Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики»

Кафедра высшей математики

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ I ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ОЧНОЙ И ЗАОЧНОЙ ФОРМЫ ОБУЧЕНИЯ

Авторы-составители
профессор, д.ф.м.-н. Блатов И.А.
доцент, к.ф.м.-н. Шевченко Г.Н.

Самара, 2017

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время математические методы широко используются для решения самых разнообразных задач науки, техники и экономики. Значение этих методов существенно возросло в связи с массовым применением компьютеров во всех сферах деятельности.

Программа курса математики составлена в объеме, необходимом для изучения общенаучных, общеинженерных и специальных дисциплин и развития навыков, требуемых для применения математических методов в практике работы инженера.

Общий курс математики, изучаемый студентами очной и заочной формы обучения ПГУТИ в течение обучения в университете состоит из аналитической геометрии и линейной алгебры, математического анализа, элементов теории вероятностей и математической статистики, дискретной математики.

В четвертом семестре изучается теория вероятностей и математическая статистика.

Одобрено методическим советом ПГУТИ 06.06.2017, протокол №83

При изучении этих разделов рекомендуется использовать следующую литературу:

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. М: Наука, 2011,- т.2.
2. Данко П.Е., Попов А.Г, Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. - М.: Высшая школа, 2012 -, ч.2.
3. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика.-М. Высшая школа, 2011.
4. Вентцель Е.С. Теория вероятностей.-М.: Наука, 2011.
5. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. -М.: Высшая школа, 2010.
6. Вентцель Е.С, Овчаров Л.Л. Теория вероятностей и ее инженерные приложения -М.: Наука,. 2009.

ПРОГРАММА
экзамена по математике для студентов ПГУТИ
IV семестр

1. Случайные события и их я вероятностей и их классификация, классическое определение вероятности события.
2. Частота события, статистическое определение вероятности.
3. Геометрическое определение вероятности.
4. Понятие суммы и произведения событий, ее следствия.
5. Зависимые и независимые события, условная вероятность, теорема о вероятности произведения событий, ее следствия.
6. Полная вероятность события,. Формула полной вероятности, формулы Бейеса.
7. Случайные величины и их классификация, примеры.
8. Ряд распределения и многоугольник распределения дискретной случайной величины.
9. Интегральная функция распределения, ее свойства.
10. Вероятность попадания случайной точки в заданный интервал.
11. Плотность распределения вероятностей, ее свойства, кривая распределения, связь между плотностью распределения и интегральной функцией распределения.

12. Числовые характеристики случайной величины: математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение, мода,.. медиана, начальные и центральные моменты высших порядков.
13. Последовательность независимых испытаний, формула Бернулли.
14. Биномиальное распределение, его числовые характеристики.
15. Закон Пуассона, его числовые характеристики, связь между биномиальным и пуассоновским распределениями.
16. Закон равномерной плотности, его числовые характеристики.
17. Нормальный закон распределения, его параметры, кривая распределения.
18. Интеграл вероятностей,. Вероятность попадания случайной точки в заданный интервал, «правило трех сигма».
19. Системы случайных величин, закон распределения системы двух дискретных случайных величин.
20. Интегральная функция распределения системы двух случайных величин, ее свойства.
21. Плотность распределения системы двух непрерывных случайных величин, ее свойства, связь между плотностью распределения и интегральной функцией распределения.
22. Зависимые и независимые случайные величины, условие независимости двух случайных величин.
23. Числовые характеристики системы двух случайных величин: математические ожидания, дисперсии, корреляционный момент и коэффициент корреляции, коррелированность и зависимость случайных величин.
24. Система n –случайных величин, ее законы распределения и числовые характеристики, корреляционная матрица.
25. Нормальный закон распределения системы двух случайных величин,. Его параметры, эллипсы рассеивания,. Нормальный закон в канонической форме,. Вероятность попадания случайной точки в эллипс рассеивания.
26. Функции случайных аргументов, их числовые характеристики.
27. Теоремы о числовых характеристиках: свойства математического ожидания и дисперсии.
28. Закон больших чисел: неравенство П.Л.Чебышева, сходимость по вероятности, теорема Чебышева, теорема Якова Бернулли.
29. Понятие центральной предельной теоремы: локальная теорема Муавра-Лапласа, теорема А.М.Ляпунова.
30. Предмет и задачи математической статистики,. Генеральная и выборочная совокупности,. Сущность выборочного метода.
31. Статистический ряд распределения, полигон и гистограмма.
32. Числовые характеристики статистического распределения.
33. Статистические оценки параметров распределения: точечные оценки и их свойства, доверительная вероятность и доверительный интервал.
34. Понятия и проверки статистических гипотез и критериях согласия.
35. Случайная функция,.. ее реализация и сечение, примеры.
36. Основные характеристики случайного процесса: математическое ожидание им корреляционная функция,. Их свойства.
37. Стационарные случайные процессы, их характеристики, полная стационарность и стационарность в широком смысле.
38. Нахождение характеристик случайной функции из опыта, эргодическое свойство стационарного случайного процесса.
39. Спектральное разложение стационарной случайной функции, спектральная плотность, формулы Винера-Хинчина, стационарный белый шум.

Варианты контрольной работы обновляются ежегодно и размещаются на сайте кафедры высшей математики vm.psati.ru. Номер Вашего варианта совпадает с номером Вашей зачетной книжки.

ПРИМЕРНЫЙ ВАРИАНТ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ N4 С РЕШЕНИЕМ

Задача 1

В партии из 19 изделий 8 дефектных. Найти вероятность p того, что среди выбранных наугад 8 изделий окажется ровно 5 дефектных.

Решение.

Общее число равновозможных исходов равно C_{19}^{8} - числу сочетаний из 19 по 8.

$$C_{19}^{8} = \frac{19!}{8!\ 11!}$$

Число благоприятных исходов равно $C_{8}^{5} \cdot C_{11}^{3} = \frac{8!}{5!\ 3!} \cdot \frac{11!}{3!\ 8!}$

Используя классическое определение вероятности события, получаем

$$P = \frac{C_{8}^{5} . C_{11}^{3}}{C_{19}^{8}} = \frac{8! \cdot 11! \cdot 8! \cdot 11!}{19! \cdot 5! \cdot 3! \cdot 3!\ 8!} .$$

Задача 2

Найти вероятность того, что в 6 независимых испытаниях событие появится :
a) ровно 3 раз, b) хотя бы один раз, зная, что в каждом испытании вероятность появления события равна $\frac{1}{5}$

Решение.

а) По формуле Бернулли

$$P_6(x=3) = C_6^3 \cdot (1/5)^3 \cdot (4/5)^3 =$$

$$= \frac{6!}{3!\ \cdot 3!} \cdot (1/5)^3 \cdot (4/5)^3 = 256/3125 = 0.0819200000$$

б) Так как сумма вероятностей противоположных событий равна 1, то есть

$P_6(x>1,x=1) + P_6(x=0) = 1$, то

$P_6(x>1,x=1) = 1 - P_6(x=0) =$

$= 1 - C_6^0 \cdot (1/5)^0 \cdot (4/5)^{6-0} = 1 - (4/5)^6 = 11529/15625 =$ 0.7378560000

Задача 3

Среднее число вызовов, поступающих на АТС за 1 минуту равно 17. Найти вероятность того, что за 25 минут поступит : а) 25 вызовов; б) хотя бы один вызов. Предполагается, что каждый абонент, независимо от других, может сделать вызов с одинаковой вероятностью в любое время.

Решение.

а) По формуле Пуассона вероятность того, что за 25 минут наступит ровно k вызовов равна

$$P(X=k) = \frac{a^k}{k!} e^{-a},$$

где a - среднее число вызовов за 25 минут.
В нашем случае $k = 25$, $a = 17 \cdot 25 = 425$

$$P(X=25) = \frac{425^{25}}{25!} e^{-425}.$$

б) Вероятность хотя бы одного вызова найдем по формуле

$$P(X>1,X=1) = 1 - P(X=0) =$$

$$= 1 - \frac{425^0}{0!} e^{-425} = 1 - e^{-425}.$$

Задача 4

8 датчиков посылают сигналы в общий канал связи в пропорциях 5 : 1 : 3 : 5 : 3 : 8 : 5 : 5 .
Вероятность получить искаженный сигнал от каждого датчика равна соответственно :
0.01 ; 0.25 ; 0.23 ; 0.30 ; 0.44 ; 0.23 ; 0.09 ; 0.30 ;
1) Какова вероятность получить искаженный сигнал в общем канале связи ?
2) В общем канале связи получен искаженный сигнал. Какова вероятность, что этот сигнал от 3-го датчика ?

Решение.

1) Пусть A - событие, состоящее в том, что о общем канале связи получен искаженный сигнал.

A_i - событие, состоящее в том, что сигнал, полученный в общем канале связи, послан i-ым датчиком (i=1,...,k).

Тогда

$P(A_1) = 5:(5+1+3+5+3+8+5+5) = 1/7$

$P(A_2) = 1:(5+1+3+5+3+8+5+5) = 1/35$

$P(A_3) = 3:(5+1+3+5+3+8+5+5) = 3/35$

$P(A_4) = 5:(5+1+3+5+3+8+5+5) = 1/7$

$P(A_5) = 3:(5+1+3+5+3+8+5+5) = 3/35$

$P(A_6) = 8:(5+1+3+5+3+8+5+5) = 8/35$

$P(A_7) = 5:(5+1+3+5+3+8+5+5) = 1/7$

$P(A_8) = 5:(5+1+3+5+3+8+5+5) = 1/7$

По данным задачи известны условные вероятности

$P_{A_1}(A) = 0.01$

$P_{A_2}(A) = 0.25$

$P_{A_3}(A) = 0.23$

$P_{A_4}(A) = 0.30$

$P_{A_5}(A) = 0.44$

$P_{A_6}(A) = 0.23$

$$P_{A_7}(A) = 0.09$$

$$P_{A_8}(A) = 0.30$$

По формуле полной вероятности находим

$$P(A) = \sum_{i=1}^{8} P(A_i) \cdot P_{A_i}(A) =$$

$$= \frac{5\cdot 0.01+1\cdot 0.25+3\cdot 0.23+5\cdot 0.30+3\cdot 0.44+8\cdot 0.23+5\cdot 0.09+5\cdot 0.30}{5 + 1 + 3 + 5 + 3 + 8 + 5 + 5} = 0.1857$$

2) Если в общем канале связи получен искаженный сигнал, то вероятность, что этот сигнал послан 3-ым датчиком находится по формуле Байеса:

$$P_A(A_3) = \frac{P(A_3) \cdot P_{A_3}(A)}{P(A)} =$$

$$= \frac{3\cdot 0.23}{5\cdot 0.01+1\cdot 0.25+3\cdot 0.23+5\cdot 0.30+3\cdot 0.44+8\cdot 0.23+5\cdot 0.09+5\cdot 0.30} = 0.1062$$

Задача 5

Случайная величина X имеет закон распределения,

X	21	42
P	3/7	4/7

Найти математическое ожидание M[X] и дисперсию D[X].

Решение.

Согласно определению математического ожидания имеем

M[X] = x1 P(x1) + x2 P(x2)
M[X] = 21(3/7) + 42(4/7) = 33

Для нахождения дисперсии воспользуемся формулой

$$D[X] = M[X^2] - (M[X])^2.$$

$$M[X^2] = (x1)^2 \; P(x1) + (x2)^2 \; P(x2)$$

$$M[X^2] = 441(3/7) + 1764(4/7) = 1197$$

$$D[X] = 1197 - 1089 = 108$$

Задача 6

Найти вероятность попадания в заданный интервал (-68/19 ; -33/17) значений нормально распределенной случайной величины X, если математическое ожидание M(X) = 6/61, среднеквадратическое отклонение $g(X)$ = 87/41

Решение.

$$P(X \in (-68/19 \; ; -33/17) = \Phi\left[\frac{-33/17 - 6/61}{87/41}\right] - \Phi\left[\frac{-68/19 - 6/61}{87/41}\right] =$$

$$= \Phi(-0.961) - \Phi(-1.733) = -0.3318 - (-0.4585) =$$

$$= 0.1267$$

где

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} \, dt \quad \text{- функция Лапласа}$$

Задача 7

Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания нормального распределения с надежностью 0.910, зная выборочную среднюю 50, объем выборки 519 и среднеквадратическое отклонение 20.

Решение.

Найдем по таблице значение аргумента t, для которого функция Лапласа

$$\Phi(t)=0.910/2.$$

Получили, что $t = 1.695556$.

В силу условий задачи следует взять выборочную среднюю 50 и тогда искомый доверительный интервал будет следующим

$$(50 - 20t/\sqrt{519} \; ; \; 50 + 20t/\sqrt{519})$$

то есть

(48.511467 ; 51.488533) .

Задача 8

Случайные величины X и Y заданы плотностями распределения вероятностей

$$f(x) = \begin{cases} 1/6 - x/72, & x \in [0;12] \\ 0, & x \bar{\in} [0;12] \end{cases}$$

$$g(y) = \begin{cases} 1/9 - y/162, & y \in [0;18] \\ 0, & y \bar{\in} [0;18] \end{cases}$$

Найти дисперсию D[7X + 3Y + 5]

Решение.

По формуле для дисперсии независимых случайных величин имеем

$$D[7X + 3Y + 5] = D[7X] + D[3Y] + D[5] = 49D[X] + 9D[Y]$$

Найдём D[X] и D[Y]. Имеем

$$M[X] = \int_0^{12} xf(x)dx = \int_0^{12} (x/6 - x^2/72)dx =$$

$$= x^2/12 - x^3/216 \Big|_0^{12} = 144/12 - 1728/216 = 12 - 8 = 4$$

$$M[Y] = \int_0^{18} yg(y)dy = \int_0^{18} (y/9 - y^2/162)dy =$$

$$= y^2/18 - y^3/486 \Big|_0^{18} = 324/18 - 5832/486 = 18 - 12 = 6$$

$$M[X^2] = \int_0^{12} x^2 f(x)dx = \int_0^{12} (x^2/6 - x^3/72)dx =$$

$$3 \qquad 4 \qquad \Big|^{12}$$

$$= x /18 - x /288 \Big|_{0} = 1728/18 - 20736/288 = 96 - 72 = 24$$

$$M[Y^2] = \int_0^{18} y^2 g(y)dy = \int_0^{18} (y^2/9 - y^3/162)dy =$$

$$= y^3/27 - y^4/648 \Big|_0^{18} = 5832/27 - 104976/648 = 216 - 162 = 54$$

Откуда

$$D[X] = M[X^2] - (M[X])^2 = 24 - 16 = 8$$

$$D[Y] = M[Y^2] - (M[Y])^2 = 54 - 36 = 18$$

$$D[7X + 3Y + 5] = 49\cdot 8 + 9\cdot 18 = 392 + 162 = 554$$

Задача 9

В ящике имеются 1 билетов по 100 рублей, 9 билетов стоимостью по 200 рублей и 4 билетов по 300 рублей . Наугад берутся три билета. Найти вероятность того, что все три билета имеют разную стоимость.

Решение. По формуле вероятности произведения зависимых случайных событий имем

$$P(ABC) = P(A)\cdot P_A(B)\cdot P_{AB}(C)$$

$$P(A) = 1/(1+9+4)$$

$$P_A(B) = 9/(1+9+4-1)$$

$$P_{AB}(C) = 4/(1+9+4-2)$$

$$P(ABC) = (1/14)\cdot(9/13)\cdot(4/12) = 3/182$$

Задача 10

Случайная величина X подчинена нормальному закону:

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\Pi}} e^{-\frac{x^2}{8}}$$

Найти математическое ожидание величины

$$Y = 7X^3 + 3X^2 + 8X + 2$$

Решение.
Поскольку f(x) чётная функция, а

$$M[X^k] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)dx$$, то при нечётных k $M[X^k]=0$, то есть

$$M[Y] = M[3X^3 + 2] = 3M[X^2] + M[2] = 3M[X^2] + 2$$

$$M[X^2] = D[X]+(M[X])^2 = D[X] = 4$$

$$M[y] = 3\cdot 4+2 = 14$$

Задача 11

В двух урнах находятся шары, отличающиеся только цветом, причём в первой урне 2 белых шаров и 3 чёрных, а во второй 3 белых и 4 чёрных. Из обеих урн извлекаются наугад по одному шару. Найти вероятность того, что оба шара одного цвета.

Решение.
Пусть A - событие, состоящее в том, что извлечены два белых шара, а B - событие,
состоящее в том, что извлечены два чёрных шара. Согласно классическому определению вероятности и формуле вероятности произведения независимых случайных событий

$$P(A) = \frac{2}{2+3} \cdot \frac{3}{3+4} = 6/35$$

$$P(B) = \frac{3}{2+3} \cdot \frac{4}{3+4} = 12/35$$

По формуле вероятности суммы несовместных событий

$$P(A+B) = 6/35 + 12/35 = 18/35$$

Задача 12

Экзаменационный билет содержит три вопроса. Вероятности того, что студент ответит на первый и второй вопросы равны 2/3 и 7/8 а на третий - 4/5 . Студент сдаст экзамен, если ответит на два любых вопроса. Найти вероятность того, что студент не сдаст экзамен.

Решение.
Пусть A, B, C - события, состоящие в том, что студент правильно ответил на первый, второй и третий вопрос соответственно, $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$ - противоположные к ним события. Тогда событие, состоящее в том, что студент не сдал экзамен есть $D = \bar{A}\ \bar{B}\ \bar{C} + A\ \bar{B}\ \bar{C} + \bar{A}\ B\ \bar{C} + \bar{A}\ \bar{B}\ C$. По формулам вероятности суммы несовместных случайных событий, вероятности произведения независимых случайных событий и вероятности противоположного события имеем:

$$P(D) = P(\bar{A}\ \bar{B}\ \bar{C} + A\ \bar{B}\ \bar{C} + \bar{A}\ B\ \bar{C} + \bar{A}\ \bar{B}\ C) =$$

$$= P(\bar{A}\ \bar{B}\ \bar{C}) + P(A\ \bar{B}\ \bar{C}) + P(\bar{A}\ B\ \bar{C}) + P(\bar{A}\ \bar{B}\ C)) =$$

$$= P(\bar{A})P(\bar{B})P(\bar{C}) + P(A)P(\bar{B})P(\bar{C}) + P(\bar{A})P(B)P(\bar{C}) + P(\bar{A})P(\bar{B})P\{C) =$$

$$P(D) = P(\bar{A}\ \bar{B}\ \bar{C} + A\ \bar{B}\ \bar{C} + \bar{A}\ B\ \bar{C} + \bar{A}\ \bar{B}\ C) =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{5} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1}{3}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{4}{5} = 7/60$$

Задача 13

Имеются две случайные величины X и Y, связанные соотношениями $Y = 8X + 1$. Числовые характеристики X заданы: $M[X]=8$, $D[X]=2$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины Y.

Решение.
Согласно свойствам математического ожидания и дисперсии имеем

$$M[Y] = M[8X+1] = M[8X] + M[1] = 8M[X] + M[1] = 65$$

$$D[Y] = D[8X+1] = D[8X] + D[1] = D[8X] = 64D[X] = 128$$