Федеральное агентство связи

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики»

Кафедра высшей математики

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ II ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ОЧНОЙ И ЗАОЧНОЙ ФОРМЫ ОБУЧЕНИЯ

Авторы-составители
профессор, д.ф.м.-н. Блатов И.А.
доцент, к.ф.м.-н. Шевченко Г.Н.

Самара, 2017

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время математические методы широко используются для решения самых разнообразных задач науки, техники и экономики. Значение этих методов существенно возросло в связи с массовым применением компьютеров во всех сферах деятельности.

Программа курса математики составлена в объеме, необходимом для изучения общенаучных, общеинженерных и специальных дисциплин и развития навыков, требуемых для применения математических методов в практике работы инженера.

Общий курс математики, изучаемый студентами очной и заочной формы обучения ПГУТИ, состоит из аналитической геометрии и линейной алгебры, математического анализа, элементов теории вероятностей и математической статистики, дискретной математики.

Во втором семестре изучаются дифференциальное исчисление функций многих переменных, интегральное исчисление функций одной переменной, дифференциальные уравнения, ряды, элементы операционного исчисления.

Одобрено методическим советом ПГУТИ 13.06.2017, протокол №83

При изучении этих разделов рекомендуется использовать следующую литературу:

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. М.: Наука, 2011. Т.1-2
2. Щипачев В.С. Высшая математика. – М.: Высшая школа, 2012.
3. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. – М.: Наука, 2010, ч.1, ч.2.
4. Данко П. Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. – М.: Высшая школа, 2009, ч. I-II.

ПРОГРАММА

экзамена по математике для студентов очной и заочной формы обучения

2 СЕМЕСТР

1. Функции многих переменных.
   1. Функция двух переменных, способы её задания, график функции, заданной аналитически.
   2. n-мерное арифметическое евклидово пространство R_n простейшие множества в нём, понятие функции n-переменных, предел и непрерывность функции.
   3. Частные производные, геометрический смысл частных производных функции двух переменных.
   4. Понятие дифференцируемой функции, необходимое условие дифференцируемости и достаточное условие дифференцируемости функции, полный дифференциал.
   5. Производная сложной функции, дифференциал сложной функции и инвариантность его формы.
   6. Частные производные высших порядков, теорема Шварца о равенстве смешанных производных, дифференциалы высших порядков.
   7. Неявные функции одной и двух переменных, теоремы их существования, дифференцирование неявных функций.
   8. Экстремумы функций, необходимое условие существования экстремума, критические точки функции, достаточное условие существования экстремума.
2. Интегральное исчисление.
   9. Первообразная функция, неопределённый интеграл, его свойства, условие существования, таблица интегралов элементарных функций.
   10. Замена переменной и интегрирование по частям в неопределённом интеграле.

11. Интегрирование выражений, содержащих квадратные трехчлены.
12. Простейшие рациональные дроби и их интегрирование. Разложение правильной рациональной дроби на сумму простейших, интегрирование рациональной дроби.
13. Интегрирование тригонометрических функций и некоторых иррациональных выражений.
14. Интегрируемость в конечном виде, примеры интегралов, не выражающихся через элементарные функции.
15. Определённый интеграл, его геометрический смысл, условия существования.
16. Свойства определённого интеграла.
17. Интеграл как функция переменного верхнего предела, производная от интеграла по верхнему пределу.
18. Вычисление определённого интеграла, формула Ньютона-Лейбница.
19. Замена переменной и интегрирование по частям в определённом интеграле, интегралы с симметричными от четной и нечетной функций.
20. Несобственные интегралы с бесконечными пределами, их вычисление и простейшие признаки сходимости.
21. Несобственные интегралы с бесконечными пределами, их вычисление и простейшие признаки сходимости.
22. Геометрические приложения определённого интеграла: вычисление площади плоской фигуры и длины дуги кривой в декартовых и полярных координатах, вычисление объёма тела с неизвестным поперечным сечением.

3. Дифференциальные уравнения.

23. Дифференциальные уравнения, их порядок и степень, решение уравнений.
24. Уравнение первого порядка, его общее и частное решение и их геометрический смысл, задача Коши, теорема существования и единственности решения.
25. Простейшие уравнения первого порядка, интегрируемые в конечном виде:
    а) уравнения с разделяющимися переменными,
    б) однородные уравнения,
    в)линейные уравнения.
26. Уравнения высших порядков, задача Коши, общее и частное решения.
27. Уравнения, допускающие понижение порядка.
28. Линейные уравнения высших порядков, свойства решений линейного однородного уравнения.
29. Линейно зависимые и линейно независимые системы функций, определитель Вронского и его свойства.
30. Фундаментальная система решений, теоремы о структуре общего решения линейного однородного и линейного неоднородного уравнений.
31. Решение линейных неоднородных уравнений методом вариации произвольных постоянных.
32. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами, характеристическое уравнение, структура общего решения уравнения второго порядка в зависимости от корней характеристического уравнения.
33. Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами. Нахождение частного решение по виду правой части.

4. Операционное исчисление

34. Преобразование Лапласа, условия его существования.
35. Свойства преобразования Лапласа: линейность, теорема смещения, теорема подобия, теорема запаздывания. Таблица изображений элементарных функций.
36. Дифференцирование и интегрирование изображений (без док-ва).
37. Дифференцирование и интегрирование оригинала.
38. Свертка функций, теорема свертывания (без док-ва).
39. Нахождение оригинала правильной рациональной дроби.

40. Решение дифференциальных уравнений операционным методом.

5. Ряды

41. Числовой ряд его сходимость и расходимость, сумма ряда, гармонический ряд и ряд геометрической прогрессии, исследование их на сходимость.
42. Необходимый признак сходимости и достаточный признак расходимости ряда, остаток ряда, связь между сходимостью или расходимостью ряда и его остатка, некоторые операции над рядами.
43. Ряды с положительными членами, достаточные признаки их сходимости: признак сравнения, признак Даламбера, признак Коши, интегральный признак и его применение к исследованию на сходимость обобщенного гармонического ряда.
44. Ряды со знакочередующимися членами, признак Лейбница.
45. Ряды с произвольными членами, абсолютная и неабсолютная сходимость ряда.
46. Функциональные последовательности и ряды, поточечная и равномерная сходимисть, признак Вейерштрасса.
47. Теорема о непрерывности суммы ряда, о почленном интегрировании и почленном дифференцировании функционального ряда.
48. Степенные ряды, теорема Абеля, радиус и интервал сходимости степенного ряда, свойства степенного ряда, свойства степенного ряда внутри интервала сходимости.
49. Ряд Тейлора, степенной ряд как ряд Тейлора своей суммы.
50. Необходимое и достаточное условие разложения функции в степенной ряд, представление степенными рядами функций:

e^x , $\sin x$, $\cos x$, $\mathrm{arctg}\, x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^k$

Варианты контрольной работы обновляются ежегодно и размещаются на сайте кафедры высшей математики vm.psati.ru. Номер Вашего варианта совпадает с номером Вашей зачетной книжки.

ПРИМЕРНЫЙ ВАРИАНТ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ N2 С РЕШЕНИЕМ

Задача 1

Найти частные производные U_x; U_y; U_{xy}; U_{xx}; U_{yy} функции

$$U = 6\sin(x^3 + y^3) + \mathrm{tg}(x^5 + y^3) + 8\ln(x^3 + y^3)$$

$$U = 6\sin(x^3 + y^3) + \mathrm{tg}(x^5 + y^3) + 8\ln(x^3 + y^3)$$

Решение. Дифференцируем функцию по одной из переменных, считая другую константой

$$U_x = 18\cos(x^3 + y^3)\cdot x^2 + 5\cos^{-2}(x^5 + y^3)\cdot x^4 + 24(x^3 + y^3)^{-1}\cdot x^2 +$$

$$U_y = 18\cos(x^3 + y^3)\cdot y^2 + 3\cos^{-2}(x^5 + y^3)\cdot y^2 + 24(x^3 + y^3)^{-1}\cdot y^2 +$$

$$U_{xy} = -54\sin(x^3 + y^3)\cdot x^2\cdot y^2 + 30\cos^{-3}(x^5 + y^3)\cdot\sin(x^5 + y^3)\cdot x^4\cdot y^2 - 72(x^3 + y^3)\cdot x\cdot y +$$

$$U_{xx} = -54\sin(x^3+y^3)\cdot x^4 + 36\cos(x^3+y^3)\cdot x + 50\cos^{-3}(x^5+y^3)\cdot\sin(x^5+y^3)\cdot x^8 +$$

$$20\cos^{-2}(x^5+y^3)\cdot x^3 - 72(x^3+y^3)^{-2}\cdot x^4 + 48(x^3+y^3)^{-1}\cdot x+$$

$$U_{yy} = -54\sin(x^3+y^3)\cdot y^4 + 36\cos(x^3+y^3)y + 18\cos^{-3}(x^5+y^3)\cdot\sin(x^5+y^3)\cdot y^4 +$$

$$6\cos^{-2}(x^5+y^3)y - 72(x^3+y^3)^{-2}\cdot y^4 + 48(x^3+y^3)^{-1}y+$$

Задача 2

Найти grad U(A) и производную $U_a(A)$ в точке A(0.3;0.5;0.5)

по направлению вектора $\bar{a}(0;2;4)$ функции

$$U = x^4 + 2y^3 + z^9 + 5x^3\cdot y^4\cdot z^9 + 4\arccos(x^4\cdot y^4\cdot z^4)$$

Решение.

Найдем частные производные U_x, U_y, U_z в точке A

$$U_x = 4x^3 + 15x^2\cdot y^4\cdot z^9 - 16(1 - x^8\cdot y^8\cdot z^8)^{-1/2}\cdot x^3\cdot y^4\cdot z^4$$

$$U_x(A)= 4\cdot 0.3^3 + 15\cdot 0.3^2\cdot 0.5^4\cdot 0.5^9 - 16(1 - 0.3^8\cdot 0.5^8\cdot 0.5^8)^{-1/2}\cdot 0.3^3\cdot 0.5^4\cdot 0.5^4 = 0.109852$$

$$U_y = 6y^2 + 20x^3\cdot y^3\cdot z^9 - 16(1 - x^8\cdot y^8\cdot z^8)^{-1/2}\cdot x^4\cdot y^3\cdot z^4$$

$$U_y(A)= 6\cdot 0.5^2 + 20\cdot 0.3^3\cdot 0.5^3\cdot 0.5^9 - 16(1 - 0.3^8\cdot 0.5^8\cdot 0.5^8)^{-1/2}\cdot 0.3^4\cdot 0.5^3\cdot 0.5^4 = 1.501144$$

$$U_z = 9z^8 + 45x^3\cdot y^4\cdot z^8 - 16(1 - x^8\cdot y^8\cdot z^8)^{-1/2}\cdot x^4\cdot y^4\cdot z^3$$

$$U_z(A)= 9\cdot 0.5^8 + 45\cdot 0.3^3\cdot 0.5^4\cdot 0.5^8 - 16(1 - 0.3^8\cdot 0.5^8\cdot 0.5^8)^{-1/2}\cdot 0.3^4\cdot 0.5^4\cdot 0.5^3 = 0.036465$$

Тогда

$\operatorname{grad} U(A) = 0.1099\cdot\bar{i} + 1.5011\cdot\bar{j} + 0.0365\cdot\bar{k}$

Найдем

$|\bar{a}| = \sqrt{0 + 4 + 16} = \sqrt{20}$

Тогда

$$U_{\bar{a}}(A) = \frac{\operatorname{grad} U(A)\cdot\bar{a}}{|\bar{a}|} = \frac{0.1099\cdot 0 + 1.5011\cdot 2 + 0.0365\cdot 4}{\sqrt{20}} =$$

$$= \frac{3.1482}{\sqrt{20}}$$

Задача 3

Составить уравнения касательной плоскости и нормали к графику функции

$Z = 2y^2 - 6xy + 8x + y + 9$

в точке

$M(-6;4;141)$;

Решение.

Найдем частные производные Z'_x и Z'_y в точке M

$Z'_x = -6y + 8$

$Z'_x(M) = -16$

$Z'_y = -6x + 4y + 1$

$Z'_y(M) = 53$

Составим уравнение касательной плоскости

$-16(x + 6) + 53(y - 4) - (z - 141) = 0$

$-16x + 53y - z - 167 = 0$

Составим канонические уравнения нормали

$$\frac{x+6}{-16} = \frac{y-4}{53} = \frac{z-141}{-1}$$

Задача 4

Найти экстремум функции

$Z = -7x^2 - 3y^2 - 4xy - 3x + 9$

Решение.

Найдем координаты критических точек. Для этого нужно найти частные производные Z_x, Z_y и приравнять их к нулю.

$$Z_x = -14x - 4y - 3$$

$$Z_y = -4x - 6y$$

$$\begin{cases} -14x - 4y - 3 = 0 \\ -4x - 6y = 0 \end{cases}$$

Откуда

$x = -9/34$, $y = 3/17$

Точка $M(-9/34\ ;\ 3/17)$ является критической точкой

Вычислим

$$K(M) = Z_{xx}(M)\cdot Z_{yy}(M) - \left[Z_{xy}(M)\right]^2 = 68$$

Так как $K(M)>0$, $Z(M) = -14 <0$,то в точке M есть экстремум, причем максимум

Задача 5.1

Найти интеграл

$$\int [30(-5x+8)^2 + \cos(-x-7) - 15\cos^{-2}(-5x+8) +$$

$$+2(x^2+1)^{-0.5} + 54(81+x^2)^{-1} + 54tg(6x+2)]dx$$

Решение. Используя таблицу интегралов элементарных функций и элементарные приемы интегрирования, имеем

$$\int [30(-5x+8)^2 + \cos(-x-7) - 15\cos^{-2}(-5x+8) +$$

$$+2(x^2+1)^{-0.5} + 54(81+x^2)^{-1} + 54tg(6x+2)]dx =$$

$$= -2(-5x+8)^3 - \sin(-x-7) + 3tg(-5x+8) +$$

$$+ 2Ln\left|x+(x^2+1)^{0.5}\right| + 6arctg(x/9) - 9Ln\left|\cos(6x+2)\right| + C$$

Задача 5.2
Найти интеграл

$$\int \frac{-2x-4}{x^2-4x+8}\,dx$$

Решение. Выделяя полный квадрат и используя таблицу интегралов элементарных функций, имеем

$$\int \frac{-2x-4}{x^2-4x+8}\,dx =$$

$$= \int \frac{-1(2x-4)+(-8)}{x^2-4x+8}\,dx =$$

$$= -\int \frac{2x-4}{x^2-4x+8}\,dx -$$

$$-8\int \frac{dx}{x^2-4x+8} =$$

$$= -\int \frac{d(x^2-4x+8)}{x^2-4x+8} -$$

$$-8\int \frac{d(x-2)}{(x-2)^2+4} =$$

$$= -\mathrm{Ln}(x^2-4x+8) - \frac{8}{\sqrt{4}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x-2}{\sqrt{4}} + C$$

Задача 5.3
Найти интеграл

$$\int \frac{-3x^2+115x-680}{x^3-11x^2-4x+224}\,dx$$

Решение. Применяя метод неопределенных коэффициентов, разлагаем пдынтегральную функцию в сумму элементарных дробей и находим

$$\int \frac{-3x^2 + 115x - 680}{x^3 - 11x^2 - 4x + 224}\,dx =$$

$$= \int \left(\frac{2}{x-7} + \frac{4}{x-8} + \frac{-9}{x+4} \right) dx =$$

$$= 2\int \frac{dx}{x-7} + 4\int \frac{dx}{x-8} - 9\int \frac{dx}{x+4}\,dx =$$

$$= 2\mathrm{Ln}|x-7| + 4\mathrm{Ln}|x-8| - 9\mathrm{Ln}|x+4| + C$$

Задача 6

Найти интеграл

$$\int_{-6}^{1} [-3(-2x-5)\cdot \mathrm{arctg}(8x+5) - 4(-2x-4)\cdot \mathrm{arcctg}(7x-9)]dx$$

Решение. Интегрируя по частям, находим

$$\int_{-6}^{1} [-3(-2x-5)\cdot \mathrm{arctg}(8x+5) - 4(-2x-4)\cdot \mathrm{arcctg}(7x-9)]dx =$$

$$-3\int_{-6}^{1} \mathrm{arctg}(8x+5)\,d(-x^2-5x) - 4\int_{-6}^{1} \mathrm{arcctg}(7x-9)\,d(-x^2-4x) =$$

$$-3(-x^2-5x)\cdot \mathrm{arctg}(8x+5)\Big|_{-6}^{1} + 24\int_{-6}^{1} (-x^2-5x)\cdot[1+(8x+5)^2]^{-1}\,dx -$$

$$-4(-x^2-4x)\cdot \mathrm{arcctg}(7x-9)\Big|_{-6}^{1} - 28\int_{-6}^{1} (-x^2-4x)\cdot[1+(7x-9)^2]^{-1}\,dx =$$

$-3[\ (-6)\cdot\mathrm{arctg}(13)+(6)\cdot\mathrm{arctg}(-43)\ +$

$7/8\ -\ (-15/64)\cdot\mathrm{Ln}(17/185)-(11/4)(\ \mathrm{arctg}(13)\ -\ \mathrm{arctg}(-43)\ )\ ]-$

$-4[\ (-5)\cdot\mathrm{arcctg}(-2)+(12)\cdot\mathrm{arcctg}(-51)\ -$

$-1\ +\ (-23/49)\cdot\mathrm{Ln}(5/2602)+(-332/49)(\ \mathrm{arctg}(-2)\ -\ \mathrm{arctg}(-51)\ )\ ]$

Задача 7

Дана функция

$$f(x) = \int_0^x (-8\sin^2 t + 5\cos(t)\sin(t) - 5)dt$$

Найти её значение производной $f'(\Pi/2)$

Решение. Согласно формуле

$$\frac{d}{dx}\int_0^x g(t)dt = g(x) \quad \text{имеем}$$

$$f'(\Pi/2) = -8\sin^2(\Pi/2)+ 5\cos(\Pi/2)\sin(\Pi/2)- 5 = -13$$

Задача 8

Найти общий интеграл дифференциального уравнения

$$y' = 25y^2 + 36$$

Решение.

$$y' = 25y^2 + 36$$

Это уравнение с разделяющимися переменными.
Разделим переменные

$$\frac{dy}{dx} = 25y^2 + 36$$

$$\frac{dy}{25y^2 + 36} = dx$$

$$\int \frac{dy}{25y^2 + 36} = \int dx + C$$

Вычисляя интеграл в левой части, получаем.

$$(1/30)\operatorname{arctg}(5y/6) = x + C$$

Задача 9

Найти изображение оригинала

$$f(t) = -5\cdot e^{-3t}\sin(-4t) + 4\cdot sh(2t)$$

Решение.

Используя свойство линейности преобразования Лапласа и таблицу изображений элементарных функций, получаем

$$F(p) = 20/[(p+3)^2 + 16] + 8/[(p)^2 - 4]$$

Задача 10

Найти оригинал f(t) изображения

$$F(p)=\frac{6p+4}{(9p+63)(7p+63)}$$

Решение.

Разложим F(p) на элементарные дроби методом неопределённых коэффициентов. Имеем

$$\frac{6p+4}{(9p+63)(7p+63)} = \frac{A}{9p+63} + \frac{B}{7p+63} = \frac{(7A+9B)p+63A+63B}{(9p+63)(7p+63)},$$

Откуда

$$\begin{cases} 7A+9B=6 \\ 63A+63B=4 \end{cases}$$

Решая эту систему, находим

$$\begin{cases} A=-19/7 \\ B=25/9 \end{cases}$$

$$F(p) = \frac{-19/7}{9p+63} + \frac{25/9}{7p+63} =$$

-19/63   25/63

$$= \frac{}{p+7} + \frac{}{p+9}$$

Согласно теореме смещения

$$\frac{1}{p+7} \;\overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\longrightarrow}}\; \exp(-7t)$$

$$\frac{1}{p+9} \;\overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\longrightarrow}}\; \exp(-9t)$$

Отсюда $f(t) = (-19/63)\exp(-7t) + (25/63)\exp(-9t)$

Задача 11

Найти общий интеграл дифференциального уравнения

$$y' = \frac{16x + 9y}{9x + 4y}$$

Решение.

Это однородное дифференциальное уравнение первого порядка. Запишем его в виде

$$y' = \frac{16 + 9y/x}{9 + 4y/x}$$

Делаем замену $y/x=z$, где $z(x)$ - новая неизвестная функция.

Тогда $y = zx$, $y' = z'x + z$
и уравнение принимает вид

$$z'x + z = \frac{16 + 9z}{9 + 4z}$$

$$x\frac{dz}{dx} = \frac{16 - 4z^2}{9 + 4z}$$

Это уравнение с разделяющимися переменными.
Интегрируя его, получаем

$$\int \frac{9 + 4z}{16 - 4z^2}\,dz = \int \frac{dx}{x} + C$$

Далее, вычисляя интегралы, получаем

$$\frac{9}{16}\,\mathrm{Ln}\left|\frac{2z + 4}{2z - 4}\right| - \frac{1}{2}\,\mathrm{Ln}\left|4z^2 - 16\right| = \mathrm{Ln}|x| + C$$

Возвращаясь к переменной y, получаем искомый общий интеграл

$$\frac{9}{16}\,\mathrm{Ln}\left|\frac{2y+4x}{2y-4x}\right| - \frac{1}{2}\,\mathrm{Ln}\left|4y^2/x^2 - 16\right| = \mathrm{Ln}|x| + C$$

Задача 12

Исследовать сходимость числового ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6n+102}{n^3+13n^2+47n+35}$$

Решение.

Воспользуемся интегральным признаком Коши, для чего исследуем сходимость несобственного интеграла

$$J = \int_h^{\infty} \frac{6x+102}{x^3+13x^2+47x+35}\,dx =$$

$$\int_h^{\infty} \left[\frac{5}{x+7} + \frac{4}{x+1} - \frac{9}{x+5}\right]dx\ ,$$

где в качестве h выберем число большее чем max{-7;-1;-5;0}, например, 1:

$$J = \int_1^{\infty} \left[\frac{5}{x+7} + \frac{4}{x+1} - \frac{9}{x+5}\right]dx =$$

$$= \left(5\cdot\mathrm{Ln}|x+7| + 4\cdot\mathrm{Ln}|x+1| - 9\cdot\mathrm{Ln}|x+5|\ \right)\Big|_1^{\infty} =$$

$$= \mathrm{Ln}\,\frac{|x+7|^5\cdot|x+1|^4}{\quad}\Big|^{\infty} =$$

$$\left.|x+5|^{9}\right|_{1}$$

$$= \mathrm{Ln}\frac{6^{9}}{8^{5}\cdot 2^{4}} =$$

$$= \mathrm{Ln}\,\frac{10077696}{524288}$$

Несобственный интеграл J сходится, значит, по интегральному признаку Коши сходится данный числовой ряд.

Задача 13

Найти интервал сходимости степенного ряда

Решение.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^{2} - 8n + 7}{5^{n}}\cdot(x + 7)^{n}$$

Найдем R - радиус сходимости данного степенного ряда

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{(3n^{2} - 8n + 7)\cdot 5^{n+1}}{5^{n}\cdot[3(n+1)^{2} - 8(n+1) + 7]} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{5\cdot(3 - 8\cdot n^{-1} + 7\cdot n^{-2})}{3 - 3\cdot n^{-1} + 2\cdot n^{-2}} = 5$$

Степенной ряд сходится абсолютно в интервале (-12;-2)

Задача 14

Найти решение задачи Коши

$$\begin{cases} (3x + 7)\ y' = 3y + 63 \\ y(0)=42 \end{cases}$$

Решение.

Проинтегрируем уравнение с разделяющимися переменными

$$\int \frac{dy}{3y + 63} = \int \frac{dx}{3x + 7} + C\ ;$$

$$(1/3)\mathrm{Ln}|3y + 63| = (1/3)\mathrm{Ln}|3x + 7| + C$$

$3y + 63 = C1(3x + 7)$

$y(0)=42$

$126 + 63 = 7\cdot C1$; $C1=27$

$3y(x) + 63 = 27(3x + 7)$;

$3y(x) + 63 = 81x + 189$

$3y(x) = 81x + 126$

$y(x) = 27x + 42$

Задача 15
Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' + 12y' + 27y = 5103x + 108$$

Решение.

Найдём $y0(x)$-общее решение соответствующего однородного уравнения

$$y'' + 12y' + 27y = 0$$

Для этого составим характеристическое уравнение

$$r^2 + 12r + 27 = 0,$$

корни которого

$r1=-9$, $r2=-3$

Отсюда

$$y0(x)=C1\, e^{-9x} + C2\, e^{-3x}$$

Частное решение $y1(x)$ исходного неоднородного уравнения

будем искать в виде

$y1(x)=Ax+B$

Подставляя $y1(x)$ в исходное уравнение, получаем

$12A + 27(Ax+B) = 27Ax + 12A + 27B = 5103x + 108$

$$\begin{cases} 27A = 5103 \\ 12A + 27B = 108 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = 189 \\ B = -80 \end{cases}$$

Запишем ответ в виде

$$y(x)=C1\ e^{-9x} + C2\ e^{-3x} + 189x - 80$$

Задача 16

Найти решение дифференциального уравнения

$$y'' + 6y' - 55y =-78\ \exp(2x)$$

Решение.

Найдём y0(x)-общее решение соответствующего однородного уравнения

$$y'' + 6y' - 55y = 0$$

Для этого составим характеристическое уравнение

$$r^2 + 6r - 55 = 0,$$

корни которого

$$r1=-11 \quad , \quad r2=5$$

Отсюда

$$y0(x)=C1\ e^{-11x} + C2\ e^{5x}$$

Частное решение y1(x) исходного неоднородного уравнения будем искать в виде

$$y1(x)=A\ \exp(2x)$$

Тогда

$$(y1(x))'=A\ 2\exp(2x)$$

$(y1(x))''=A\ 4\exp(2x)$

Подставляя y1(x) в исходное уравнение, после сокращения

на exp(2x) получаем

$A4+12A-55A=-78$

$A=2$

Запишем ответ в виде

$$y(x)=C1\,e^{-11x}+C2\,e^{5x}+2\,e^{2x}$$

Задача 17

Найти коэффициент a_0 разложения функции

$$f(x)=7x^3+6x^2+2x+5$$

по степеням (x-8)

Решение.

Коэффициент a_0 разложения функции f(x) по степеням (x-8)

имеет вид $\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$

В нашем случае

$$a_0=7\cdot 8^3+6\cdot 8^2+2\cdot 8+5=3989$$