия проверяется на стандартность одним из двух товароведов. Вероятность того, что изделие попадет к первому товароведу, равна 0,55, а ко второму – 0,45. Вероятность того, что изделие будет признано стандартным первым товароведом, равна 0,9, а вторым – 0,98. Изделие при проверке было признано стандартным. Найти вероятность того, что его проверил второй товаровед.

Решение:

Обозначим через А событие: изделие при проверке признано стандартным, а через B_1 и B_2 соответственно события: изделие проверил первый и второй товаровед соответственно. Нам нужно найти вероятность $P(B_2/A)$. При практическом применение формулы Бейеса целесообразно искомую условную вероятность выражать сначала по формуле (8.2), а уже затем расписывать числитель и знаменатель этой формулы по формуле вероятности произведения и формуле полной вероятности соответственно, т.е. переходить к формуле (9.1). Ясно, что B_1 и B_2 – несовместные события, образующие полную группу событий. Имеем:

$$P(B_2 \mid A) = \frac{P(AB_2)}{P(A)} = \frac{P(A/B_2)P(B_2)}{P(A/B_1)P(B_1) + P(A/B_2)P(B_2)} =$$

$$= \frac{0{,}98 \cdot 0{,}45}{0{,}9 \cdot 0{,}55 + 0{,}98 \cdot 0{,}45} = 0{,}471.$$

Контрольные вопросы

1. Приведите формулу полной вероятности.
2. Приведите формулу Бейеса.

Случайные величины

Случайные величины и их классификации

Определение 10.1

Случайная величина – функция случайного события (некоторая числовая характеристика случайного события).

$$f(x), x \to A; f(A) \text{ - случайная величина}$$

Обозначение: $X, Y, Z, \ldots, X_1, X_2, \ldots$

Классификация:

1) Дискретные
2) Непрерывные
3) Смешанные

Дискретные случайные величины. Закон распределения и его свойства.

Определение 11.1

Случайная величина Х называется дискретной, если она принимает конечное или счетное значение.

Пример 11.1

Число родившихся мальчиков на 100 новорожденных есть дискретная случайная величина с возможными конечными значениями от 0 до 100.

Пример 11.2

Пусть ведется стрельба до первого промаха, тогда число выстрелов есть дискретная случайная величина, принимающая счетное число значений, которое заранее нельзя ограничить.

Определение 11.2

Пусть X – случайная величина, принимающая значения $x_1, x_2, ..., x_n, x_1 < x_2 < ... < x_n$ (упорядоченные по возрастанию). Тогда законом (рядом) распределения случайной величины X называется таблица вида:

Значение X	x_1	x_2	…	x_n
Вероятность P	p_1	p_2	…	p_n

$$P_i = P\{X = x_i\}, 1 \le i \le n \quad (11.1)$$

Свойство 1

Справедлива формула: $\sum_{i=1}^{n} P_i = 1$

Доказательство вытекает из определения, поскольку они несовместны и образуют полную группу.

Замечание 11.1

Закон или ряд распределения – наиболее общая характеристика случайной величины. Из него может быть получена любая информация о случайной величине.

Пример 11.3

1) Однократное бросание монеты.

X=1, если орел; X=0, если решка.

X	0	1
P(X)	1/2	1/2

2) Трехкратное бросание монеты.

X = число орлов

X	0	1	2	3
P(X)	1/8	3/8	3/8	1/8

$$P\{X=0\}=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$$

$$P\{X=1\}=\frac{3}{8}$$

$$P\{X=2\}=\frac{3}{8}$$

$$P\{X=3\}=\frac{1}{8}$$

Пример 11.4

В группе из 50 человек организована лотерея. Разыгрываются два выигрыша по 10 рублей и один выигрыш в 30 рублей. Составить закон распределения суммы чистого выигрыша (выигрыш минус стоимость билета) по одному билету стоимостью в 1 руб.

Решение:

Случайная величина может принимать три значения –1, 9 и 29 руб. Первому значению благоприятствует 47 случаев из 50, второму 2 из50 и третьему один из 50. Следовательно, P(X= -1) = 0,94; P(X=9) = 0,04, P(X=29) = 0,02.

Закон распределения имеет вид:

Сумма выигрыша	-1	9	29
Вероятность	0,94	0,04	0,02

Контроль: $\Sigma P_i = 0,94 + 0,04 + 0,02 = 1$.

Функция распределения случайной величины и её свойства

Пусть X – дискретная случайная величина. Рассмотрим событие, состоящее в том, что X примет значение, меньше какого-либо произвольного числа x, т.е. X < x.

Это событие будет иметь определенную вероятность *P(X < x)*. При изменении x будет меняться и вероятность, т.е. вероятность можно рассматривать как функцию переменной x, которую обозначим *F(x)*.

Определение 12.1

X – случайная величина. Тогда её функция распределения называется функция, определяемая формулой:

$$F(x) = P\{X < x\} \tag{12.1}$$

Замечание 12.1

Функция распределения – наиболее общая и полная характеристика случайной величины. Она определена для дискретной величины.

Замечание 12.2

Если X – дискретная случайная величина, то по её функции распределения можно восстановить ряд распределения и наоборот.

Свойства функции распределения:

1) Функция распределения F(x) не убывающая функция, принимающая свои значения в промежутке [0,1]

Доказательство:

То, что она принимает значение [0,1] вытекает из формулы (12.1), поскольку вероятность принимает значение [0,1].

Докажем, что функция не убывает:

$$x_1 < x_2 \to F(x_1) \le F(x_2)$$

$$F(x_2) = P\{X < x_2\} = P\{(X < x_1) + (x_1 \le X \le x_2)\} = P\{X < x_1\} + P\{x_1 \le X < x_2\} \ge F(x_1)$$

2) Пусть случайная величина X принимает значение в промежутке [a,b]. Тогда для любого F(x)=0, для любого x > b, F(x)=1

Доказательство:

$x \le a$, то $F(x) = P\{X < x\} = 0$, потому что под знаком вероятности стоит невозможность события $x > b$ то $F(x) = P\{X < x\} = 1$

Следствие

Иногда эти формулы записывают следующей формулой:

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$$

3) Пусть F(x) – функция распределения случайной величины X. Тогда для любого отрезка [a, b] справедлива формула:

$$P\{X \in [a,b]\} = F(b) - F(a) \quad (1)$$

Доказательство:

$$F(b) = P\{X < b\} = P\{(X < a) + (a \le X < b)\} =$$
$$= P\{X < a\} + P\{a \le X < b\} = F(a) + P\{a < b\}$$

<u>Пример 12.1</u>

Дискретная случайная величина задана рядом распределения

Значение X	2	4	7
Вероятность P	0,5	0,2	0,3

Найти функцию распределения и построить ее график.

Решение:

Если значения случайной величины x < 2, то F(x). = P (X < 2) = 0, так как X не имеет значений, меньших 2.

Если значения X принадлежит интервалу 2 ≤ x < 4, то F(x) = 0,5, так как X может принимать только значение 2 с вероятностью 0,5.

Если 4 ≤ x < 7, то F(x) = 0,7. Действительно, X может принимать значение 2 с вероятностью 0,5 или значение 4 с вероятностью 0,2.

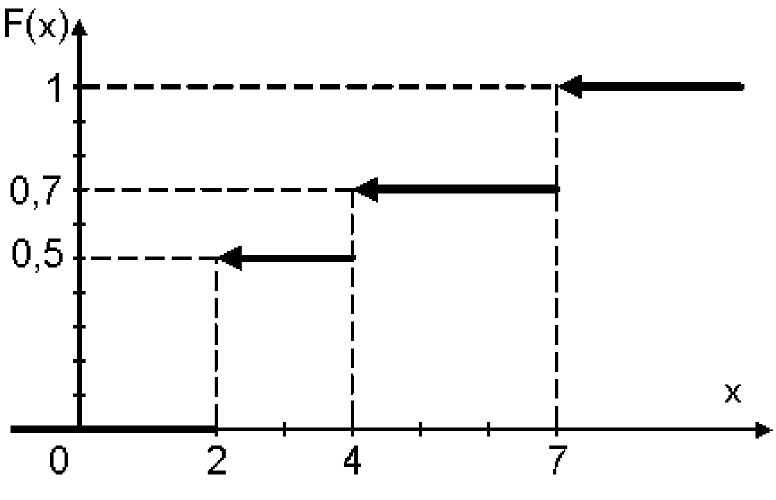
Тогда по теореме сложения вероятностей несовместных событий вероятность такого события есть 0,5 + 0,2 = 0,7,

Если $x \geq 7$, то $F(x) = 1$. Действительно, событие $X \geq 7$ достоверно, так как X при этом может иметь любое из возможных значений, и вероятность его равна 1.

Функцию распределения принято записывать в следующем виде:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 2 \\ 0{,}5 & \text{при } 2 < x \leq 4 \\ 0{,}7 & \text{при } 4 < x \leq 7 \\ 1 & \text{при } x > 7 \end{cases}$$

График этой функции имеет вид:



Непрерывные случайные величины. Плотность распределения и её свойства

Определение 13.1

Непрерывной случайной величиной называется такая случайная величина, возможные значения которой непрерывно заполняют некоторый интервал (конечный или бесконечный) числовой оси.

Пример 13.1

1) время опоздания студентов на лекцию (интервал возможных значений здесь от 0 до 80 минут);

2) ошибка во взвешивании товара (интервал возможных значений - минимальное значение шкалы весов);

3) диаметр обработанной на токарном станке детали (интервал возможных значений зависит от точности измерений, т.е. от используемого измерительного прибора).

Замечание 13.1

Очевидно, что закон распределения непрерывной случайной величины невозможно задать в виде таблицы с указанием её возможных значений (в силу их бесконечного, несчетного числа). Поэтому непрерывные случайные величины обычно задаются при помощи интегральной или дифференциальной функций (плотности) распределения их вероятностей.

Замечание 13.2

Интегральная функция распределения была описана выше, она сохраняет своё определение и все свойства и для непрерывной случайной величины.

Пример 13.2

Непрерывная случайная величина X задана на интервале $(-\infty;+\infty)$ интегральной функций распределения

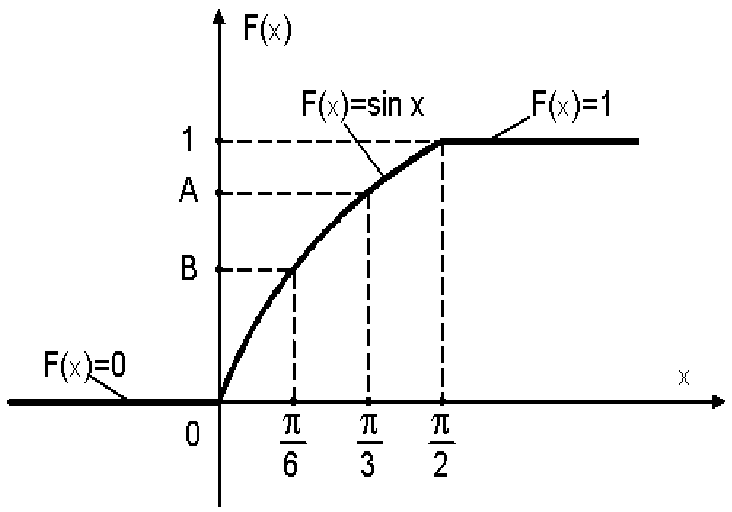
$$F(x)=\begin{cases} 0,\ x\le 0 \\ \sin x,\ 0<x\le \dfrac{\pi}{2} \\ 1,\ x>\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания случайная величина X примет значения из интервала $(\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3})$. Дать графическую интерпретацию этого события.

Поскольку заданный интервал $(\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3})$ целиком находится внутри интервала $(0;\frac{\pi}{2})$, то искомая вероятность равна

$$P(\frac{\pi}{6}<X<\frac{\pi}{3})=\sin\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}.$$

Начертим график F(x):



Искомая вероятность численно равна длине отрезка (AB) $=\frac{\sqrt{3}}{1}-\frac{1}{2}$.

Определение 13.2

Говорят, что X - непрерывно-распределённая случайная величина, если её функция распределения F(x) имеет на всей числовой оси кусочно-непрерывную производную $F'(x) = f(x)$ (функция распределения дифференцируема).

Определение 13.3

Пусть X – непрерывная случайная величина, тогда её производная $f(x) = F'(x)$ называется плотностью распределения случайной величины X.

Вероятностный смысл плотности распределения

$$F(x), f(x),\ x \in R\,[x, x+\Delta x], \Delta x << 1$$

$$P\{X \in [x, x+\Delta x]\} = F(x+\Delta x) - F(x) = f'(x+\Delta x)\Delta x - f(x)\Delta x$$

$$f(x) \approx \frac{P\{X \in [x, x+\Delta x]\}}{\Delta x} \text{(чем меньше } \Delta x \text{, тем точнее)}$$

Свойства плотности распределения

1) Плотность распределения есть не отрицательная функция.

$$f(x) \ge 0$$

Доказательство:

Функция распределения не убывающая, а производная не отрицательной функции не отрицательна.

2) Пусть X – непрерывная величина с плотностью вероятности f(x), тогда для любого отрезка [a,b] справедлива формула:

$$P\{X \in [a,b]\} = \int_a^b f(x)dx$$

Доказательство:

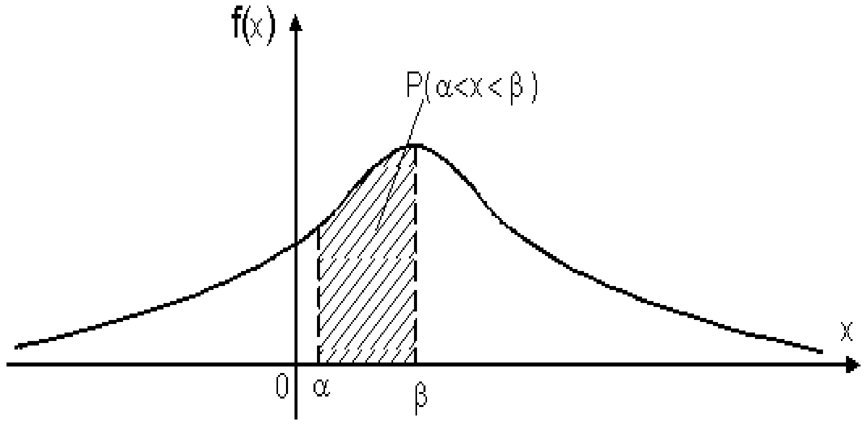
$$P\{X \in [a,b]\} = F(b) - F(a)$$

$f(x) = F'(x)$ поэтому в силу формулы Ньютона-Лейбница можно записать:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Графическая интерпретация

Графически вероятность попадания непрерывной случайной величины X в интервал $(\alpha;\beta)$ есть площадь криволинейной трапеции, изображенной на рисунке:



3) Пусть X –непрерывная случайная величина с функцией распределения F(x) и плотностью распределения f(x), тогда:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \qquad \forall x \in R$$

Доказательство:

Действительно, по определению дифференциала функции

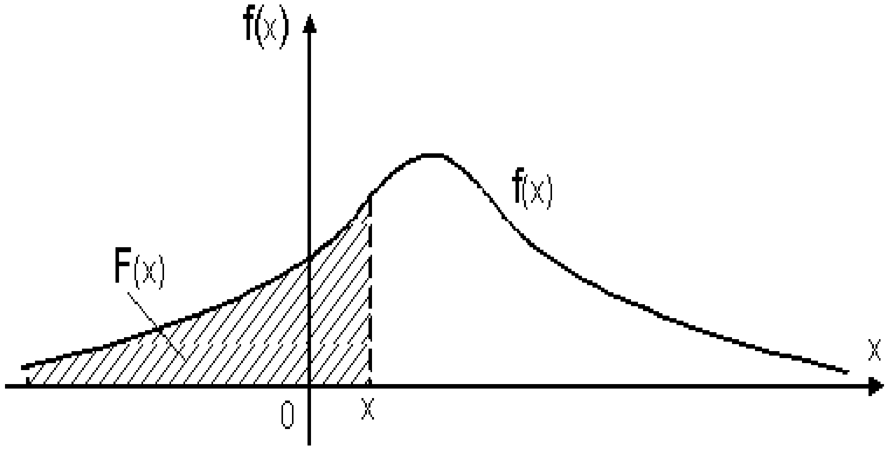
$$dF(x)= F'(x)dx= f(x)dx,$$

$$\int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{x} dF(x) = F(x) - F(-\infty),$$

но $F(-\infty)=0$ (по свойствам функции F(x)), поэтому $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$..

Графическая интерпретация

Интегральная функция распределения F(x) на графике плотности распределения f(x) изображается заштрихованной площадью.



4) интеграл по всей числовой оси от плотности вероятности равен единице:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

Доказательство:

В самом деле, так как $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = F(+\infty) - F(-\infty) = 1 - 0 = 1$.

Пример 13.3

Непрерывная случайная величина X задана на всей числовой оси плотностью распределения вероятностей, определенной формулой

$$f(x) = \frac{C}{1+x^2}.$$

Найти величину параметра C и определить вероятность попадания случайной величины в интервал (-1; $\sqrt{3}$), построить кривую распределения и отметить найденные решения на графике f(x).

Решение:

По свойству плотности вероятностей:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{C}{1+x^2} dx = 1.$$

Вычислим этот интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{C}{1+x^2} dx = C\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = C\, arctgx\Big|_{-\infty}^{+\infty} = C[arctg(+\infty) - arctg(-\infty)) =$$

$$= C\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = C\pi$$

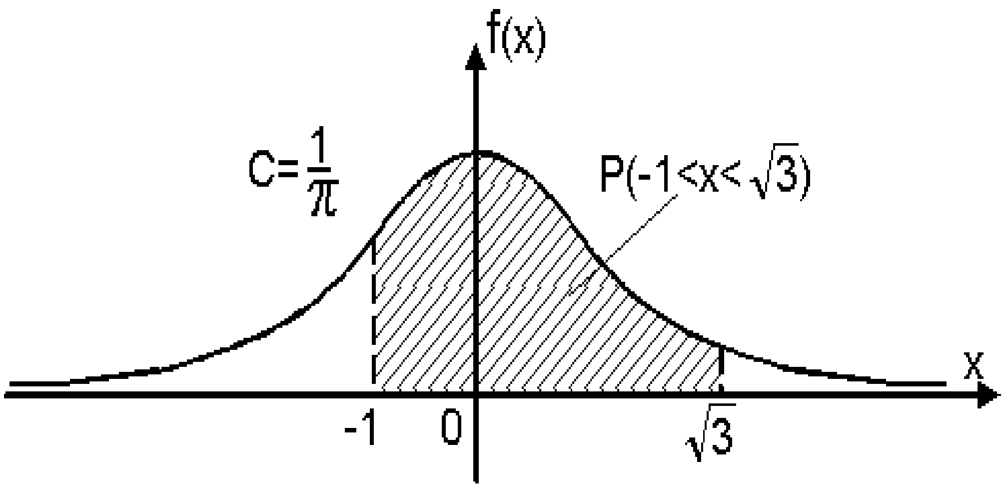
Следовательно $C\pi = 1$, откуда $C = \dfrac{1}{\pi}$.

Теперь можно определить вероятность попадания в интервал (-1; $\sqrt{3}$)

$$P(-1 < X < \sqrt{3}) = \int_{-1}^{\sqrt{3}} \frac{\frac{1}{\pi}}{1+x^2} dx = \frac{1}{\pi} arctgx\Big|_{-1}^{\sqrt{3}} = \frac{1}{\pi}(arctg\sqrt{3} - arctg(-1)) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{7\pi}{12} = \frac{7}{12}.$$

Отметим найденные решения на графике функции f(x):



Пример 13.4 ***Пример смешанной случайной величины***

Пусть Т – случайная величина, равная времени отклонения отправления поезда от указанного расписания.

$$T = t - tp$$

$F(t) = 0$ при $t \leq 0$

$$P\{T = 0\}$$

Данная величина является ни дискретной, ни непрерывной.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение дискретной случайной величины.
2. Дайте определение ряда распределения.
3. Дайте определение функции распределения дискретной случайной величины.
4. Приведите свойства функции распределения дискретной случайной величины.
5. Дайте определение непрерывной случайной величины.
6. Дайте определение плотности распределения непрерывной случайной величины.
7. Дайте определение функции распределения непрерывной случайной величины.
8. Приведите свойства функции распределения непрерывной случайной величины.

Числовые характеристики случайных величин и их свойства

Функция распределения или плотность распределения полностью характеризует случайную величину. Но они не всегда бывают известны или ими не всегда удобно пользоваться. В ряде случаев случайные величины лучше описывать числами. Такие числа называют числовыми характеристиками случайной величины: математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение.

Математическое ожидание и его свойства

Пусть X – случайная дискретная величина, имеющая следующий закон распределения:

X	X_1	X_2	X_3	…	X_n
P(x)	P_1	P_2	P_3	…	P_n

Тогда её математическим ожиданием называется число, определяемое формулой:

$$M[X] = X_1 p_1 + X_2 p_2 + \ldots + X_n P_n = \sum_{i=1}^{n} X_i pi \qquad (14.1)$$

Определение 14.1

Математическим ожиданием дискретной случайной величины называют сумму произведений всех ее возможных значений на их вероятности (14.1).

Определение 14.2

Математическое ожидание непрерывной случайной величины X определяется по формуле

$$M(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx \qquad (14.2)$$

Пример 14.1

Стрелок стреляет в мишень: X – случайная величина, равная числу очков. Стреляет много раз и в разное время. Узнать квалификацию как спортсмена.

Решение:

$m >> 1$

$m_1 - x_1, m_2 - x_2, ..., m_n - x_n$

$m_1 + m_2 + ... + m_n = m$

$\frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + ... + m_n x_n}{m} = \frac{m_1}{m} x_1 + \frac{m_2}{m} x_2 + ... + \frac{m_n}{m} x_n = p^* x_1 + p^* 2x_2 + ... + p^* n x_n$ – среднее число очков (квалификация)

Замечание 14.1

Математическое ожидание – среднее значение величины.

Пример 14.2

Дан ряд распределения случайной величины

X	2	3	5
P	0,3	0,1	0,6

Найти ее математическое ожидание.

Решение: M (X) = 2 · 0,3 + 3 · 0,1 + 5 · 0,6 = 3,9.

Свойства математического ожидания

1. Пусть C=const

$$M[C] = C \quad (14.3)$$

2. Пусть X – произвольная случайная величина, C=const, тогда

$$M[CX] = CM[X] \quad (14.4)$$

3. Пусть X и У – произвольные случайные величины, тогда

$$M[X+Y]=M[X]+M[Y] \tag{14.5}$$

4. Пусть X и У – независимые случайные величины, тогда

$$M[XY]=M[X]M[Y] \tag{14.6}$$

Доказательство:

1. $X=C$

X	C
P(x)	1

$$M[x]=C*1=C$$

2. Пусть X – случайная величина. Введем У – случайная величина. $Y=CX$

Тогда её закон распределения:

У	CX_1	CX_2	…	CX_n
P(x)	P_1	P_2	…	P_n

$$M[Y]=M[CX]=\sum_{i=1}^{n}CXiPi=C\sum_{i=1}^{n}X_iP_i=CM[X]$$

3. X, У – случайные величины принимают значения

X:

X	X_1	X_2
P(x)	P_1	P_2

Y:

Y	Y_1	Y_2
P(y)	q_1	q_2

$Z = X + Y$

Z	X1+Y1	X1+Y2	X2+Y1	X2+Y2
P(z)	P_{11}	P_{12}	P_{21}	P_{22}

$$M[X+Y] = M[z] = (x_1 + y_1)P_{11} + (x_1 + y_2)P_{12} + (x_2 + y_1)P_{21} + (x_2 + y_1)P_{22} =$$
$$= x_1(P_{11} + P_{22}) + y_1(P_{11} + P_{21}) + y_2(P_{21} + P_{22}) = M[x] + M[y]$$

$$P_n + P_{12} = P\{z = (x_1 + y_1)) + (z(x_1 + y_2))\} = P\{X = x_1\} = P_1$$

4. Пусть X, У – случайные величины принимают 2 значения

X:

X	X_1	X_2
P(x)	P_1	P_2

Y:

Y	Y_1	Y_2
P(y)	q_1	q_2

Z=XY

Закон распределения:

Z	X_1Y_1	X_1Y_2	X_2Y_1	X_2Y_2
P(z)	P_{11}	P_{12}	P_{21}	P_{22}

$$P_{11} = p_1q_1,\ P_{12} = p_1q_2, P_{21} = p_2q_1, P_{22} = p_2q_2$$

$$M[XY] = M[z] = x_1q_1 * p_1q_2 + p_2q_2 * x_1y_2 + x_2y_1p_{21} + x_2y_2p_{22} =$$
$$= x_1p_1(y_1q_1 + y_2q_2) + x_2p_2(y_1q_1 + q_2y_1) =$$
$$= (x_1y_1 + x_2p_2)(y_1q_1 + q_2y_2) = M[x] * M[y]$$

Ч.т.д.

Пример 14.3

Дискретные независимые случайные величины заданы законами распределения:

X_1	1	2
P	0,2	0,8

X_2	2	4
P	0,3	0,7

Найти математические ожидания произведения X_1 и X_2.

Решение:

Составим закон распределения новой случайной величины $X_1 \cdot X_2$. и найти ее математическое ожидание. Возможные значения новой величины есть все возможные произведения значений величины X_1 на все возможные произведения величины X_2. Так как эти величины независимы, то вероятности появления значений величины X_1X_2 есть произведение соответствующих вероятностей величины X_1 и X_2 . Перемножив значения X_1 и X_2 получим 2, 4, 8. Перемножив вероятности, имеем 0,06; 0,24; 0,14; 0,56. Так как у новой случайной величины есть два совпадающих значения 4, то их объединяем в одно, а следовательно, соответствующие вероятности складываем (по теореме сложения вероятностей для независимых событий). Получим новый ряд распределения:

X_1X_2	2	4	8
P	0,06	0,38	0,56

$$M(X_1X_2) = 2\cdot 0,06 + 4\cdot 0,38 + 8\cdot 0,56 = 6,12.$$

Дисперсия и её свойства

Определение 14.3

Пусть X – случайная величина, тогда её дисперсией называется число, определяемое формулой:

$$D[x] = M[(X - M[x])^2] \qquad (14.7)$$

Пример 14.3

Найти дисперсию случайной величины X, заданной законом распределения

X	2	3	5
P	0,1	0,6	0,3

Сначала найдем математическое ожидание

$$M(X) = 2 \cdot 0{,}1 + 3 \cdot 0{,}6 + 5 \cdot 0{,}3 = 3{,}5$$

Запишем закон распределения величины X^2

X^2	4	9	25
P	0,1	0,6	0,3

и найдем $M(X^2) = 4 \cdot 0{,}1 + 9 \cdot 0{,}6 + 25 \cdot 0{,}3 = 13{,}3$. Тогда дисперсия равна

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = 13{,}3 - (3{,}5)^2 = 1{,}05.$$

Замечание 14.2

Дисперсия показывает на сколько случайная величина отклоняется от своего математического ожидания.

$$M(X - M[x]) = M[x] - M[M[x]] = M[x] - M[x] = 0$$

Свойства дисперсии

1) Справедлива формула:

$$D[x]-M[x^2]-(M[x]^2) \qquad (14.8)$$

2) C=const,

$$D[C]=0 \qquad (14.9)$$

3) X- случайная величина, C=const,

$$D[CX]=C^2D[X] \qquad (14.10)$$

4) X, У – независимые случайные величины, то справедлива формула:

$$D[X+Y]=D[X]+D[Y] \qquad (14.11)$$

5) $$D[X]\geq 0 \qquad (14.12)$$

Доказательство:

1)
$$\begin{aligned}
&D[X]=M[(X-M[X])^2]=M[X^2-2M[X]X+(M[X])^2=\\
&=M[X^2-2M[X]*M[X]+M(M[X])^2=\\
&=M[X^2]-2(M[X])^2+(M[X])^2=M[X^2]-(M[X])^2
\end{aligned}$$

2) $$D[C]=M[C^2]-(M[C]^2=C^2-C^2=0$$

3)
$$\begin{aligned}
&D[CX]=M[(CX)^2]-(M[CX])^2=\\
&=M[C^2X^2]-(CM[X])^2=C^2(M[X^2]-(M[X]^2)=CD[X]
\end{aligned}$$

4)
$$\begin{aligned}
&D[X+Y]=M[(X+Y)^2]-(M[X+Y])^2=\\
&=M[X^2-2XY+Y^2]-(M[X]+M[Y])^2=\\
&=M[X^2]-2M[XY]+M[Y^2]-(M[X])^2-2M[X]M[Y]-(M[Y])^2=\\
&=M[X^2]-(M[X])^2+M[Y^2]-(M[Y])^2=D[X]+D[Y]
\end{aligned}$$

5) Вытекает из формулы (14.7) и того, что математическое ожидание неотрицательной случайной величины не отрицательно. Ч.т.д

Замечание 14.3

Непрерывной случайной величины X характеризует рассеяние случайной величины вокруг её математического ожидания и определяется как математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины X от своего математического ожидания M(X):

$$D(X) = M[X - M(X)]^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[X - M(X)\right]^2 \cdot f(x)dx$$

Все свойства числовых характеристик непрерывной случайной величины совпадают со свойствами соответствующих числовых характеристик дискретной случайной величины. Получим формулу для вычисления дисперсии непрерывной случайной величины:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - M(X)]^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} [x^2 - 2xM(X) + M^2(X)] f(x)dx =$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - 2M(X)\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx + M^2(X)\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx =$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - 2M(X)\, M(X) + M^2(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - M^2(X)$$

Пример 14.4

Непрерывная случайная величина X задана дифференциальной функцией распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } \ x<0. \\ x, \text{ если } \ 0 < x \le 1 \\ 0, \text{ если } \ x>1. \end{cases}$$

Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X

Решение:

Математическое ожидание

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} x0dx + \int_{0}^{1} xxdx + \int_{1}^{+\infty} x0dx = 0 + \int_{0}^{1} x^2 dx + 0 = \frac{1}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Найдем дисперсию

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - \left[M(x)\right]^2 =$$
$$= \int_{-\infty}^{0} x^2 0dx + \int_{0}^{1} x^2 xdx + \int_{1}^{+\infty} x^2 0dx - (\frac{1}{3})^2 = \frac{1}{4}x^4\Big|_0^1 - \frac{1}{9} = \frac{1}{4} - \frac{1}{9} = \frac{5}{36}$$

Среднеквадратическое отклонение

Определение 14.4

Среднеквадратическое отклонение непрерывной случайной величины определяется формулой:

$$б(x) = \sqrt{D(x)}\,.$$

$\delta_x = \delta[X] = \sqrt{D[X]}$ - среднеквадратическое отклонение случайной величины X

Замечание 14.4

$$\delta[CX] = |C|\delta[X]$$

Пример 14.5

Случайные величины X_1 и X_2 независимы. Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины

$$Z = 3X_1 - 2X_2 + 5,$$

если $D(X_1) = 1$ и $D(X_2) = 4$.

Воспользовавшись свойствами дисперсии, имеем:

$D(Z) = D(3X_1 - 2X_2 + 5) = D(3X_1) + D[X_1(-2)] + D(5) = 9D(X_1) + 4D(X_2) = 9+16=25,$

$\sigma(Z) = \sqrt{D(Z)}$ =5.

Мода и медиана

Определение 14.5

Мода- наибольшее вероятное значение случайной величины.

Замечание 14.5

Мода непрерывной случайной величины с плотностью f(x) – это значение X, соответствующее максимальному значению величины плотности распределения.

Определение 14.6

Медиана-Пусть X – случайная величина, тогда X_n называется медианой, если справедлива формула:

$$P\{X < Xn\} = P\{X > Xn\}$$

Производящие функции и их свойства.

Пусть X – дискретная случайная величина принимает целые значения 0,1,2,…,n,…

$$P\{X = n\} = Pn \quad n = 0,1,...$$

Определение 14.7

Производящей функцией случайной величины X называется функция, определяемая формулой:

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} P_n X^n, \ |x| \le 1, \ \sum_{n=0}^{+\infty} P_n = 1$$

Дифференцируема бесконечное число раз.

$$\varphi'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} np_n x^{n-1}$$

$$\varphi''(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) p_n x^{n-2}$$

$$x = 1 \quad \varphi'(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} np_n = M[x] \quad M[x] = \varphi'(1)$$

$$x = 1 \quad \varphi''(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) p_n = \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 p_n - \sum_{n=0}^{+\infty} np_n = M[x^2] - M[x]$$

$$D[x] = \varphi''(1) + \varphi'(1) - (\varphi'(1))^2$$

Контрольные вопросы

1. Дайте определение математического ожидания.
2. Перечислите свойства математического ожидания.
3. Приведите формулу для вычисления математического ожидания дискретной случайной величины и непрерывной случайной величины.
4. Дайте определение дисперсии.
5. Перечислите свойства дисперсии.
6. Дайте определение моды, медианы и среднеквадратического отклонения.

Основные виды дискретных распределений

Биномиальное распределение и его числовые характеристики. (Распределение Бернулли)

Связано с понятием схемы независимых испытаний Бернулли:

$$p\{x=1\}=p$$

$$p\{x=0\}=q=1-p$$

$n\in N$ Y = числу успехов в n независимых испытаниях Бернулли:

$$m\in[0,n]$$

$$P\{y=m\}-?$$

$$P\{y=m\}=C_n^m p^m q^{n-m} \qquad (15.1)$$

- искомый *биномиальный закон распределения*.

Определим числовые характеристики биномиального распределения. Число k появлений события А в серии из n независимых испытаний можно рассматривать как дискретную случайную величину, принимающую возможные значения из интервала $0\le k\le n$. Вероятности, с которыми могут появиться эти возможные значения, подсчитываются по формуле (15.1).

Замечание 15.1

Данное распределение называют *биномиальным*, так как формула для вероятности есть формула общего члена в формуле бинома Ньютона

$$(p+q)^n$$

Рассмотрим случайную величину X - число появлений события А в одном испытании. Данная случайная величина принимает два возможных значения: 0 - если события А не произошло с вероятностью q = I-p и 1 - если событие А с вероятностью p появилось. Найдём ряд распределения случайной величины X:

X	0	1
P	q	p

Найдём математическое ожидание:

$$M(X) = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p$$

Дисперсия найдется по формуле $D(X)=M(X^2)-M^2(X)$. Закон распределения величины X^2 совпадает с законом распределения X и, следовательно:

$$D(X) = M(X^2)-M^2(X) = p-p^2 = p(1-p) = pq.$$

Случайную величину k можно рассматривать как сумму независимых одинаково распределенных величин X_1 , X_2 ,… Xn , т.е. k $=X_1 + X_2 +\ldots +Xn$. Число таких слагаемых равно числу испытаний. По свойствам математического ожидания и дисперсии имеем:

$$M(X_1 + X_2+\ldots Xn) = M (X_1) + M(X_2) +\ldots+M(Xn) = np,$$

$$D(X_1 + X_2 +\ldots +Xn) = D (X_1) + D(X_2) +\ldots+D(Xn) = npq.$$

Теперь найдём математическое ожидание и дисперсию с помощью производящей функции:

$$\varphi(x) = \sum_{m=0}^{n} C_n^m p^m q^{n-m} x^m = \sum_{m=0}^{n} C_n^m (px)^m q^{n-m} = (px+q)^n$$

$$\varphi(x) = (px+q)^n$$

$$\varphi'(x) = n(px+q)^{n-1} p$$

$$\varphi''(x) = n(n-1)(px+q)^{n-2} p^2$$

$$\varphi'(1) = n(p+q)^{n-1} p = np \qquad (15.2)$$

$$\varphi''(1) = n(n-1)(p+q)^{n-2} p^2 = n(n-1)p^2 \qquad (15.3)$$

$$M[y] = \varphi'(1) = np \qquad (15.4)$$

$$D[y] = \varphi''(1) + \varphi'(1) - (\varphi'(1))^2 = n(n-1)(p+q)^{n-2} p^2 + np - (np)^2 =$$
$$= n^2 p^2 - np^2 + np - n^2 p^2 = np(1-p) = npq$$

$$D[Y] = npq \qquad (15.5)$$

$$\delta_y = \sqrt{npq} \qquad (15.6)$$

Искомые числовые характеристики биномиального распределения задаются формулами с (15.4-15.6).

Распределение Пуассона

Связь биномиального распределения.

X – случайная величина принимает значения : 0,1,…

Тогда говорят, что величина X имеет *распределение Пуассона* с параметром $x > 0$, если справедлива формула:

$$P\{X = m\} = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} \quad m = 0,1,... \qquad (15.7)$$

Найдём математическое ожидание и дисперсию с помощью производящей функции:

$$\varphi(x) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} x^m = e^{-\lambda} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(\lambda x)^m}{m!} = e^{-\lambda} e^{2x} = e^{\lambda(x-1)}$$

$$\varphi'(x) = \lambda e^{\lambda(x-1)}$$

$$\varphi''(x) = \lambda' e^{\lambda(x-1)}$$

$$M[x] = \varphi'(1) - \lambda e^0 = \lambda \qquad M[x] = \lambda \qquad (15.8)$$

$$D[x] = \varphi''(1) + \varphi'(1) - (\varphi'(1))^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda \qquad D[x] = \lambda \qquad (15.9)$$

Теория массового обслуживания

Определение 15.1

Поток событий - совокупность событий, который наступает с определенной регулярностью.

Определение 15.2

Поток П называется *стационарным*, если его поведение в различные моменты времени подчиняются одним и тем же законам.

Определение 15.3

Поток называется *ординарным*, если вероятность наступления двух и более событий одновременно пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью наступления одного события.

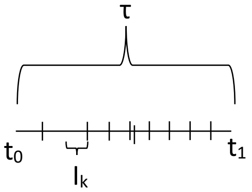
Определение 15.4

Говорят, что поток П является *потоком без последствия* или обладает свойством отсутствия последствия, если поведение потока в любой момент времени не зависит от его поведения в предыдущие моменты времени.

Определение 15.5

Поток, обладающий свойствами стационарности, ординарности и отсутствия последствия называется *Пуассоновским потоком* или простейшим потоком.

Пусть есть простейший поток, тогда среднее число событий потока на единичном временном интервале называется его интенсивностью (λ).



$[t_0, t_1]$, $\tau = t_1 - t_0$ - промежуток времени.

$\Delta t = \dfrac{\tau}{n}$, $n \gg 1$

X - число событий потока П на этом промежутке. $P(X = m) = ?$

На каждом отрезке I_k происходит не более одного события. I_k, k = 0, 1,.., n-1.

$$P(A) = \lambda \cdot \Delta t = \frac{\lambda \tau}{n}$$

$$P(X = m) = C_n^m (\frac{\lambda \tau}{n})^m \cdot (1 - \frac{\lambda \tau}{n})^{n-m} \qquad (15.10)$$

$$P(X = m) = \frac{(\lambda \tau)^m}{m!} \cdot e^{-\lambda \tau} \qquad (15.11)$$

Геометрическое распределение

Определение 15.6

Случайная величина X, принимающая значения 0, 1, 2,.. имеет *геометрическое распределение* с параметрами p, q, ($p + q = 1$, p>0, q>0) если справедлива формула:

$$P(X = m) = p^m q \qquad (15.12)$$

$$\sum_{m=0}^{+\infty} p^m q = q \frac{1}{1-p} = \frac{q}{q} = 1$$

Найдём математическое ожидание и дисперсию с помощью производящей функции:

$$\varphi(x) = \sum_{m=0}^{+\infty} p^m q x^m = q \sum_{m=0}^{+\infty} (px)^m = \frac{q}{1-px}$$

$$\varphi'(x) = \frac{pq}{(1-px)^2}, \qquad \varphi''(x) = \frac{p^2 q}{(1-px)^2}$$

$$\varphi'(1) = \frac{pq}{q^2} = \frac{p}{q}, \qquad \varphi''(2) = \frac{2p^2 q}{(2-p)^3} = \frac{\varphi^2 \varphi}{q^2} = \frac{2p^2}{q^2}$$

$$M[X] = \varphi'(1) = \frac{p}{q}, \quad D[X] = 2\frac{p^2}{q'} + \frac{p}{q} - \frac{p^2}{q^2} = \frac{p^2}{q'} + \frac{p}{q}, \quad D[X] = \frac{p^2}{q'} + \frac{p}{q}$$

Пример 15.1

Из орудия производится стрельба по цели до первого попадания. Вероятность попадания в цель р = 0,6. Составить закон распределения случайной величины - числа произведенных выстрелов.

Число выстрелов есть счетная дискретная величина. Вероятность попадания при k - ом выстреле есть $P(X=k) = 0{,}4^{k-1} \cdot 0{,}6$, а закон распределения имеет вид

k	1	2	…	k	…
P	0,6	0,24	…	$0{,}4^{k-1}0{,}6$	…

Контроль: $\Sigma P = \dfrac{0{,}6}{1-0{,}4} = 1$ (как сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии).

Гипергеометрическое распределение

Пусть имеется партия из N деталей, среди которых M деталей помечены (M<N). Из партии случайно отбирают n деталей (каждая деталь имеет равную вероятность быть отобранной). Число m помеченных деталей среди n отобранных будет случайной величиной, принимающей дискретные значения, начиная с 0.

Вероятность того, что среди n отобранных деталей содержится m помеченных, определяется формулой

$$P(X = m) = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n} \qquad (15.12)$$

Определение 15.7

Распределение вероятностей, определяющееся этой формулой, называется гипергеометрическим.

Пример 15.2

В партии из 10 деталей 8 стандартных. Наудачу отобраны две детали. Составить закон распределения числа стандартных деталей среди отобранных.

Случайная величина имеет следующие возможные значения $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=2$. Вероятности этих значений определяются гипергеометрическим распределением

$$P(X=0)=\frac{C_8^0\cdot C_2^2}{C_{10}^2}=\frac{1\cdot 1}{\frac{10\cdot 9}{2}}=\frac{1}{45}$$

$$P(X=1)=\frac{C_8^1\cdot C_2^1}{C_{10}^2}=\frac{8\cdot 2}{45}=\frac{16}{45}$$

$$P(X=2)=\frac{C_8^2\cdot C_2^0}{C_{10}^2}=\frac{\frac{8\cdot 7}{2}\cdot 1}{45}=\frac{28}{45}.$$

Контрольные вопросы

1. Дайте определение биномиального распределения и приведите его числовые характеристики.
2. Дайте определение распределения Пуассона и приведите его числовые характеристики.
3. Дайте определение геометрического распределения и приведите его числовые характеристики.
4. Дайте определение гипергеометрического распределения.

Некоторые законы распределения непрерывной случайной величины

Равномерное распределение

Со случайной величиной, имеющей равномерное распределение, мы часто встречаемся в измерительной практике: при взвешивании ошибка округления до ближайшего целого деления является случайной величиной X, которая может принимать с постоянной плотностью вероятности любое значение между двумя соседними целыми делениями.

Определение 16.1

X – непрерывная случайная величина равномерно распределена на [a, b] или имеет равномерное распределение на [a, b], если ее плотность распределения задается формулой:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, x\in[a,b]\\ 0, x\in[a,b]\end{cases} \qquad (16.1)$$

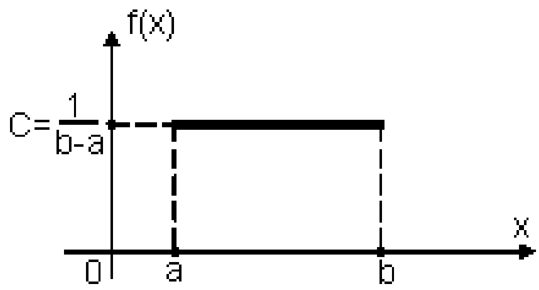


Рисунок 16.1 Плотность распределения равномерного распределения

Найдём интегральную функцию распределения F (x) на отрезке [*а;в*]

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx=\int_{a}^{x}\frac{1}{в-a}dx=\frac{1}{в-a}x\Big|_{a}^{x}=\frac{x-a}{в-a},$$

при x<a, F (x)=0, а при x>в F (x)=1.

$$F(x)=\begin{cases} 0,\ x<a \\ \dfrac{x-a}{b-a},\ a\le x\le b \\ 1,\ x>b \end{cases}$$

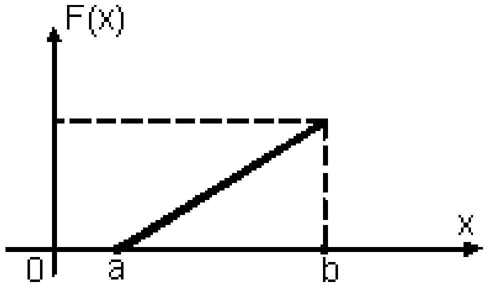


Рисунок 16.2 Функция распределения равномерного распределения

Найдём математическое ожидание и дисперсию для равномерного распределения.

$$M[X]=\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(x)dx=\int_{0}^{b} x\cdot\frac{1}{b-a}\cdot\int_{a}^{b} xdx=\frac{1}{b-a}\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_a^b=\frac{b+a}{2}$$

$$M[X]=\frac{a+b}{2} \qquad (16.2)$$

$$D[X]=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-m_x)^2\cdot f(x)dx=\int_{a}^{b}(x-m_x)^2\cdot\frac{1}{b-a}dx=\frac{1}{b-a}\cdot\frac{(x-m_x)^3}{3}\Bigg|_a^b$$

$$==\frac{1}{b-a}\cdot\frac{(x-\frac{a+b}{2})^3}{3}\Bigg|_a^b=\frac{1}{3(b-a)}(b-\frac{a+b}{2})^3-(b-\frac{a+b}{2})^3)=$$

$$=\frac{1}{3(b-a)}\cdot 2\cdot(\frac{b-a}{2})^3=\frac{(b-a)^3}{12(b-a)}=\frac{(b-a)^2}{12}$$

$$D[X]=\frac{(b-a)^2}{12} \qquad (16.3)$$

Пример 16.1

Автобус некоторого маршрута движется равномерно с интервалом 5 минут. Найти вероятность того, что равномерно распределенная случайная величина X - время ожидания автобуса составляет менее трех минут.

Решение

Случайная величина X, равномерно распределена на отрезке [0,5], поэтому плотность на этом отрезке запишется $f(x) = \frac{1}{5-0} = \frac{1}{5}$. Для того, чтобы время ожидания не превысило трех минут, пассажир должен появится на остановке в интервале от двух до пяти минут после ухода предыдущего автобуса, т.е. случайная величина X должна попасть в интервал [2,5]. Поэтому искомая вероятность равна:

$$P(2 < X < 5) = \int_2^5 \frac{1}{5} dx = \frac{1}{5} x \Big|_2^5 = \frac{1}{5} x(5-2) = \frac{3}{5}.$$

Нормальное распределение

Определение 16.2

Непрерывная случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами m, δ, если ее плотность распределения задается формулой:

$$f(x) = \frac{1}{\delta\sqrt{2}} \cdot e^{\frac{-(x-m)^2}{2\delta^2}} \qquad (16.4)$$

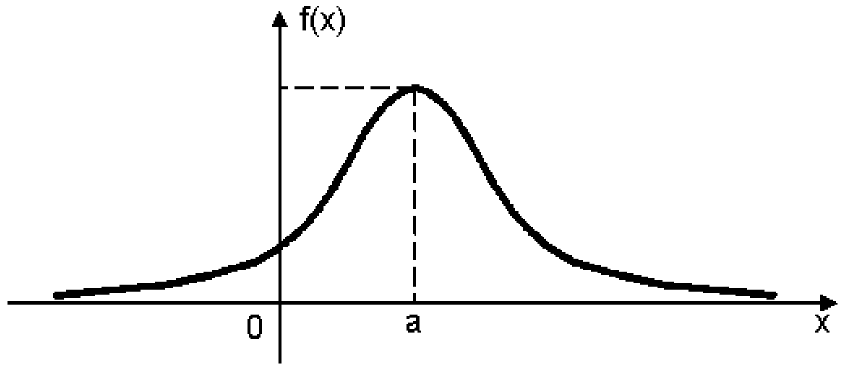


Рисунок 16.3 Плотность распределения нормального распределения

Найдём математическое ожидание и дисперсию:

$$M[X]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{\delta\sqrt{2}}\cdot e^{\frac{-(x-m)^2}{2\delta^2}}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{m+\delta\sqrt{2}dy}{\delta\sqrt{\pi}}\cdot e^{-y}\delta\sqrt{2}dy=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(m+\delta\sqrt{2})\cdot e^{-y^2}dy=\frac{m}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-y^2}dy=m$$

$$M[X]=m \qquad (16.5)$$

$$D[X]=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-m_x)^2\cdot f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x-m_x)^2}{\delta\sqrt{2}}\cdot e^{\frac{-(x-m)^2}{2\delta^2}}dx=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}2\delta^2y^2\frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-y}\delta\sqrt{2}dy=\frac{2\delta^2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}y^2e^{-y^2}dy=\frac{2\delta^2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}y^2e^{-y^2}dx=$$

$$=\frac{2\delta^2}{\sqrt{\pi}}(-y\frac{1}{2}e^{-y^2}\Big|_{-\infty}^{+\infty}+\frac{1}{2}\int_{=\infty}^{+\infty}e^{-y^2}dy)=\frac{2\delta^2}{2}=\delta^2$$

$$D[X]=\delta^2 \qquad (16.6)$$

$\delta=\sqrt{D[X]}$ - среднеквадратичное отклонение.

Случайная величина X распределена по нормальному закону.

Замечание 16.1

Из функций (16.4) – (16.5) следует, что нормальный закон распределения однозначно определяется своим математическим ожиданием и дисперсией.

Функция Лапласа и ее связь с нормальным распределением

Пусть случайная величина X распределена по нормальному закону (16.2)

[a, b], $P\{X\in[a,b]\}=?$

$$P\{X\in[a,b]\}=\int_a^b f(x)dx=\int_a^b\frac{1}{\delta\sqrt{2}}\cdot e^{\frac{-(x-m)^2}{2\delta^2}}=\int_{\frac{a-m}{\delta}}^{\frac{b-m}{\delta}}\frac{1}{\delta\sqrt{2}}\cdot e^{\frac{-y^2}{2}}\delta dy=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\frac{a-m}{\delta}}^{\frac{b-m}{\delta}}e^{\frac{-y^2}{2}}dy$$

$$P\{X\in[a,b]\}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\frac{a-m}{\delta}}^{\frac{b-m}{\delta}}e^{\frac{-y^2}{2}}dy,$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int\limits_{\frac{a-m}{\delta}}^{\frac{b-m}{\delta}} e^{\frac{-y^2}{2}} dy \qquad (16.7)$$

- интеграл вероятности.

$$P\{X \in [a,b]\} = \Phi(\frac{b-m}{\delta}) - \Phi(\frac{a-m}{\delta}) \qquad (16.8)$$

По формуле 16.8 можно оценить вероятность того, что случайная величина X, распределенная по нормальному закону, отклонится от своего математического ожидания на величину, меньшую заданного положительного σ

$$P(|x-a| < \delta) = p(-\delta < x-a < \delta) = p(a-\delta < x < a+\delta) =$$
$$= \Phi(\frac{a+\delta-a}{\sigma}) - \Phi(\frac{a-\delta-a}{\sigma}) = \Phi(\frac{\delta}{\sigma}) - \Phi(-\frac{\delta}{\sigma}) = 2\Phi(\frac{\delta}{\sigma}),$$

$$P(|x-a| < \delta) = 2\Phi(\frac{\delta}{\sigma}).$$

Правило трех сигм

Нормально распределенная случайная величина практически не принимает значений вне интервала $(a-3\sigma, a+3\sigma)$*:*

$$P(|x-a| < 3\sigma) = 2\Phi(\frac{3б}{\sigma}) = 2\Phi(3) = 0{,}9973.$$

Пример 16.2

Случайная величина X распределена нормально с математическим ожиданием M(X)=6 и средним квадратическим отклонением σ(X)=2. Найти вероятность того, что в результате испытания величина X примет значения из интервала (4,8).

Решение:

$$P(4 < x < 8) = \Phi(\frac{8-6}{2}) - \Phi(\frac{4-6}{2}) = \Phi(1) - \Phi(-1) = \Phi(1) + \Phi(1) =$$
$$= 2\Phi(1) = 2 \cdot 0{,}3413 = 0{,}6826.$$

Пример 16.3

Случайная величина распределена нормально. Среднее квадратическое отклонение σ=0,4. Найти вероятность того, что отклонение случайной величины от ее математического ожидания по абсолютной величине будет меньше 0,3.

Решение:

$$P(|x-a| < 0{,}3) = 2\Phi(\frac{0{,}3}{0{,}4}) = 2\Phi(0{,}75) = 2 \cdot 0{,}2734 = 0{,}5468.$$

Экспоненциальное распределение

В теории массового обслуживания, часто встречаются случайные величины, имеющие так называемые экспоненциальное или показательное распределение.

Определение 16.3

Непрерывная случайная величина X распределена по *экспоненциальному закону*, если её плотность вероятностей имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

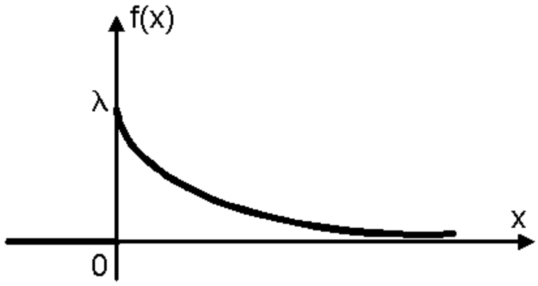


Рисунок 16.4 Плотность распределения экспоненциального распределения

Найдём интегральную функцию распределения F(x)

$$F(X)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx=\int_{0}^{x}\lambda e^{-\lambda x}dx=-e^{-\lambda x}\Big|_{0}^{x}=1-e^{-\lambda x} \quad \text{при } x\geq 0$$

$$F(x)=\begin{cases} 0,\ если\ x<0 \\ 1-e^{-\lambda x},\ если\ x\geq 0 \end{cases}$$

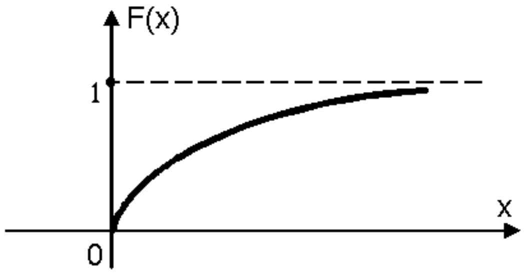


Рисунок 16.4 Функция распределения экспоненциального распределения

Найдём математическое ожидание и дисперсию

$$M(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(x)dx=\int_{0}^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x}dx=\left\{\begin{matrix} u=x\Rightarrow du=dx \\ \lambda e^{-\lambda x}dx=dv\Rightarrow v=-e^{-\lambda x}\end{matrix}\right\}=$$

$$=xe^{-\lambda x}\Big|_{0}^{+\infty}+\int_{0}^{+\infty} e^{-\lambda x}dx=(-xe^{-\lambda x}-\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda})\Big|_{0}^{+\infty}=$$

$$=-\lim_{x\to+\infty}(\frac{x}{e^{\lambda x}}+\frac{1}{\lambda e^{\lambda x}})+0\cdot e^{0}+\frac{e^{0}}{\lambda}=\frac{1}{\lambda}.$$

$$D(X)=\frac{1}{\lambda^{2}}.$$

Откуда $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{\frac{1}{\lambda^{2}}}=\frac{1}{\lambda}$, т.е. для экспоненциального распределения

$$M(X)=б(X)=\frac{1}{\lambda}.$$

Пример 16.4

Случайная величина X - время работы радиолампы имеет показательное распределение. Определить вероятность того, что время работы лампы будет не меньше 600 часов, если среднее время работы 400 часов.

Решение:

По условию задачи, математическое ожидание случайной величины X равно 400 часам, следовательно $\lambda = \frac{1}{400}$. Искомая вероятность

$$P(x \geq 600) = 1 - P(T < 600) = 1 - F(600) = 1 - (1 - e^{-\frac{1}{400}\cdot 600}) = e^{-\frac{600}{400}} = e^{-1,5} \approx 0,2231.$$

Контрольные вопросы

1. Дайте определение равномерного распределения.
2. Найдите основные числовые характеристики равномерного распределения.
3. Дайте определение нормального распределения.
4. Найдите основные числовые характеристики нормального распределения.
5. Дайте определение функции Лапласа.
6. В чём состоит правило трёх сигм.
7. Дайте определение экспоненциального распределения.
8. Найдите основные числовые характеристики экспоненциального распределения.

Моменты случайной величины

Замечание 17.1

Обобщением основных числовых характеристик случайных величин является понятие *моментов случайной величины*.

Замечание 17.2

Понятие "момент" заимствовано из механики, где оно применяется для описания распределения масс.

Замечание 17.3

В теории вероятностей различают моменты двух видов: начальные и центральные.

Определение 17.1

Начальным моментом k-го порядка случайной величины X называется математическое ожидание k-ой степени случайной величины X:

$$\alpha_k = M(X^k)$$

- для дискретной случайной величины начальный момент выражается суммой

$$\alpha_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k p_i,$$

- для непрерывной - интегралом

$$\alpha_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)dx$$

Замечание 17.4

Из начальных моментов случайной величины особое значение имеет момент первого порядка - математическое ожидание M(X).

Начальные моменты высших порядков используются главным образом для вычисления центральных моментов.

Определение 17.3

Центральным моментом k-го порядка случайной величины X называют математическое ожидание k-ой степени отклонения [x- M(x)]:

$$\mu_k = M[x - M(X)]^2$$

- для дискретной случайной величины центральный момент выражается рядом

$$\mu_k = \sum_i (x_i - M(X))^k p_i ,$$

- для непрерывной – несобственным интегралом

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{+\infty} (X - M(x))^k f(x)dx.$$

Замечание 17.5

Среди центральных моментов случайной величины особое значение имеет центральный момент второго порядка - дисперсия $D(X)=M(X-M(X))^2$.

Кроме него в теории вероятностей часто используются центральные моменты третьего и четвертого порядков.

Третий центральный момент служит характеристикой ассиметрии ("скошенности") распределения.

Определение 17.4

Отношения μ_3 к среднему квадратическому отклонению в третьей степени называют *коэффициентом ассиметрии* распределения случайной величины X

$$a_x = \frac{\mu_3}{\sigma_x^3}$$

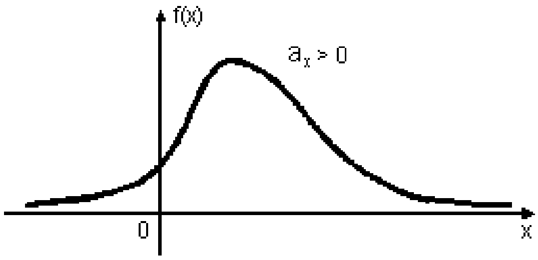


Рисунок 17.1 Кривая распределения с положительной ассиметрией

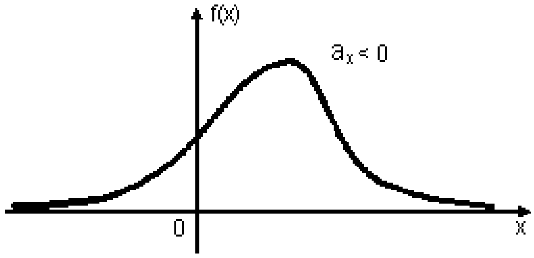


Рисунок 17.2 Кривая распределения с отрицательной ассиметрией

Определение 17.5

Эксцесс - величина, определяемой формулой

$$C_x = \frac{\mu_4}{\sigma_x^4} - 3$$

Замечание 17.6

Четвертый центральный момент C_X служит для характеристики островершинности или плосковершинности распределения случайной величины X.

Замечание 17.7

Кривая нормального распределения, для которой $C_x = 0$, т.е. $\frac{\mu_4}{\sigma_x^4} = 3$ принимается за эталон. Кривые более островершинные имеют положительный эксцесс, а более плосковершинные - отрицательный (рис.17.3):

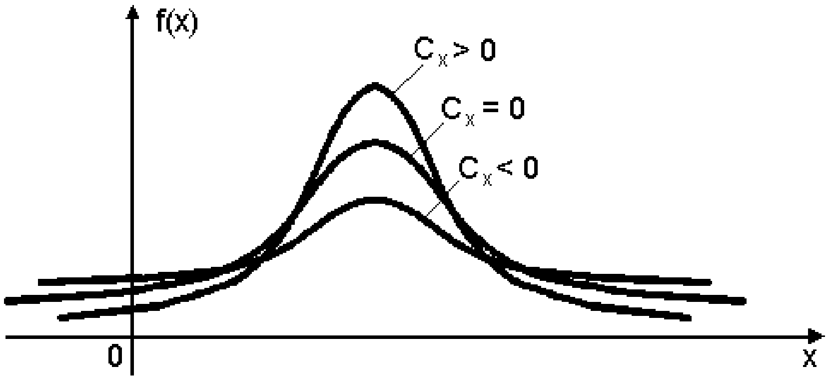


Рис.17.3

Замечание 17.8

Иногда на практике применяются так называемые абсолютные моменты. *Абсолютный начальный момент* определяется формулой

$$\beta_к = M\,[\,|X|^к\,],$$

а *абсолютный центральный момент* - формулой

$$\nu_к = M\,(\,|X - M\,(x)\,|^к).$$

Контрольные вопросы

1. Дайте определение начального момента.
2. Что представляет собой начальный момент первого порядка?
3. Дайте определение центрального момента.
4. Что представляет собой центральный момент второго порядка?
5. Дайте определение центрального момента третьего порядка.
6. Дайте определение центрального момента четвертого порядка.
7. Приведите формулы для вычисления абсолютного начального момента и абсолютного центрального момента.

Системы случайных величин и их свойства

Рассмотрим $X = (x_1, x_2, .., x_n)$ - случайный n-мерный вектор. Компоненты вектора – случайные величины.

Подробнее остановимся на случае, когда n=2, а X и Y- компоненты вектора.

Система двух случайных величин. Функция распределения и ее свойства

Определение 18.1

Функцией распределения системы случайных величин или *совместной функцией распределения* является функция, задаваемая формулой:

$$F = (x_1, x_2, .., x_n) = P\{X_1 < x_1, X_2 < x_2, .., X_n < x_n\} \qquad (18.1)$$

Замечание 18.1

Для случая n=2, X, Y, функция распределения имеет вид:

$$F = (x, y) = P\{X < x, Y < y\} \qquad (18.2)$$

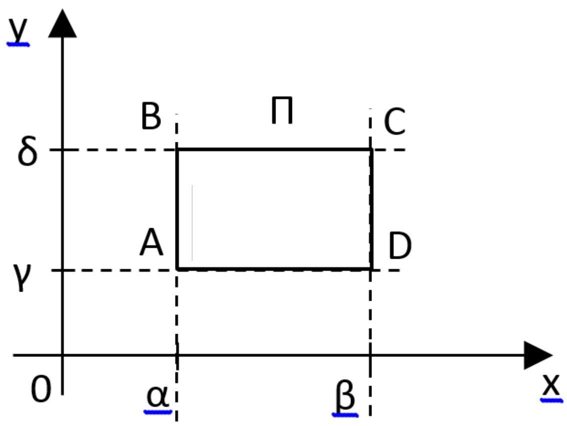


Рисунок 18.1

$$П = \{(x, y)\alpha \le x \le \beta, \gamma \le y \le \delta\}$$

Свойство 1

Пусть F (x, y) – функция распределения, пара случайных величин X, Y, тогда справедлива формула:

$$P=\{(x,y)\in \varPi\}=F(\beta,\delta)-F(\beta,\gamma)-F(\alpha,\delta)+F(\alpha,\gamma) \qquad (18.3)$$

<u>*Доказательство*</u>

Исходя из геометрических изображений $\angle A, \angle B, \angle C, \angle D$ обозначают внутренности бесконечных углов с вершинами в соответствующих точках и лучами, выходящими из точек в отрицательном направлении. Лучи уходят в минус бесконечность.

$$F(\beta,\delta)=P\{(x,y)\in \angle C\}$$

$$F(\alpha,\delta)=P\{(x,y)\in \angle B\}$$

$$F(\beta,\gamma)=P\{(x,y)\in \angle D\}$$

$$F(\alpha,\delta)=P\{(x,y)\in \angle A\}$$

Прямоугольник П может быть получен их угла С удалением из него угла D и B, но при этом общий для них угол A будет удален 2 раза. Поэтому его нужно добавить. Из этого рассуждения и формулы суммы вероятности не совместных случайных событий вытекает из формулы (18.3).

$$\begin{aligned} F(\beta,\delta)=P\{(x,y)\in \angle C\}=P\{(x,y)\in \angle B\}+P\{(x,y)\in \varPi\}+\\ +P\{(x,y)\in \angle D\}-P\{(x,y)\in \angle A\}\end{aligned}$$

(18.4)

Откуда и вытекает формула (3):

$$\lim_{x\to+\infty}F(x,y)=F(+\infty,y),\quad \lim_{x\to-\infty}F(x,y)=F(-\infty,y)$$

$$\lim_{x\to+\infty}F(x,y)=F(x,+\infty),\quad \lim_{x\to-\infty}F(x,y)=F(x,-\infty)$$

Свойство 2

Справедливы формулы:

$$F(-\infty,y)=F(x,-\infty)=0$$

<u>*Доказательство*</u>

$F(-\infty, y) = P\{X < -\infty, Y < y\} = 0$, $X < -\infty$ - невозможное событие.

Вероятность невозможного события равна нулю. Для x аналогично.

Свойство 3

Пусть X, Y – система двух случайных величин.

F (x, y) – совместная функция распределения.

$F_1(x)$, $F_2(y)$ – функции распределения случайных величин X, Y по отдельности. Тогда справедливы формулы:

$$\lim_{x \to +\infty} F(x, y) = F(+\infty, y) = F_2(y) \qquad (18.5)$$

$$\lim_{x \to +\infty} F(x, y) = F(x, +\infty) = F_1(x) \qquad (18.6)$$

Зная совместную функцию распределения можно определить функцию распределения X, Y по отдельности.

Доказательство

$$F(x, +\infty) = P\{X < x, Y < +\infty\} = P\{X < x\} = F_1(x)$$

Свойство 4

Совместная функция распределения есть неубывающая по каждой из переменных функций, причем справедлива формула:

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ y \to +\infty}} F(x, y) = F(-\infty, +\infty) = 1 \qquad (18.7)$$

Доказательство

$x_1 < x_2$, $F(x_2, y) = F(x_1, y) + P\{x_1 \le X \le x_2, Y < y\} = F_1(x) = F(x, y)$

$$\lim_{x \to +\infty} F_2(y) = 1$$

Матрица распределения двух случайных величин и ее свойства

Пусть даны два закона распределения двух случайных величин:

X	X_1	X_2	…	X_n
P(X)	P_1	P_2	…	P_n

Y	Y_1	Y_2	…	Y_n
Q(Y)	Q_1	Q_2	…	Q_n

Определение 18.2

Матрицей распределения системы двух случайных дискретных величин X, Y называется прямоугольником m на m матрица

$$P=\{P_{ij}\}, \begin{matrix} 1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m \end{matrix}, \; P_{ij} = P\{X = x_i, Y = y_j\} \tag{18.8}$$

Свойство 1

Справедливы формулы:

$$\sum_{i=1}^{n} p_{ij} = q_j, 1 \le j \le m \tag{18.9}$$

$$\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = p_i, 1 \le i \le n \tag{18.10}$$

Доказательство:

$$\sum_{i=1}^{n} p_{ij} = \sum_{j=1}^{n} P\{X = x_i, Y = y_j\} = P\{\sum_{i=1}^{n}(X = x_i), Y = y_j\} = P\{Y = y_j\} = q_j$$

Свойство 2

Справедлива формула:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1 \tag{18.11}$$

Доказательство:

$$\sum_{i=1}^{n} p_{ij} = q_j$$

$$\sum_{j=1}^{m} q_j = 1$$

Совместная плотность распределения двух случайных величин

Определение 18.3

(X, Y) имеет непрерывное совместное распределение, если совместная функция распределения $F(X, Y)$ непрерывна и имеет при $X, Y \in R^2$ кусочно-непрерывную смешанную частную производную второго порядка: $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x, y)$.

Определение 18.4

Если (X, Y) имеет непрерывное распределение совместной функции распределения $F(X, Y)$, то функция определяется формулой $f(x, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$ и называется *совместной плотностью распределения* парой *X, У.*

Определение 18.5

$F(X, Y)$ имеет непрерывную производную $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x, y)$ и называется *непрерывной плотностью распределения*.

Определение 18.6

Плотность распределения – это приблизительное отношение вероятности попадания пары (X, Y) в прямоугольник с вершинами x, y делить на площадь этого прямоугольника.

Замечание 18.2

Совместную функцию распределения и плотность распределения называют еще интегральной функцией распределения.

Свойства совместной плотности распределения

1. Совместная функция распределения не отрицательная $f(x,y)\geq 0$

Данное свойство вытекает из $F(X,Y)$. $F(X,Y)$ не убывает по двум своим переменным, значит ее вторая смешанная частная производная не отрицательна.

2. Пусть X,Y – непрерывно распределенная система двух случайных величин с плотностью распределения $f(X,Y)$ и $\Pi=\{(x,y)a\leq x\leq b, c\leq y\leq d\}$

Тогда справедлива формула:

$$P\{(x,y)\in \Pi\}=\int_a^b\int_c^d f(x,y)dxdy$$

Доказательство:

$$\begin{aligned}
&P\{(x,y)\in \Pi\}=F(b,d)-F(b,c)-F(a,d)+F(a,c)=\\
&=(F(b,d)-F(b,c))-(F(a,d)-F(a,c))=\\
&=\int_c^d\frac{\partial F}{\partial y}(b,y)dy-\int_c^d\frac{\partial F}{\partial y}(a,y)dy=\int_c^d\left(\frac{\partial F}{\partial y}(b,y)dy-\frac{\partial F}{\partial y}(a,y)\right)dy=\\
&\int_c^d\int_a^b\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}(x,y)dxdy=\int_a^b f(x,y)dxdy
\end{aligned}$$

3. Пусть X,Y – непрерывно распределенная пара случайных величин с функцией распределения $F(X,Y)$ и плотностью распределения $f(X,Y)$. Тогда $\forall X,Y$ справедлива формула:

$$F(X,Y)=\int_{-\infty}^{x} f(z,t)dzdt$$

4. Пусть $f(X,Y)$ - совместная плотность распределения. Справедлива формула:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=1$$

Условные законы распределения. Условная плотность распределения и ее свойства

Теорема 18.1

Пусть X,Y – независимые случайные величины. Тогда справедлива формула:

$$F(X,Y)=F_1(x)F_2(y) \qquad (18.12)$$

Доказательство:

$$F(x,y)=P\{X<x,Y<y\}=P\{X<x,Y<y\} \qquad (18.13)$$

Верно и обратное: Если имеет место формула (18.13), то случайные величины X,Y независимы.

$$F_y(x)P_{Y<y}\{X<x\}, \quad F_x(x)P_{X<x}\{Y<y\}$$

$$F(x,y)=F_y(x)F_2(y)$$

$$F(x,y)=F_x(y)F_1(x)$$

Пусть даны два закона распределения двух дискретных случайных величин:

X:

X	X$_1$	X$_2$	…	X$_n$
P(x)	P$_1$	P$_2$	…	P$_n$

Y

У	У$_1$	У$_2$	…	У$_n$
P(y)	q$_1$	q$_2$	…	q$_n$

Справедливы следующие формулы:

$$P_x(y_i)=\frac{P_{ij}}{p_i} \qquad P_y(x_i)=\frac{P_{ij}}{q_i} \qquad i\le n\le j\le m$$

Замечание 18.3

Зная условные законы распределения и законы распределения каждой из случайных величин, мы можем восстановить совместную матрицу распределения.

<u>Свойство условных законов распределения:</u>

Теорема 18.2

Пусть совокупность чисел $P_{xi}(y_i)$, $P_{yi}(x_i)$ задают условные законы распределения пары X,Y. Тогда справедливы формулы:

$$\sum_{i=1}^{n} P_{yi}(x_i) = 1 \qquad \sum_{i=1}^{n} P_{xi}(y_i) = 1.$$

Пусть X,Y имеет непрерывное совместное распределение с совместной плотностью вероятности $f(x,y)$ и плотностями распределения $f_1(x), f_2(y)$ для X,Y. Тогда условные плотности распределения X,Y выводятся по формулам:

$$f_x(y) = \frac{f(x,y)}{f_1}, \quad f_y(x) = \frac{f(x,y)}{f_2}$$

$$f(x,y) = f_x(y) f_1(x)$$

$$f(x,y) = f_y(y) f_2(x)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_x(y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f_y(x)dx = 1$$

Числовые характеристики систем двух случайных величин коэффициент ковариации и их свойства.

Пусть X,Y – система двух случайных величин, имеющих конечное математическое ожидание. Тогда:

$$\overline{X} = X - M[X], \overline{Y} = Y - M[X], M[\overline{X}] = M[\overline{Y}] = 0$$

Определение 18.7

k-тым начальным моментом пары случайных величин X, Y называется выражение вида:

$$V_k = M[x^s y^n], \quad s+m=k,\ s \geq 0, \quad m \geq 0 \qquad (18.14)$$

Определение 18.8

k-тым центральным моментом пары случайных величин X, Y называется выражение вида:

$$S_k = M[\overline{X^s Y^m}], \quad s+m=k,\ s \geq 0, m \geq 0 \qquad (18.15)$$

Определение 18.9

Ковариацией случайных величин называется выражение:

$$S_{0,1} = M[\overline{X}\overline{Y}] = K[XY] \qquad (18.16)$$

Теорема 18.3

Если случайные величины X, Y независимы, то их ковариация равна нулю.

Доказательство:

$$k[X,Y] = M[\overline{X,Y}] = M[\overline{X}] = M[\overline{Y}] = 0$$

Определение 18.10

Случайные величины X, Y *не коррелированы*, если выполняется равенство:

$$f(x,y) = f(x, f(y)), \quad k[X,Y] = 0 \qquad (18.17)$$

Теорема 18.4

Справедлива формула*:*

$$K[X,Y] = M[X,Y] - M[X] - M[Y] \qquad (18.18)$$

Доказательство:

$$K[X,Y] = M[\overline{X},\overline{Y}] = M[(X - M[Y])(Y - M[X])] =$$
$$= M[X\overline{Y}M[Y] - YM[Y] + M[X]M[Y]] =$$
$$= M[XY] - M[X] \cdot M[Y]$$

Замечание 18.4

Данная формула является родственной для формулы:

$$D[Y] = M[X] - (M[Y])^2, \quad D[X] = k[X,Y]$$

Теорема 18.5

Справедливо неравенство:

$$|K[X,Y]| \le \sqrt{D[X] \cdot D[Y]} \qquad (18.19)$$

Доказательство:

$$Z_1 = \delta_x Y - \delta_y X$$

$$D[Z_1] = M[Z^2{}_1] - (M[Z_1]^2) = M[(\delta_x y - \delta_y x)^2] - M[(\delta_x y - \delta_y x)^2] =$$
$$= M[\delta_x{}^2 Y^2 - 2\delta_x \delta_y XY + \delta_y{}^2 X^2] - \delta_x{}^2 Y^2 + 2\delta_x \delta_y M[X]M[Y] - \delta_y{}^2 X^2 =$$
$$= 2\delta_x \delta_y (M[XY] - M[X]M[Y])$$

$$k[X,Y] = \sqrt{D[X] \cdot D[Y]} \qquad (18.20)$$

$$-k[X,Y] = \sqrt{D[X] \cdot D[Y]} \qquad (18.21)$$

Определение 18.11

Коэффициент корреляции вычисляется по формуле:

$$r_{xy} = \frac{k[X,Y]}{\delta_x \delta_y} \qquad (18.22)$$

Определение 18.12

Ковариационная матрица:

$$A = \begin{pmatrix} D[x] & k[XY] \\ k[XY] & D[Y] \end{pmatrix} \qquad (18.23)$$

Обобщения на системы произвольного числа случайных величин

Определение 18.13

Пусть $X_1, X_2, X_3 ... X_n$ система n-случайных величин. Тогда их *совместной функцией распределения* называется:

$$F(X_1 ... X_n) = P\{X_1 < x_1, X_2 < x_2, ..., X_n < x_n\} \qquad (18.24)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial y_1 ... \partial X_2}(X_1, X_2, X_3 ... X_n) = f(X_1, X_2, X_3 ... X_n) \qquad (18.25)$$

Определение 18.14

Если существует такая функция, то система случайных величин $X_1, X_2, X_3 ... X_n$ называется *непрерывной распределенной*, а функция (18.25) называется *совместной плотностью распределения*.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение системы случайных величин.
2. Дайте определение совместной плотности распределения. Приведите ее свойства.
3. Дайте определение условных законов распределения.
4. Дайте определение ковариации и корреляции.
5. Дайте определение центрального и начального момента.

Двумерное нормальное распределение и его свойства

Определение 19.1

X,Y имеет *совместное нормальное распределение* или распределена по нормальному закону с параметрами $m_x, m_y, \delta_x, \delta_y, r_{xy}$, если ее совместная плотность распределения имеет вид:

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\delta_x\delta_y\sqrt{1-(r_{xy})}}\cdot\exp(-\frac{1}{2\sqrt{1-(r_{xy})^2}})= \\ =(\frac{(X-m_x)^2}{\delta_x{}^2}-\frac{2r_{xy}(X-m_x)(Y-m_y)}{\delta_x\delta_y}+\frac{(Y-m_y)^2}{\delta_y{}^2}) \qquad (19.1)$$

Параметры $m_x, m_y, \delta_x, \delta_y, r_{xy}$ имеют следующий вероятностный смысл:

$m_x = M[X]$ $\quad$ $m_y = M[Y]$ - математические ожидания

$\delta_x = D\sqrt{[X]}$ $\quad$ $\delta_y = D\sqrt{[Y]}$ –среднее квадратичное отклонение X,Y

r_{xy} – коэффициент корреляции случайных величин X,Y

Теорема 19.1

Пара случайных величин X,Y распределена по нормальному закону и независима тогда и только тогда, когда она не коррелирована.

Доказательство:

$$r_{xy}=0,$$

$$f(x,y) = (\frac{1}{2\pi\delta_x\delta_y}) \cdot \exp(\frac{(x-m_x{}^2)}{2\delta_x} - \frac{(x-m_y{}^2)}{2\delta_y}) = ,$$

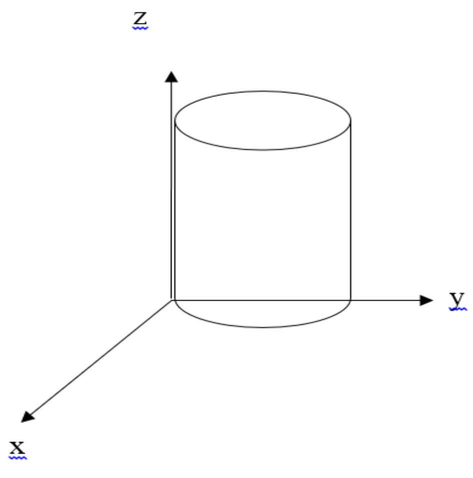
$$= (\frac{1}{\sqrt{2\pi\delta_x}} \cdot e\frac{(x-m_x{}^2)}{2\delta_x} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\delta_y}} \cdot e\frac{(x-m_y{}^2)}{2\delta_y}) = f_1(x)f_2(y)$$

где $f_1(x), f_2(y)$ – плотность нормального распределения Х, У по отдельности.

Эллипсы рассеивания. Закон Релея

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\delta_x\delta_y\sqrt{1-r^2}xy} \cdot \exp\{-\frac{1}{2\sqrt{1-r^2}xy}(\frac{(x-M_x{}^2)}{\delta_x{}^2}) -$$

$$\frac{2rxy(x-M_x)(y-M_y)}{\delta_x\delta_y} + \frac{(y-M_y)}{\delta_y{}^2}\}$$



$$f(x,y) = B_k \qquad (19.2)$$

Определение 19.2

Проекции этих линий уровня будут эллипсы, которые называются *эллипсами рассеивания*.

$$P\{(X,Y)\in B_k\}=?$$

$$r_{xy}=0,\ f(x,y)=\frac{1}{2\pi\delta_x\delta_y}\cdot\exp\{-\frac{(X-M_x)^2}{2\delta_x{}^2}-\frac{(Y-M_y)^2}{2\delta_y{}^2}\}$$

$$B_k(\frac{(X-M_x)^2}{2\delta_x{}^2}+\frac{(Y-M_y)^2}{2\delta_y{}^2}=k^2)\ ,\quad k=const$$

$$P\{(x,y)\in B_k\}=\iint\limits_{B_k}f(x,y)dxdy=\begin{cases}\dfrac{X-M_x}{\delta_x\delta_2}=u;\\[2ex]\dfrac{Y-M_y}{\delta_y\delta_2}=v;\end{cases}$$

$$X=M_x+\delta_x\delta_2u,$$
$$Y=M_y+\delta_y\delta_2v,$$

$$I=2\delta_x\delta_y=\iint\limits_{u^2+v\ S_k{}^2}\frac{1}{2\pi\delta_x\delta_y}\cdot\exp\{-(u^2+v^2)\}2\delta_x\delta_y dudv=$$

$$=\frac{1}{\pi}\iint\limits_{u^2+v\ S_k{}^2}e^{-(u^2+v^2)}dudv=\begin{vmatrix}u=r\cos\varphi\\v=r\sin\varphi\\I=r\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi k}\int\limits_0 re^{-r^2}drdu=-\frac{1}{\pi}2\pi\int\limits_0^k\frac{1}{2}d(e^{-2})=1-e^{-k^2}$$

$$\delta_x=\delta_y=\delta\,,\quad M_x=M_y=0$$

$$x^2 + y^2 = r^2, \; r^2 = 2\delta^2 k^2$$

$$B\{(x, y) \in B_k\} = 1 - e^{\frac{-r^2}{2\delta^2}}$$

$$R = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$P\{R \le r\} = 1 - e^{\frac{-r^2}{2\delta^2}}$$

$$F(r) = e^{\frac{-r^2}{2\delta^2}} \qquad (19.3)$$

Определение 19.3

Распределение, имеющее функцию распределения (19.3) называется *распределение Релея*.

$$f(z) = F(r) = \frac{r}{\delta^2} e^{\frac{-r^2}{\delta^2}} \qquad (19.4)$$

Контрольные вопросы

1. Дайте определение двумерного нормального распределения.
2. Дайте определение эллипса рассеивания.
3. В чём состоит закон Релея.
4. Приведите вывод распределения Релея

Функции случайных величин и их числовые характеристики

Пусть задана некоторая функция:

$$\varphi(x)$$
$$y = \varphi(x) \qquad (20.1)$$

X	X_1	$\dots$	X_n
$P(x)$	P_1	$\dots$	P_n

Y	$\varphi(x_1)$	$\dots$	$\varphi(x_n)$
$P(y)$	P_1	$\dots$	P_n

$$x_1 < x_2 < .. < x_n$$

Если φ не строго возрастающая функция, то таблицу нужно переписать

$$M[Y] = \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i) \cdot P_i \qquad (20.2)$$

$$D[Y] = \sum_{i=1}^{n} (\varphi(x_i) - M[X])^2 \cdot P_i \qquad (20.3)$$

$$M[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) f(x) dx \qquad (20.4)$$

Найдём для y G(y)=? , g(y)=?

$$G(y) = P\{Y < y\} = P\{\varphi(x) < y\} =$$

$$\varphi(x) < y \quad \varphi^{\uparrow} \quad \psi(y) = \varphi^{-1}(y)$$

$$x < \varphi^{-1}(y) = \varphi(y)$$

$$= P\{x < \psi(y)\} = F(\psi(y))$$

$$G(y) = F(\psi(y)) \qquad (20.5)$$

$$\psi(y) = \varphi^{-1}(y) \quad (20.6)$$

$$g(y) = G(y) = F(\psi(y)\cdot\psi^{'}(y)) = f(\psi(y)\cdot\psi^{'}(y)))$$

$$g(y) = f(\psi(y))\cdot\psi^{'}(y)) \qquad (20.7)$$

$$G(y) = P\{Y < y\} = P\{\varphi(X) < y\} = P\{X > \varphi(y)\} =$$

$$= 1 - P\{X \le \psi(x)\} = 1 - F(\psi(y))$$

$P\{Y < y\} = \varphi \qquad \varphi(X) < y \quad \psi(y) = \varphi^{-1}(y)$-монотонно убывает

$$X > \varphi^{-1}(y), \quad X > \psi(y)$$

$$G(y) = 1 - F(\psi(y)) \qquad (20.8)$$

$$g(y) = G^{'}(y) = -F^{'}(\psi(y))\cdot\psi^{'}(y) = -f(\psi(y))\cdot\psi^{'}(y)$$

$$g(y) = -f(\psi(y))\cdot\psi^{'}(y) \qquad (20.9)$$

$$g(y) = f(\psi(y))\cdot\left|\psi^{'}(y)\right| \qquad (20.10)$$

Формула (20.10) является единым видом для (20.7) и (20.9)

Функции двух случайных величин и их свойства

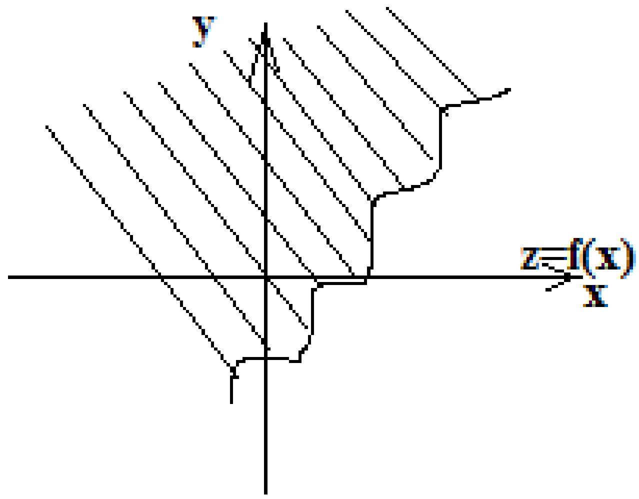
Пусть имеется X и Y –случайные величины. Функция двух переменных $\varphi(x, y)$ определена на множестве значений этой пары.

F(x,y) – функции распределения, $f(x, y)$ - совместная плотность распределения.

$Z = \varphi(X, Y)$ - случайная величина

Требуется найти:G(z)-? g(z)-?

$$G(z)=P\{Z<z\}=P\{\varphi(X,Y)<z\}=\iint f(x,y)dxdy=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(\underset{\forall:\varphi(x,y)<z}{f(x,y)dy})dx \qquad (21.1)$$



$$q(z)=G^{'}(z) \qquad (21.2)$$

$Z=X+Y$, X и У- независимые случайные величины

$f_1(x), f_2(y)$- плотности распределения X и У.

$$\varphi(x,y)=x+y$$

$$f(x,y)=f_1(x)\cdot f_2(y)$$

$$G(z)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\{\int\limits_{y:x+y<z} f(x,y)dy\}dx=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\{\int\limits_{y<z-x} f(x,y)dy\}dx=\int\limits_{-\infty}^{=\infty}\{\int\limits_{-\infty}^{-x} f(x,y)dy\}dx=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\{\int\limits_{-\infty}^{z-x} f_1(x)\cdot f_2(y)dy\}dx=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\{\int\limits_{-\infty}^{z-x} f_2(y)dy\}f_1(x)dx$$

$$G(z)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\{\int\limits_{-\infty}^{z-x} f_2(y)dy\}f_1(x)dx \qquad (21.3)$$

$$g(z)=G^{'}(z)$$

$$g(z)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_2(z-x)f_1(x)dx \qquad (21.4)$$

$$f_1 * f_2\ (z)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)f_2(z-x)dx \qquad (21.5)$$

Замечание 21.1

Формула (21.5) задаёт свертку функций f_1 и f_2

Плотность распределения z – свертка плотности распределения слагаемых.

Замечание 21.2

Формулы (21.4), (21.5) распределяются на случай произвольного числа случайных величин.

$$Z = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \Rightarrow, \quad g(t) = (f_1 * f_2 * \ldots * f_n)(z) \quad (21.6)$$

$$g(t) = (f_1 * f_2)(z), \text{ n=2} \quad (21.7)$$

Пример 21.1

Монета брошена 2 раза. Пусть *X* - число выпадений герба, а *Y* - число выпадений цифры. Найти законы распределения случайных величин: *Z=X+Y*, *Z=X-Y*, *Z=X·Y*.

Решение:

Составим законы распределения *X* и *Y*.

X	**0**	**1**	**2**
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Y	**0**	**1**	**2**
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

1)

Z=X+Y	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
P	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

$$P(Z=0)=P(X=0)\cdot P(Y=0)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$$

$$P(Z=1)=P(X=0)\cdot P(Y=1)+P(X=1)\cdot P(Y=0)=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

$$P(Z=2)=P(X=0)\cdot P(Y=2)+P(X=1)\cdot P(Y=1)+P(X=2)\cdot$$

$$\cdot P(Y=0)=2\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$$

$$P(Z=3)=P(X=1)\cdot P(Y=2)+P(X=2)\cdot P(Y=1)=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

$$P(Z=4)=P(X=2)\cdot P(Y=2)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$$

2)

Z=X-Y	**-2**	**-1**	**0**	**1**	**2**
P	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

$$P(Z=-2)=P(X=0)\cdot P(Y=2)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$$

$$P(Z=-1)=P(X=0)\cdot P(Y=1)+P(X=1)\cdot P(Y=2)=2\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

$$P(Z=0)=P(X=0)\cdot P(Y=0)+P(X=1)\cdot P(Y=1)+P(X=2)\cdot$$

$$\cdot P(Y=2)=2\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$$

$$P(Z=1)=P(X=1)\cdot P(Y=0)+P(X=2)\cdot P(Y=1)=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

$$P(Z=2)=P(X=2)\cdot P(Y=0)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$$

3)

Z=X·Y	**0**	**1**	**2**	**4**
P	$\frac{7}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

$$P(Z=0)=P(X=0)\cdot P(Y=0)+P(X=0)\cdot P(Y=1)+P(X=0)\cdot$$

$$\cdot P(Y=2)+P(X=1)\cdot P(Y=0)+P(X=2)\cdot P(Y=0)=3\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}+$$

$$+2\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{7}{16}$$

$$P(Z=1)=P(X=1)\cdot P(Y=1)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

$$P(Z=2)=P(X=1)\cdot P(Y=2)+P(X=2)\cdot P(Y=1)=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

$$P(Z=4)=P(X=2)\cdot P(Y=2)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$$

Контрольные вопросы

1. Дайте определение функции случайных величин.
2. Приведите основные характеристики функции случайных величин.
3. Дайте определение двумерной функции случайных величин.
4. Приведите основные характеристики.

Предельные теоремы теории вероятности

Неравенства Чебышева. Правила 3-х сигм

Теорема 22.1

X – величина, имеющая конечное математическое ожидание M[X]=m_x и конечную дисперсию D_x. Тогда, для любого $\alpha > 0$ справедливо неравенство:

$$P\{|X - m_x| \geq \alpha\} \leq \frac{D_x}{\alpha^2} \qquad (22.1)$$

Данное неравенство носит название *неравенство Чебышева.*

Оно характеризует вероятность отклонения величины X от своего ожидания.

Доказательство:

Для непрерывной случайной величины X-непрерывная случайная величина, с плотностью f(x).

$$P\{|X - m_x| \geq \alpha\} = \int\limits_{x:|x-M_x|\geq\alpha} f(x)dx \qquad (22.2)$$

$$D_x = \int_{-\infty}^{+\infty}(x-m_x)^2 f(x)dx \geq \int\limits_{x:|x-M_x|\geq\alpha}(x-m_x)^2 f(x)dx \geq \int\limits_{x:|x-M_x|\geq\alpha}\alpha^2 f(x)dx = \alpha^2\int\limits_{x:|x-M_x|\geq\alpha} f(x)dx$$

(22.3)

$$P\{|X - m_x| \geq \alpha^2\} = \int\limits_{x:|x-M_x|\geq\alpha} f(x)dx \leq \frac{D_x}{\alpha^2}$$

Замечание 22.1

Из неравенства Чебышева вытекает правило трех сигм:

$$\alpha = 3\sigma \ , \ (\sigma = \sigma[X] = \sqrt{D_x})$$

$$P\{|X - m_x| \geq 3\sigma\} \leq \frac{D_x}{9\sigma x^2} = \frac{D_x}{9D_x} = \frac{1}{3}$$

$$P\{|X - m_x| \leq 3\sigma\} \leq \frac{1}{9} \qquad (22.4)$$

$P\{|X - m_x| \leq 3\sigma\} \leq 0{,}00027$ - для нормального распределения

Закон больших чисел. Первая теорема Чебышева

Теорема 22.2

Пусть X- случайная величина с конечным математическим ожиданием m_x и дисперсией D_x.

$X_1, X_2, ..., X_n$ - значения случайной величины, полученные в результате независимых испытаний.

Тогда $\forall \varepsilon > 0$ справедлива формула:

$$\lim_{n \to \infty} P\{\left|\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} - m_x\right| \geq \varepsilon\} = 0 \quad (22.5)$$

Данное неравенство носит название *Закон больших чисел*.

Доказательство:

$$Y_n = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}, \quad M[Y_n] = M[\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}] =$$

$$= \frac{1}{n} \cdot M[x_1 + x_2 + \ldots + x_n] = \frac{1}{n}(M[X_1] + M[X_2] + \ldots + M[X_n] \quad (22.6)$$

$$D[Y_n] = D[\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}] = \frac{1}{n^2} \cdot D[X_1 + X_2 + \ldots + X_n] =$$

$$= \frac{1}{n^2}(D[X_1] + D[X_2] + \ldots + D[X_n] = \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot D_x = \frac{D_x}{n} \quad (22.7)$$

Применим неравенство Чебышева для значения $\alpha = \varepsilon$ $P\{|Y_n - m_x| \geq \varepsilon \leq \frac{D_x}{n \cdot \varepsilon} \underset{n\to\infty}{\to} 0 \quad \forall \varepsilon$ что и требовалась доказать.

Теорема 22.3

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ - последовательность независимых случайных величин, имеющие конечные математические ожидания m_x и конечные дисперсии D_x, существует константа D, $\forall n \in N : |Dx_n| \leq D$. Тогда $\forall \varepsilon > 0$ справедлива формула:

$$\lim_{x\to\infty} P\{\left|\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} - \frac{mx_1 + mx_2 + \ldots + mx_n}{n}\right| \geq \varepsilon\} = 0 \qquad (22.5')$$

Данная формула носит название *Вторая теорема Чебышева*

Теорема 22.4 Теорема Маркова

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ - последовательность независимых случайных величин, имеющие конечные математические ожидания m_x и конечные дисперсии D_x. Пусть задана матрица: $K_n = \{k_{ijn}, 1 \leq ij \leq n\}, \quad k_{ijn} = K[x_i, x_j]$

Пусть для матрицы K_n справедлива формула

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |k_{ijn}| = 0$$

Тогда для последовательности случайной величины X_n справедливо утверждение 2-й теоремы Чебышева.

Центральная предельная теорема. Теорема Лапласа

Теорема 22.5

Пусть $X_1, X_2, ..., X_n, ...$-последовательность независимо одинаково распределенных случайных величин с конечным математическим ожиданием и дисперсией. Тогда, закон распределения случайных величин $Y_n = X_1, X_2, ..., X_n$ при больших значения n пренебрежимо мало отличаются от нормального закона.

Пусть рассматриваются схема независимых испытаний Бернули, с вероятностью успеха Р и вероятностью неудачи q=1-p в единичном испытании. Тогда справедливо утверждение:

$$\lim_{n\to\infty} P\{\alpha \le \frac{Y_n - np}{\sqrt{npq}} \le p\} = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha),$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ - *формула Лапласа*

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте первую теорему Чебышева.
2. Сформулируйте правило трёх сигм.
3. Сформулируйте Закон больших чисел.
4. Сформулируйте вторую теорему Чебышева.
5. Сформулируйте теорему Маркова.
6. Сформулируйте центральную предельную теорему.
7. Приведите формулу Лапласа

Элементы математической статистики

Определение 23.1

Математическая статистика - раздел математики, изучающий большие совокупности данных методами теории вероятности.

Можно выделить три группы задач, которые изучают математическую статистику.

1. Методы первичной обработки статистических данных.

2. Методы оценки параметров статистической совокупности.

3. Проверка правдоподобия гипотез.

$X_1, X_2 ... X_n$ $n > 1$ первичная статистическая совокупность предстает в виде статистического протокола.

1	X_1
2	X_2
3	X_3
…	…
n	X_n

Упорядоченный статистический протокол. Перенумеровывает значения в порядке возрастания: $X_1 < X_2 < ... < X_n$.

Зададим: F(x), $p^*(x)$

$$F(x) \approx F^*(x) = P^*\{X < x\} \qquad (23.1)$$

Вычислить эту величину можно на основание протокола:

$$P^*\{X < x\} = \frac{n_x}{n}, \qquad (23.2)$$

где n_x-значение случайной величины X.

Группированный статистический ряд. Гистограмма

Определение 23.2

Гистограмма – очень распространённая графическая форма представления статистических данных.

Определение 23.3

Гистограмма аппроксимирует *статистическую плотность распределения*. Построение гистограммы основано на понятии группирования статистического ряда.

Пусть X – случайная величина, есть статистическая совокупность её значений $X_1, X_2, ..., X_n$

Множество значений случайной величины, а точнее, промежуток, содержащий эти значения, разбивается на отрезки (разряды).

$$[x_0, x_1],[x_1, x_2],...[x_{m-1}, x_n]$$

$$x_0 \le X_i \le x_m, 1 \le i \le n$$

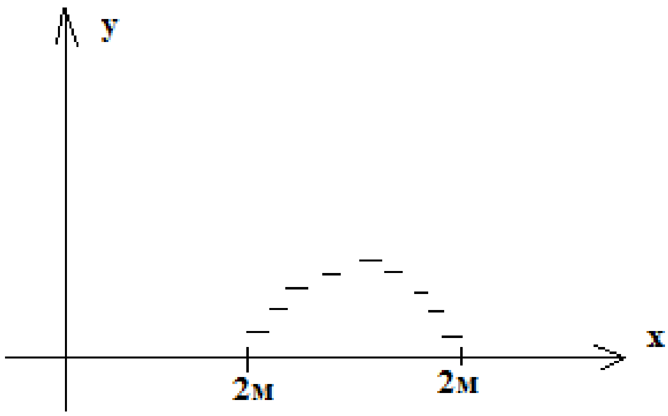
$$m << n$$

Есть некоторая Δ_i $x_0 < x_1 < ... < x_n$ структура, содержащая значения случайной величины X.

Определение 23.4

n_i обозначим число значений случайной величины X, попавших в i разряд $[x_i, x_{i+1}]$. Тогда функцию гистограммы определим следующим образом:

$$P^*(x) = \frac{n_i}{n \cdot (x_{i+1} - x_i)}, \quad x \in [x_i, x_{i+1}), \quad 0 \le i \le n-1 \ (23.2)$$



$\int_{-\infty}^{+\infty} f^*(x)dx = 1$ - основное свойства плотности распределения. Такое определение гистограммы можно связать со статистической сложностью

Контрольные вопросы

1. Что изучает предмет математическая статистика?
2. Сформулируйте три основные задачи математической статистики.
3. Что определяет гистограмма?
4. Приведите основную функцию гистограммы.

Глоссарий

- *Теория вероятности* – раздел математики, который изучает закономерности случайных явлений.

- Основное понятие – *понятие случайного события*.

- *Случайное событие* – событие, которое может произойти или не произойти при наличии определенных обстоятельств.

- *Детерминированное событие* – всегда происходит или никогда не происходит при наличии определенных условий.

- Можно выделить:

1. *Достоверное событие* – событие всегда происходит.
2. *Невозможное событие* – событие никогда не происходит.

- Случайные события $(A_1,...A_n)$ называются *попарно-несовместимыми*, если никакие два из них не могут наступить одновременно.

- Случайные события $(A_1,...A_n)$ называются *равновозможными*, если все они наступают с одинаковой частотой.

- Случайные события $(A_1,...A_n)$ образуют *полную группу*, если они попарно-несовместимы и в результате любого испытания наступает хотя бы одно из них.

- *Испытания* – совокупность условий, при которых происходят или не происходят события.

- *Генеральная совокупность* - конечная совокупность элементарных исходов (случайных событий) $(A, B, C, A_1,...A_n)$, которые обладают тремя свойствами:

1. Попарно-несовместимые
2. Равновозможные
3. Образуют полную группу

- число способов выбрать r шаров из n занумерованных шаров, с возвращением выбранного шара обратно в урну и с учетом порядка шаров в группе (так, что например, выборка (1,2,3, ..., r) считается отличной от выборки (2,1,3, ...,r)) равно: $\underbrace{nnn}_{r} = n^r = \overline{A}_n^r$

- число способов, сколькими можно выбрать r шаров из n, с учетом порядка шаров внутри выбранных групп, равно: $n(n-1)...(n-r) = \dfrac{n!}{(n-r)!} = A_n^r$

- общее число таких последовательностей получится из формулы (2.3) при r = n , т.е. равно $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n$. *Это число называется числом перестановок из n элементов и обозначается:* $P_n = n!$

- общее число способов, сколькими можно извлечь r шаров из n занумерованных шаров без учета порядка, в котором расположены шары внутри выбранных групп, будет равно: $\dfrac{n(n-1)...(n-r+1)}{r!}$ *.Это выражение называется числом сочетаний из n элементов по r и обозначается* C_{n}^{r}.

$$C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

- Статистическая вероятность вычисляется по формуле: $P^*(A) = \dfrac{m_A^*}{n^*}$

- Формула для вычисления геометрической вероятности: $P(A) = \dfrac{mes\lambda_1}{mes\lambda}$

- Пусть *A* и *B* – случайные события, тогда их суммой называется случайное событие $C = A + B$ состоящая в том, что наступило хотя бы одно событие *A* или *B*.

- Пусть *A* и *B* – случайные события, тогда их произведение $C = A \cdot B$, состоящее в том, что произошли оба события *A* и *B*.

- Условной вероятностью события *A*, при условии наступления события *B*, называется число $P_B(A)$ равное вероятности события *A*, при условии, что событие *B* уже наступило.

- В рамках классического определения вероятности, справедлива формула: $P_B(A) = \frac{P(AB)}{P(B)}$

- Пусть $\overline{A}$ противоположное к *A* событие, тогда справедлива формула: $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

- Пусть $B_1, B_2, \ldots, B_n$ – совокупность попарно несовместных случайных событий, образуют полную группу и A – произвольное случайное событие. Тогда справедлива формула: $P(A) = P_{B1}(A) * P(B_1) + P_{B2}(A) * P(B_2) + \ldots + P_{Bn}(A) * P(B_n)$ называется *формулой полной вероятности*.

- Пусть $B_1, B_2, \ldots, B_n$ –попарно несовместные случайные события, образующие полную группу и A – случайное событие. Тогда для любого $i \in [1, n]$ справедлива формула: $P_A(B_i) = \frac{P_{Bi}(A) * P(B_i)}{P(A)}, 1 \le i \le n$ - *формула Бейса*

- *Случайная величина* – функция случайного события (некоторая числовая характеристика случайного события).

$f(x), x \to A; f(A)$ - случайная величина

Обозначение: $X, Y, Z, \ldots, X_1, X_2, \ldots$

- Случайная величина X называется *дискретной*, если она принимает конечное или счетное значение.

- X – случайная величина. Тогда её *функция распределения* называется функция, определяемая формулой: $F(x) = P\{X < x\}$

- *Непрерывной случайной величиной* называется такая случайная величина, возможные значения которой непрерывно заполняют некоторый интервал (конечный или бесконечный) числовой оси.

- Говорят, что X - непрерывно-распределённая случайная величина, если её *функция распределения* F(x) имеет на всей числовой оси кусочно-непрерывную производную $F'(x) = f(x)$ (функция распределения дифференцируема).

- Пусть X – непрерывная случайная величина, тогда её производная $f(x) = F'(x)$ называется *плотностью распределения* случайной величины X.

- *Математическим ожиданием дискретной случайной величины* называют сумму произведений всех ее возможных значений на их вероятности $M[X] = X_1 p_1 + X_2 p_2 + ... + X_n P_n = \sum_{i=1}^{n} X_i pi$

- *Математическое ожидание непрерывной случайной величины* X определяется по формуле $M(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx$.

- Пусть X – случайная величина, тогда её дисперсией называется число, определяемое формулой: $D[x] = M[(X - M[x])^2]$

- Непрерывной случайной величины X характеризует рассеяние случайной величины вокруг её математического ожидания и определяется как математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины X от своего математического ожидания M(X):

$$D(X) = M[X - M(X)]^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} [X - M(X)]^2 \cdot f(x)dx$$

- *Среднеквадратическое отклонение* непрерывной случайной величины определяется формулой: $б(x) = \sqrt{D(x)}$.

- *Мода*- наибольшее вероятное значение случайной величины.

- Пусть X – случайная величина, тогда X_n называется медианой, если справедлива формула: $P\{X < Xn\} = P\{X > Xn\}$

- Пусть X – дискретная случайная величина принимает целые значения 0,1,2,…,n,… $P\{X = n\} = Pn \qquad n = 0,1,...$ Производящей функцией случайной величины X называется функция, определяемая формулой:

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} P_n X^n, \ |x| \le 1, \ \sum_{n=0}^{+\infty} P_n = 1$$

- $P\{y = m\} = C_n^m p^m q^{n-m}$ - *биномиальный Закон распределения.*

- говорят, что величина X имеет *распределение Пуассона* с параметром $x > 0$, если справедлива формула: $P\{X = m\} = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} \quad m = 0,1,...$

- *Поток событий* - совокупность событий, который наступает с определенной регулярностью.

- Поток П называется *стационарным*, если его поведение в различные моменты времени подчиняются одним и тем же законам.

- Поток называется *ординарным*, если вероятность наступления двух и более событий одновременно пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью наступления одного события.

- Говорят, что поток П является *потоком без последствия* или обладает свойством отсутствия последствия, если поведение потока в любой момент времени не зависит от его поведения в предыдущие моменты времени.

- Поток, обладающий свойствами стационарности, ординарности и отсутствия последствия называется *Пуассоновским потоком* или простейшим потоком.

- Случайная величина X, принимающая значения 0, 1, 2,.. имеет *геометрическое распределение* с параметрами p, q, ($p+q=1$, p>0, q>0) если справедлива формула: $P(X=m)=p^m q$.

- X – непрерывная случайная величина *равномерно распределена* на [a, b] или имеет равномерное распределение на [a, b], если ее плотность распределения задается формулой: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, x\in[a,b]\\ 0, x\in[a,b]\end{cases}$

- Непрерывная случайная величина X имеет *нормальное распределение* с параметрами m, δ, если ее плотность распределения задается формулой:

$$f(x)=\frac{1}{\delta\sqrt{2}}\cdot e^{\frac{-(x-m)^2}{2\delta^2}}$$

- *Нормально распределенная случайная величина практически не принимает значений вне интервала* $(a-3\sigma, a+3\sigma)$*:*

$$P(|x-a|<3\sigma)=2\Phi(\frac{3б}{\sigma})=2\Phi(3)=0{,}9973.$$

- *Начальным моментом* k-го порядка случайной величины X называется математическое ожидание k-ой степени случайной величины X:

$$\alpha_k=M(X^k)$$

- для дискретной случайной величины начальный момент выражается суммой

$$\alpha_k=\sum_{i=1}^{n}x_i^k p_i,$$

- для непрерывной - интегралом

$$\alpha_k=\int_{-\infty}^{+\infty}x^k f(x)dx$$

- *Центральным моментом* k-го порядка случайной величины X называют математическое ожидание k-ой степени отклонения [x- M(x)]:

$$\mu_k = M[x - M(X)]^2$$

- для дискретной случайной величины центральный момент выражается рядом

$$\mu_k = \sum_i (x_i - M(X))^k p_i \,,$$

- для непрерывной – несобственным интегралом

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{+\infty} (X - M(x))^k f(x) dx.$$

- Отношения μ_3 к среднему квадратическому отклонению в третьей степени называют *коэффициентом ассиметрии* распределения случайной величины X

$$a_x = \frac{\mu_3}{\sigma_x^3}$$

- *Функцией распределения* системы случайных величин или *совместной функцией распределения* является функция, задаваемая формулой:

$$F = (x_1, x_2, .., x_n) = P\{X_1 < x_1, X_2 < x_2, .., X_n < x_n\}$$

- (X, Y) имеет *непрерывное совместное распределение*, если совместная функция распределения $F(X, Y)$ непрерывна и имеет при $X, Y \in R^2$ кусочно-непрерывную смешанную частную производную второго порядка: $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x, y)$.

- Если (X, Y) имеет непрерывное распределение совместной функции распределения $F(X, Y)$, то функция определяется формулой $f(x, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$ и называется *совместной плотностью распределения* парой *X, У.*

- $F(X,Y)$ имеет непрерывную производную $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x,y)$ и называется *непрерывной плотностью распределения*.

- *Плотность распределения* – это приблизительное отношение вероятности попадания пары (X,Y) в прямоугольник с вершинами x, y делить на площадь этого прямоугольника.

- *k-тым начальным моментом* пары случайных величин X,Y называется выражение вида:

$$V_k = M[x^s y^n], \quad s+m=k, \ s \geq 0, \quad m \geq 0$$

- *k-тым центральным моментом* пары случайных величин X,Y называется выражение вида:

$$S_k = M[\overline{X^s}\overline{Y^m}], \quad s+m=k, \ s \geq 0, m \geq 0$$

- *Ковариацией случайных величин* называется выражение:

$$S_{0,1} = M[\overline{X}\overline{Y}] = K[XY]$$

- *Коэффициент корреляции* вычисляется по формуле: $r_{xy} = \dfrac{k[X,Y]}{\delta_x \delta_y}$

- *Ковариационная матрица:* $A = \begin{pmatrix} D[x] & k[XY] \\ k[XY] & D[Y] \end{pmatrix}$

- Пусть $X_1, X_2, X_3 ... X_n$ система n-случайных величин. Тогда их *совместной функцией распределения* называется:

$$F(X_1 ... X_n) = P\{X_1 < x_1, X_2 < x_2, ..., X_n < x_n\}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial y_1 ... \partial X_2}(X_1, X_2, X_3 ... X_n) = f(X_1, X_2, X_3 ... X_n)$$

- Если существует такая функция, то система случайных величин $X_1, X_2, X_3 ... X_n$ называется *непрерывной распределенной*, а функция называется *совместной плотностью распределения.*

- X, Y имеет *совместное нормальное распределение* или распределена по нормальному закону с параметрами $m_x, m_y, \delta_x, \delta_y, r_{xy}$, если ее совместная плотность распределения имеет вид:

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\delta_x\delta_y\sqrt{1-(r_{xy})}} \cdot \exp(-\frac{1}{2\sqrt{1-(r_{xy})^2}}) =$$
$$= (\frac{(X-m_x)^2}{\delta_x^{\ 2}} - \frac{2r_{xy}(X-m_x)(Y-m_y)}{\delta_x\delta_y} + \frac{(Y-m_y)^2}{\delta_y^{\ 2}})$$

Параметры $m_x, m_y, \delta_x, \delta_y, r_{xy}$ имеют следующий вероятностный смысл:

$m_x = M[X]$ $\quad$ $m_y = M[Y]$ - математические ожидания

$\delta_x = D\sqrt{[X]}$ $\quad$ $\delta_y = D\sqrt{[Y]}$ –среднее квадратичное отклонение X, Y

r_{xy} – коэффициент корреляции случайных величин X, Y

- Распределение, имеющее функцию распределения $f(z) = F(r) = \frac{r}{\delta^2} e^{\frac{-r^2}{\delta^2}}$ называется *распределение Релея.*

- X – величина, имеющая конечное математическое ожидание M[X]=m_x и конечную дисперсию D_x. Тогда, для любого $\alpha > 0$ справедливо неравенство:

$$P\{|X - m_x| \geq \alpha\} \leq \frac{D_x}{\alpha^2}$$

Данное неравенство носит название *неравенство Чебышева.*

- Пусть X- случайная величина с конечным математическим ожиданием m_x и дисперсией D_x.

$X_1, X_2, ..., X_n$- значения случайной величины, полученные в результате независимых испытаний.

Тогда $\forall \varepsilon > 0$ справедлива формула:

$$\lim_{n\to\infty} P\{\left|\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} - m_x\right| \geq \varepsilon\} = 0$$

Данное неравенство носит название *Закон больших чисел*.

- Пусть $X_1, X_2, ..., X_n$ - последовательность независимых случайных величин, имеющие конечные математические ожидания m_x и конечные дисперсии D_x. Пусть задана матрица: $K_n = \{k_{ijn}, 1 \leq ij \leq n\}, \quad k_{ijn} = K[x_i, x_j]$

Пусть для матрицы K_n справедлива формула

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left|k_{ijn}\right| = 0$$

Тогда для последовательности случайной величины X_n справедливо утверждение 2-й теоремы Чебышева.

- Пусть $X_1, X_2, ..., X_n, ...$-последовательность независимо одинаково распределенных случайных величин с конечным математическим ожиданием и дисперсией. Тогда, закон распределения случайных величин $Y_n = X_1, X_2, ..., X_n$ при больших значения n пренебрежимо мало отличаются от нормального закона.

Пусть рассматриваются схема независимых испытаний Бернули, с вероятностью успеха P и вероятностью неудачи q=1-p в единичном испытании. Тогда справедливо утверждение:

$$\lim_{n\to\infty} P\{\alpha \le \frac{Y_n - np}{\sqrt{npq}} \le p\} = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha),$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ - *формула Лапласа*

- *Математическая статистика* - раздел математики, изучающий большие совокупности данных методами теории вероятности

- *Гистограмма* – очень распространённая графическая форма представления статистических данных.

- Гистограмма аппроксимирует *статистическую плотность распределения*. Построение гистограммы основано на понятии группирования статистического ряда.

- n_i обозначим число значений случайной величины X, попавших в i разряд $[x_i, x_{i+1}]$. Тогда функцию гистограммы определим следующим образом:

$$P^*(x) = \frac{n_i}{n \cdot (x_{i+1} - x_i)}, \quad x \in [x_i, x_{i+1}), \quad 0 \le i \le n-1$$

Литература

1) Соловьева, Л. А. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст] : учеб. пособие. Ч. 1. Вариационные ряды, проверка статистических гипотез / Л. А. Соловьева, О. В. Старожилова; ПГУТИ, каф. ВМ. - Самара: ИУНЛ ПГУТИ, 2015. - 147 с.

2) Богданова, М. Г. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст] : учеб. пособие. Ч. 2. Регрессивный анализ, дисперсионный анализ / М. Г. Богданова, О. В. Старожилова ; ПГУТИ. - Самара : ИНУЛ ПГУТИ, 2015. - 168 с.

3) Блатов, И. А. Теория вероятностей и математическая статистика [Электронный ресурс] : учеб. пособие / И. А. Блатов, О. В. Старожилова; ПГУТИ, Каф. ВМ. - Электрон. текстовые дан. (1 файл: 3,70 Мб). - Самара: ИНУЛ ПГУТИ, 2017. - Загл. с титул. экрана. - Электрон. версия печ. издания 2017 г.