Федеральное агентство связи

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики»

Кафедра высшей математики

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ I ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ОЧНОЙ И ЗАОЧНОЙ ФОРМЫ ОБУЧЕНИЯ

Авторы-составители
профессор, д.ф.м.-н. Блатов И.А.
доцент, к.ф.м.-н. Шевченко Г.Н.

Самара, 2017

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время математические методы широко используются для решения самых разнообразных задач науки, техники и экономики. Значение этих методов существенно возросло в связи с массовым применением компьютеров во всех сферах деятельности.

Программа курса математики составлена в объеме, необходимом для изучения общенаучных, общеинженерных и специальных дисциплин и развития навыков, требуемых для применения математических методов в практике работы инженера.

Общий курс математики, изучаемый студентами очной и заочной формы обучения ПГУТИ а течение обучения в университете состоит из аналитической геометрии и линейной алгебры, математического анализа, элементов теории вероятностей и математической статистики, дискретной математики.

В первом семестре изучается аналитическая геометрия и линейная алгебра, первая часть курса математического анализа.

Одобрено методическим советом ПГУТИ 13.06.2017, протокол №83

При изучении этих разделов рекомендуется использовать следующую литературу:

1. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М.: Наука, 2010.
2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. М.: Наука, 2011. Т.1.
3. Щипачев В.С. Высшая математика. – М.: Высшая школа, 2012.
4. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. – М.: Наука, 2010, ч.1, ч.2.
5. Данко П. Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. – М.: Высшая школа, 2009, ч. I

ПРОГРАММА

экзамена по математике для студентов очной и заочной формы обучения

1 семестр

1. Определители, их вычисления и основные свойства.
2. Системы линейных алгебраических уравнений, правило Крамера.
3. Определение вектора, модуль вектора, коллинеарные и компланарные векторы, равенство векторов.
4. Линейные операции над векторами: сложение и вычитание векторов, умножение вектора на число, свойства этих операций.
5. Проекция вектора на ось, свойства проекции.
6. Базис, разложение вектора по базису, координаты вектора, линейные операции над векторами в координатах.
7. Скалярное произведение векторов, его основные свойства, условия перпендикулярности.
8. Выражение скалярного произведения векторов через координаты сомножителей.
9. Вычисление модуля вектора, угла между векторами, механической работы; направляющие косинусы вектора.
10. Векторное произведение векторов, его основные свойства, геометрический и механический смысл.
11. Выражение векторного произведения векторов через координаты сомножителей.
12. Смешанное произведение трех векторов, его выражение через координаты сомножителей, свойства смешанного произведения.
13. Геометрический смысл смешанного произведения.
14. Условие компланарности трех векторов.
15. Уравнение линии на плоскости, прямая как линия первого порядка (необходимое и достаточное условие).
16. Общее уравнение прямой и его исследование.
17. Некоторые частные виды уравнения прямой : уравнение прямой с угловым коэффициентом, уравнение прямой в отрезках, уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении, уравнение прямой, проходящей через две данные точки.
18. Угол между двумя прямыми на плоскости.
19. Условия параллельности и перпендикулярности прямых.
20. Нормальное уравнение прямой, приведение общего уравнения прямой к нормальному виду, расстояние от точки до прямой.

21. Кривые второго порядка: окружность, эллипс, гипербола, парабола, вывод их канонических уравнений, исследование формы кривых, эксцентриситет и директрисы.
22. Уравнение плоскости в отрезках, уравнение плоскости, проходящей через три данные точки.
23. Уравнение поверхности, плоскость как поверхность второго порядка, общее уравнение плоскости и его исследование.
24. Нормальное уравнение плоскости, приведение общего уравнения плоскости к нормальному виду, расстояние от точки до плоскости.
25. Условия параллельности и перпендикулярности плоскостей.
26. Прямая линия в пространстве, различные виды ее уравнений.
27. Условия параллельности и перпендикулярности прямых в пространстве, условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости.
28. Поверхности второго порядка: сфера, цилиндрические поверхности, эллипсоид, конус, гиперболоиды, параболоиды.
29. Матрицы, основные понятия и определения, сложение матриц, умножение матриц на число, умножение матриц, свойства этих операций; обратная матрица и правило ее вычисления, ранг матрицы.
30. Критерий совместности системы линейных алгебраических уравнений (теорема Кронекера-Копелли без док-ва), матричных метод решения системы.
31. Линейное пространство, примеры линейных пространств.
32. Линейно зависимые и линейно независимые векторы, размерность пространства, подпространство линейного пространства.
33. Базис в линейном пространстве, разложение вектора по базису, координаты вектора.
34. Скалярное произведение в линейном пространстве, евклидово пространство, длина вектора, угол между векторами, ортогональные векторы.
35. Неравенство Коши - Буняковского, неравенство треугольника, ортогональный базис.
36. Линейное преобразование линейного пространства, его матрица.
37. Собственные значения и собственные векторы матрицы линейного преобразования.
38. Симметрические матрицы и их свойства.
39. Квадратичные формы и их применение к упрощению линий и поверхностей второго порядка.
40. Комплексные числа, их геометрическое изображение на комплексной числовой плоскости, равенство комплексных чисел, комплексно - сопряженные числа.
41. Действия с комплексными числами в алгебраической форме.
42. Тригонометрическая форма комплексного числа, свойства модуля и аргумента.
43. Степень комплексного числа с натуральным показателем, формула Муавра корень n – степени из комплексного числа.
44. Степень числа e с комплексным показателем, формулы Эйлера, показательная форма комплексного числа.
45. Действительная функция действительного переменного, способы ее задания, основные элементарные функции, их классификация.
46. Числовая последовательность и ее предел, предел последовательности с общим членом натуральные логарифмы.
47. Конечный и бесконечный пределы функций, их геометрическая иллюстрация.
48. Теорема об ограниченности функции, имеющей конечный предел.
49. Бесконечно малые и бесконечно большие величины, их свойства.
50. Основные теоремы о пределах.
51. Первый замечательный предел.
52. Предел показательно - степенной функции, второй замечательный предел (без доказательства).
53. Сравнение бесконечно малых величин, эквивалентные бесконечно малые величины.
54. Непрерывность функции в точке и на множестве, непрерывность элементарных функций.
55. Действия над непрерывными функциями.
56. Формулировка основных свойств непрерывной функции на отрезке и на интервале.
57. Односторонние пределы функции.
58. Точки разрыва функции, их классификация.
59. Производная функции, ее геометрический и механический смысл, касательная и нормаль к плоской кривой, их уравнения.

60. Вычисление производной функции x^n, n – натуральное , $\sin x$, a^x, $\log_a x$.
61. Связь между непрерывностью и дифференцируемостью функции, теорема о непрерывности дифференцируемой функций.
62. Правила дифференцирования: производная суммы, произведения, частного, производная сложной функции, таблица производных элементарных функций.
63. Понятие обратной функции, теорема существования и непрерывности обратной функции (без док-ва), теорема о производной обратной функции, вычисление производной обратных тригонометрических функций.
64. Гиперболические функции и их дифференцирование.
65. Производная показательно-степенной функции.
66. Параметрический способ задания функции, дифференцирование функции, заданной параметрически.
67. Дифференциал функции, ее геометрический смысл, правила дифференцирования, дифференциал сложной функции и инвариантность его формы, приближенные вычисления с помощью дифференциала.
68. Производные и дифференциалы высших порядков, механический смысл второй производной.
69. Основные теоремы дифференциального исчисления: теорема Ферма, теорема Роля, теорема Лагранжа, теорема Коши.
70. Правило Лопиталя.
71. Формула Тейлора для многочлена, формула Тейлора для произвольной функции с дополнительными членами в форме Лагранжа.
72. Представления по формуле Маклорена, функций: e^x, $\sin x$, $\cos x$, en(1+x), $(1+x)^a$.
73. Необходимое и достаточное условие постоянства функции.
74. Достаточное условие возрастания, убывания функции.
75. Экстремумы функции, необходимое условие существования экстремума, критические точки функции.
76. Первое достаточное условие и второе достаточное условие существования экстремума, наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке.
77. Направление вогнутости кривой, достаточное условие направления вогнутости кривой вверх и вниз.
78. Точки перегиба кривой, достаточное условие направления вогнутости кривой вверх и вниз.
79. Асимптоты кривой.

Варианты контрольной работы обновляются ежегодно и размещаются на сайте кафедры высшей математики vm.psati.ru. Номер Вашего варианта совпадает с номером Вашей зачетной книжки.

ПРИМЕРНЫЙ ВАРИАНТ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ №4 С РЕШЕНИЕМ

Задача 1

Даны координаты вершин пирамиды ABCD.

Найти: 1) $|\overline{AB}|$; 2) $\widehat{(AB;AC)}$; 3) $\text{пр}_{AC}\overline{AB}$;
4) площадь грани ABC; 5) уравнение грани ABC
6) уравнение ребра AD; 7) угол между ребром AD и гранью ABC; 8) объем пирамиды ABCD;
9) уравнение высоты,опущенной из вершины D на грань ABC и ее длину; 10) уравнение плоскости, проходящей через точку D параллельно грани ABC.

A(1;1;1); B(0;5;0); C(3;0;4); D(3;8;7)

Решение: Используя свойства операций над векторами, имеем

1)

$\overline{AB}=\{0-1;5-1;0-1\}=\{-1;4;-1\}$,

$|\overline{AB}|=\sqrt{(-1)(-1)+(4)(4)+(-1)(-1)}=\sqrt{18}$

2)

$\overline{AC}=\{3-1;0-1;4-1\}=\{2;-1;3\}$

$|\overline{AC}|=\sqrt{(2)(2)+(-1)(-1)+(3)(3)}=\sqrt{14}$

$\overline{AB}\cdot\overline{AC}=(-1)\cdot(2)+(4)\cdot(-1)+(-1)\cdot(3)=-9$

3)

$$\cos(\widehat{\overline{AB};\overline{AC}})=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{|\overline{AB}|\cdot|\overline{AC}|}=\frac{-9}{\sqrt{252}}$$

4)

$$\text{пр}_{AC}\,\overline{AB}=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{|\overline{AC}|}=\frac{-9}{\sqrt{14}}$$

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}i-\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}j+\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}k\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\left|(12-1)i+(-2-(-3))j+(1-8)k\right|=\frac{1}{2}\left|11i+1j-7k\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{(11)\cdot(11)+(1)\cdot(1)+(-7)\cdot(-7)}=\frac{1}{2}\sqrt{171}$$

5) Уравнение грани ABC

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ -1 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}=0$$

или

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}(x-1)-\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}(y-1)+\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}(z-1)=0$$

или

$$(12-1)(x-1)+(-2-(-3))(y-1)+(1-8)(z-1)=0$$

или

$11x+(1)y+(-7)z-(11)(1)-(1)(1)-(-7)(1)=0$

или

$11x+1y\ \ -7z-5=0$

6) Уравнение ребра AD

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{7}=\frac{z-1}{6}$$

7)

q - угол между ребром AD и гранью ABC

$$\sin q=\frac{\overline{N}\cdot\overline{AD}}{|\overline{N}|\cdot|\overline{AD}|}$$,где $\overline{N}$ - нормальный вектор грани ABC

$$\sin q=\frac{11\cdot(3-1)+1\cdot(8-1)-7\cdot(7-1)}{\sqrt{(11)(11)+(1)(1)+(-7)(-7)}\ \sqrt{(2)(2)+(7)(7)+(6)(6)}}=$$

$$=\frac{-13}{\sqrt{15219}}$$

8) V - объем пирамиды ABCD

$$V = \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} -1 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 2 & 7 & 6 \end{vmatrix}\right| =$$

$$= \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}(2) - \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}(7) + \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}(6)\right| =$$

$$= ((12 - 1)(2) + (+ (-2 - (-3))(7) + (1 - 8)(6))/6 = 13/6$$

9) Канонические уравнения высоты, опущенной из вершины D на грань ABC

$$\frac{x-3}{11} = \frac{y-8}{1} = \frac{z-7}{-7}$$

h - длина этой высоты

$$h = \frac{3\,V}{S_{ABC}} = \frac{13}{\sqrt{171}}$$

10) Уравнение плоскости, проходящей через точку D параллельно грани ABC

$11(x-3)+(1)(y-8)+(-7)(z-7) = 0$

или

$11x + (1)y + (-7)z -(11)(3)-(1)(8)-(-7)(7) = 0$

или

$11x + 1y -7z +8 = 0$

Задача 2

На координатной плоскости задан треугольник ABC координатами своих вершин. Требуется найти :
1) уравнение стороны AB, 2) уравнение высоты CD и вычислить ее длину, 3) уравнение медианы BM, угол q между высотой CD и медианой BM
A(3;2); B(3;0); C(1;5)

Решение:

1) Уравнение стороны AB

$$\frac{x-3}{0} = \frac{y-2}{-2}$$

или

$x=3$

_2) Уравнение высоты CD

Так как CD + AB, то k2= -1/k1 = - 0/2

$y=5$

h - длина высоты CD

$$h = |1 - 3| = 2$$

3)

Точка $M\left(\frac{3+1}{2}; \frac{2+5}{2}\right) = M(2; 7/2)$ - середина AC

Уравнение медианы BM

$$\frac{x-3}{\frac{3+1}{2} - 3} = \frac{y-0}{\frac{2+5}{2} - 0}$$

или

$$\frac{x-3}{-2} = \frac{y-0}{7}$$

или

$$-\frac{7}{2}\cdot(x-3) = y-0$$

или

$$y = -\frac{7}{2}\cdot x + 0 + \frac{7}{2}\cdot 3$$

или

$$y = -\frac{7}{2}x + \frac{21}{2}$$

$$k2 = -7/2$$

4) Пусть q - угол между высотой CD и медианой BM,

тогда $q = (\widehat{\bar{d}; \bar{m}})$, где

$\bar{d}(2;0)$ - направляющий вектор CD , а

$\bar{m}(-2;7)$ - направляющий вектор BM

$$\bar{d}\cdot\bar{m} = (2)\cdot(-2) + (0)\cdot(7) = -4$$

$$|\bar{d}| = \sqrt{(2)\cdot(2)+(0)\cdot(0)} = \sqrt{4}$$

$$|\bar{m}| = \sqrt{(-2)\cdot(-2)+(7)\cdot(7)} = \sqrt{53}$$

$$\cos(\widehat{\bar{d};\bar{m}}) = \frac{\bar{d}\cdot\bar{m}}{|\bar{d}|\cdot|\bar{m}|} = \frac{-4}{2\sqrt{53}}$$

$$= \frac{-2}{\sqrt{53}}$$

Задача 3

Выполнить следующие действия над комплексными числами

1) $u + v$; 2) $u - v$; 3) $u \cdot v$; 4) $\frac{u}{v}$; 5) $\sqrt[3]{v}$; 6) v^5

$u = 9 - 4i$; $v = 3 - 2i$

1) $u + v = (9 - 4i) + (3 - 2i) = (9+3) + (-4-2)i = 12 - 6i$

2) $u - v = (9 - 4i) - (3 - 2i) = (9-3) + (-4+2)i = 6 - 2i$

3) $u \cdot v = (9 - 4i)\cdot(3 - 2i) = 9(3)+9(-2)i-4(3)i-4(-2)i\cdot i =$
$= (27-8) + (-18-12)i = 19 - 30i$

4) $$\frac{u}{v} = \frac{9-4i}{3-2i} = \frac{(9-4i)\cdot(3+2i)}{(3-2i)\cdot(3+2i)} = \frac{9(3)-9(-2)i-4(3)i+4(-2)i\cdot i}{3\cdot 3 + 2\cdot 2} =$$

$$= \frac{(27+8)}{13} + \frac{(-12+18)}{13}\, i = \frac{35}{13} + \frac{6}{13}\, i$$

6)

$$v^{1/3} = \left[\sqrt{3\cdot 3+2\cdot 2}\ (\cos(q) + i\cdot\sin(q)) \right]^{1/3} =$$

$$= (\sqrt{13})^{1/3}\ (\cos((q+2\Pi k)/3) + i\cdot\sin((q+2\Pi k)/3))$$

где $q = 2\Pi + \mathrm{arctg}(-2/3)$, $k = 0, 1, 2$

5)

$$v^{5} = \left[\sqrt{3\cdot 3+2\cdot 2}\ (\cos(q) + i\cdot\sin(q)) \right]^{5} = (\sqrt{13})^{5}\ (\cos(5q) + i\cdot\sin(5q))$$

где $q = 2\Pi + \mathrm{arctg}(-2/3)$

Задача 4

Найти пределы функций, не пользуясь правилом Лопиталя

1)

$$\lim_{x\to 5} \frac{-7x^3 + 35x^2 + x - 5}{-5x^3 + 32x^2 - 42x + 35} =$$

$$= \lim_{x\to 5} \frac{(x - 5)(- 7x^2 + 1)}{(x - 5)(- 5x^2 + 7x - 7)} =$$

$$= \lim_{x\to 5} \frac{- 7x^2 + 1}{- 5x^2 + 7x - 7} =$$

$$= \lim_{x\to 5} \frac{- 7\cdot 5^2 + 1}{- 5\cdot 5^2 + 7\cdot 5 - 7} =$$

$$= \frac{174}{97}$$

2)

$$\lim_{x\to OO} \frac{4x^3 + 7x^2 - 8x + 2}{8x^3 + 2x^2 - 8x - 2} =$$

$$\lim_{x\to OO} \frac{4 + 7\cdot x^{-1} - 8\cdot x^{-2} + 2\cdot x^{-3}}{8 + 2\cdot x^{-1} - 8\cdot x^{-2} - 2\cdot x^{-3}} =$$

$$= \frac{1}{2}$$

3)

$$\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{5x^2 - 29x + 61} - \sqrt{-2x + 33}}{\sqrt{5x^2 - 24x + 97} - \sqrt{9x^2 - 45x + 117}} =$$

$$\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{5x^2 - 29x + 61} - \sqrt{-2x + 33}}{\sqrt{5x^2 - 24x + 97} - \sqrt{9x^2 - 45x + 117}} \cdot \frac{\sqrt{5x^2 - 24x + 97} + \sqrt{9x^2 - 45x + 117}}{\sqrt{5x^2 - 24x + 97} + \sqrt{9x^2 - 45x + 117}} \cdot$$

$$\cdot \frac{\sqrt{5x^2 - 29x + 61} + \sqrt{-2x + 33}}{\sqrt{5x^2 - 29x + 61} + \sqrt{-2x + 33}} =$$

$$\lim_{x\to 4} \frac{(x-4)(5x-9)+25-(x-4)(-2)-25}{(x-4)(5x-4)+81-(x-4)(9x-9)-81} \cdot \frac{\sqrt{(x-4)(5x-4)+81} + \sqrt{(x-4)(9x-9)+81}}{\sqrt{(x-4)(5x-9)+25} + \sqrt{(x-4)(-2)+25}} =$$

$$\lim_{x\to 4} \frac{(x-4)(5x-7)\left(\sqrt{(x-4)(5x-4)+81} + \sqrt{(x-4)(9x-9)+81}\right)}{(x-4)(-4x+5)\left(\sqrt{(x-4)(5x-9)+25} + \sqrt{(x-4)(-2)+25}\right)} =$$

$$\lim_{x\to 4} \frac{(5x-7)\left(\sqrt{(x-4)(5x-4)+81} + \sqrt{(x-4)(9x-9)+81}\right)}{(-4x+5)\left(\sqrt{(x-4)(5x-9)+25} + \sqrt{(x-4)(-2)+25}\right)} =$$

$$= \frac{(5\cdot 4 - 7)\cdot 2\cdot (9)}{(-4\cdot 4 + 5)\cdot 2\cdot (5)} = \quad -117/55$$

4)

$$\lim_{x\to \infty} \frac{\sqrt{5x^2 + 3x} - 3}{-7x + 8} =$$

$$\lim_{x\to \infty} \frac{\sqrt{x^2 (5 + 3\cdot x^{-1} - 3\cdot x^{-2})}}{x(-7 + 8\cdot x^{-1})} =$$

$$\lim_{x\to \infty} \frac{|x| \sqrt{5 + 3\cdot x^{-1} - 3\cdot x^{-2}}}{x(-7 + 8\cdot x^{-1})} =$$

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\sqrt{5+3\cdot x^{-1}-3\cdot x^{-2}}}{x\,(-7+8\cdot x^{-1})} \\[2ex] \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-x\sqrt{5+3\cdot x^{-1}-3\cdot x^{-2}}}{x\,(-7+8\cdot x^{-1})} \end{array}\right. =$$

$$= \left\{\begin{array}{ll} -\sqrt{5}/7 & x\to+\infty \\ \sqrt{5}/7 & x\to-\infty \end{array}\right.$$

5)

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{-x^2+5x+5}{-x^2+5x-8}\right)^{6x^2-6x+4} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{-x^2+5x+5}{-x^2+5x-8}-1\right)^{6x^2-6x+4} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{-x^2+5x+5+x^2-5x+8}{-x^2+5x-8}\right)^{6x^2-6x+4} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{13}{-x^2+5x-8}\right)^{6x^2-6x+4} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \left[\left(1+\frac{13}{-x^2+5x-8}\right)^{\frac{-x^2+5x-8}{13}}\right]^{\frac{(13)(6x^2-6x+4)}{-x^2+5x-8}} =$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{13}{-x^2+5x-8}\right)^{\frac{-x^2+5x-8}{13}}\right)^{\frac{78x^2-78x+52}{-x^2+5x-8}} =$$

$$= e^{-78}$$

6)
$$\lim_{x\to\infty} (7x-6)(\,Ln(9x+2) - Ln(9x+9)) =$$

$$\lim_{x\to\infty} Ln\left(\frac{9x+2}{9x+9}\right)^{7x-6} = Ln\lim_{x\to\infty}\left(\frac{9x+2}{9x+9}\right)^{7x-6} =$$

$$Ln\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{9x+2}{9x+9}-1\right)^{7x-6} =$$

$$Ln\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{9x+2-9x-9}{9x+9}\right)^{7x-6} =$$

$$Ln\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-7}{9x+9}\right)^{7x-6} =$$

$$Ln\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{-7}{9x+9}\right)^{\frac{9x+9}{-7}}\right)^{\frac{-49x+42}{9x+9}} =$$

$$= Ln\, e^{-7\cdot(7)/(9)} = -49/9$$

Задача 5

Найти производные y' данных функций

$$y = 3[\sin(x^9)\cdot arctg(x^4)]^3 + 6Sh[\,7\arccos(x^4)+7arcctg(x^4)]$$

Решение:

$$y = 3[\sin(x^9)\cdot arctg(x^4)]^3 + 6Sh[\,7\arccos(x^4)+7arcctg(x^4)]$$

$$y' = 9[\sin(x^9)\cdot arctg(x^4)]^2\cdot[\,9x^8\cos(x^9)\cdot arctg(x^4) + 4x^3\sin(x^9)\cdot(1+x^8)^{-1}\,]$$

$$+ 6\,\mathrm{ch}[\,7\arccos(x^4)+7\,\mathrm{arcctg}(x^4)\,]\cdot[\,-28x^3(1-x^8)^{-0.5} -28x^3(1+x^8)^{-1}\,]$$

Задача 6

Исследовать методами дифференциального исчисления и построить график функции

$$y = (6x^2 + 5x - 5)\cdot\exp(-x)$$

Функция определена при всех действительных x .
График данной функции пересекается с осью OY в точке B(0 , $-5\cdot\exp(0)$),
с осью OX в точках

A1 ($-5/12-\sqrt{145}/12$; 0) ;

A2 ($-5/12+\sqrt{145}/12$; 0) ;

Найдем производные y' и y''

$$y' = (-6x^2 - 5x + 5)\cdot\exp(-x) + (12x + 5)\cdot\exp(-x)$$

$$y' = (-6x^2 + 7x + 10)\cdot\exp(-x)$$

$$y'' = (6x^2 - 7x - 10)\cdot\exp(-x) + (-12x + 7)\cdot\exp(-x)$$

$$y'' = (6x^2 - 19x - 3)\cdot\exp(-x)$$

Определим точки экстремума и промежутки монотонности функции
Критические точки находим из уравнения

$$-6x^2 + 7x + 10 = 0$$

$x1 = 2 = 2.000$

$x2 = -5/6 = -0.833$

$y(x1) = 3.925$
$y(x2) = -11.505$

x	(-OO ;-0.833)	-0.833	(-0.833 ;2.000)	2.000	(2.000;+OO)
y'	-	0	+	0	-
y	убывает	-11.505	возрастает	3.925	убывает
		min		max	

Определим точки перегиба и промежутки выпуклости и вогнутости функции

Критические точки находим из уравнения

$$6x^2 - 19x - 3 = 0$$

$x3 = 19/12-\sqrt{433}/12 = -0.151$

$x4 = 19/12+\sqrt{433}/12 = 3.317$
$y(x3) = -6.531$
$y(x4) = 2.813$

x	(-OO ;-0.151)	-0.151	(-0.151 ;3.317)	3.317	(3.317;+OO)
y'	+	0	-	0	+
y	вогнутый	-6.531	выпуклый	2.813	вогнутый
		перегиб		перегиб	

Найдем асимптоты графика функции.
Вертикальных асимптот график функции не имеет, так как она всюду непрерывна.
Вычислим пределы

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)/x = \lim_{x\to+\infty} (6x^2 + 5x - 5)\cdot\exp(-x)/x = 0$$

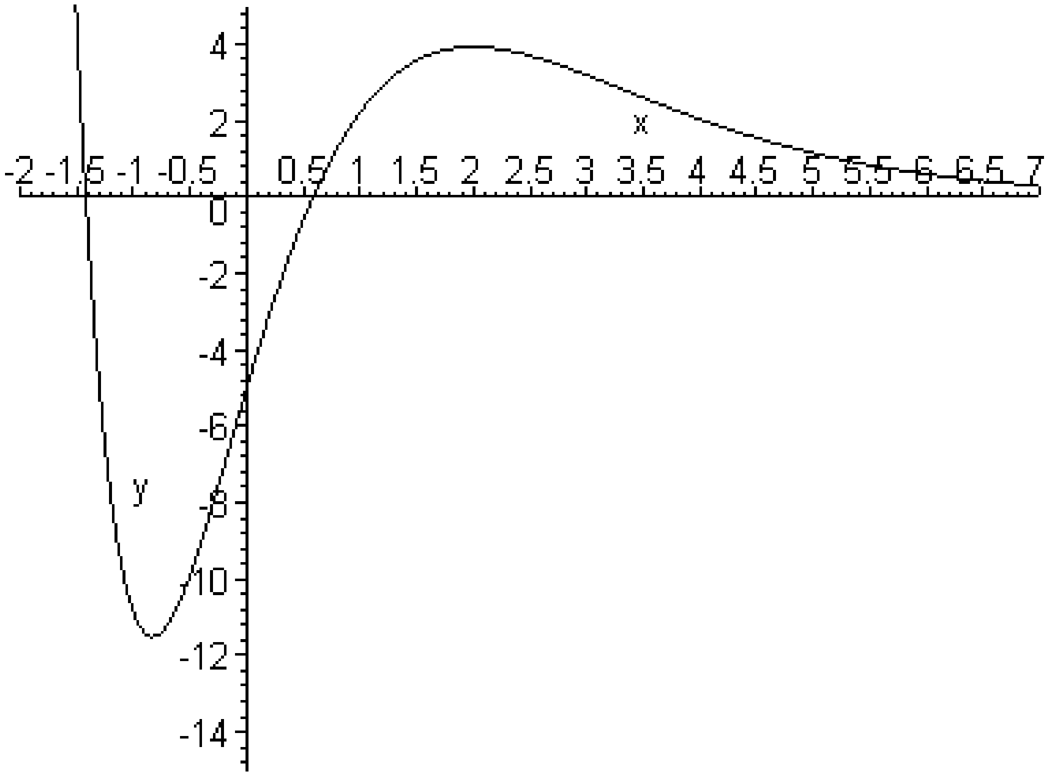
$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - g\cdot x) = \lim_{x\to+\infty} ((6x^2 + 5x - 5)\cdot\exp(-x) - 0\cdot x) = 0$$

Значит уравнение y=0 является уравнением асимптоты правой ветви графика функции.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)/x = \lim_{x\to-\infty} (6x^2 + 5x - 5)\cdot\exp(-x)/x = \infty$$

Левая ветвь графика асимптот не имеет

Строим график исходной функции



Задача 7

Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x) = 9x^3 + 4x^2 - 5x - 8 \quad \text{на } [-2 ; 1]$$

$$f(x) = 9x^3 + 4x^2 - 5x - 8 \qquad [-2 ; 1]$$

Найдем производную функции f(x) и приравняем ее к нулю

$$f'(x) = (27x^2 + 8x - 5) = 0$$

Найдем корни полученного уравнения

$x1 = -4/27-\sqrt{151}/27 = -0.603$

$x2 = -4/27+\sqrt{151}/27 = 0.307$

Из всех корней выберем Xi, принадлежащие [-2,1]

$f_{max} = \max\{ f(-2) , f(x1) , f(x2) , f(1) \} =$

$=\max\{ -54.000, -5.504, -8.898, 0.000\}=0$

$f_{min} = \min\{ f(-2) , f(x1) , f(x2) , f(1) \} = -54$