Федеральное агентство связи

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики»

Кафедра высшей математики

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ III ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ОЧНОЙ И ЗАОЧНОЙ ФОРМЫ ОБУЧЕНИЯ

Авторы-составители
профессор, д.ф.м.-н. Блатов И.А.
доцент, к.ф.м.-н. Шевченко Г.Н.

Самара, 2017

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время математические методы широко используются для решения самых разнообразных задач науки, техники и экономики. Значение этих методов существенно возросло в связи с массовым применением компьютеров во всех сферах деятельности.

Программа курса математики составлена в объеме, необходимом для изучения общенаучных, общеинженерных и специальных дисциплин и развития навыков, требуемых для применения математических методов в практике работы инженера.

Общий курс математики, изучаемый студентами очной и заочной формы обучения ПГУТИ в течение обучения в университете состоит из аналитической геометрии и линейной алгебры, математического анализа, элементов теории вероятностей и математической статистики, дискретной математики.

В третьем семестре изучаются кратные, криволинейные и поверхностные интегралы, функциональные ряды, элементы теории поля и теории функций комплексного переменного.

Одобрено методическим советом ПГУТИ 06.06.2017, протокол №83

При изучении этих разделов рекомендуется использовать следующую литературу:

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. М.: Наука, 2011. Т.1-2
2. Щипачев В.С. Высшая математика. – М.: Высшая школа, 2012.
3. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. – М.: Наука, 2010, ч.1, ч.2.
4. Данко П. Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. – М.: Высшая школа, 2009, ч. I-II.

ПРОГРАММА ЭКЗАМЕНА ПО МАТЕМАТИКЕ
Ш семестр

1. Двойной интеграл, его геометрический смысл.
2. Условия существования двойного интеграла.
3. Свойства двойного интеграла.
4. Вычисление двойного интеграла по прямоугольной области.
5. Правильные области. Вычисление двойного интеграла по криволинейным областям.
6. Отображение плоских областей.
7. Криволинейные координаты. Координатные линии. Полярная система координат.
8. Элемент площади.
9. Замена переменных в двойном интеграле.
10. Геометрические приложения двойного интеграла.
11. Тройной интеграл, условия существования, свойства.
12. Вычисление тройного интеграла.
13. Отображение трехмерных областей.
14. Криволинейные координаты в пространстве, координатные поверхности.
15. Цилиндрические координаты.
16. Сферические координаты.
17. Элемент объема в криволинейных координатах.
18. Замена переменных в тройном интеграле.
19. Понятие криволинейного интеграла 1 рода.

20. Существование и вычисление криволинейного интеграла 1 рода.
21. Свойства криволинейного интеграла 1 рода.
22. Криволинейный интеграл 2 рода.
23. Существование и вычисление криволинейного интеграла 2 рода. Свойства криволинейного интеграла 2 рода.
24. Физический смысл криволинейного интеграла 2 рода.
25. Криволинейный интеграл по замкнутому контуру.
26. Формула Грина. Следствие о площади области.
27. Независимость криволинейного интеграла от пути интегрирования.
28. Понятие поверхностного интеграла.
29. Вычисление поверхностного интеграла методом проектирования на одну из координатных плоскостей.
30. Разложимость периодической функции в ряд Фурье.
31. Ряды Фурье для четной и нечетной функции и на произвольном отрезке.
32. Сходимость ряда Фурье.
33. Скалярное поле. Поверхности равного уровня.
34. Векторное поле. Векторные линии.
35. Поверхностные интегралы., их вычисление.
36. Поток векторного поля. Физический смысл. Запись в векторной и координатной формах.
37. Физический смысл знака потока векторного поля.
38. Дивергенция векторного поля. Свойства. Физический смысл.
39. Теорема Остроградского-Гаусса (без док-ва). Запись в векторной и координатной формах.
40. Циркуляция векторного. Физический смысл.
41. Теорема Стокса (без док-ва). Запись в векторной и координатной формах.
42. Дифференциальные операции второго порядка. Символика Гамильтона (вектор набла $\vee$).
43. Потенциальные, соленоидальные поля. Формулировка необходимого условия потенциальности поля.
44. Область в комплексной плоскости.
45. Функции комплексного переменного.
46. Предел функции комплексного переменного. Непрерывность.
47. Производная функции комплексного переменного. Дифференциал.
48. Необходимые и достаточные условия дифференцируемости функции комплексного переменного.
49. Аналитические функции. Свойства.
50. Связь аналитических функций с гармоническими.
51. Основные элементарные функции комплексных переменных.
52. Понятие интеграла функции комплексного переменного. Теорема существования и вычисления интеграла.
53. Свойства интеграла от ф.к.п.
54. Теорема Коши для односвязной области.
55. Теорема Коши для многосвязной области.
56. Следствие теоремы Коши. Вычисление $\Phi(z-a)^n \quad dz$
57. Интегральная формула Коши.
58. Особые точки функции и их классификация.
59. Нули аналитической функции. Связь с полюсом.
60. Вычеты. Теорема о вычетах.
61. Основная теорема Коши о вычетах. Гамма-функция, ее свойства.
62. Бета-функция, ее свойства.
63. Функции Бесселя.

Варианты контрольной работы обновляются ежегодно и размещаются на сайте кафедры высшей математики vm.psati.ru. Номер Вашего варианта совпадает с номером Вашей зачетной книжки.

Образец решения примерного варианта контрольной работы N3

Задача 1

Найти с помощью двойного интеграла площадь S области D, ограниченной графиками функций

$$y = x^2 + 8x - 3$$

$$y = 8x + 726$$

Сделать чертеж

Решение.

Дана область D, ограниченная линиями:

$$y = x^2 + 8x - 3$$

$$y = 8x + 726$$

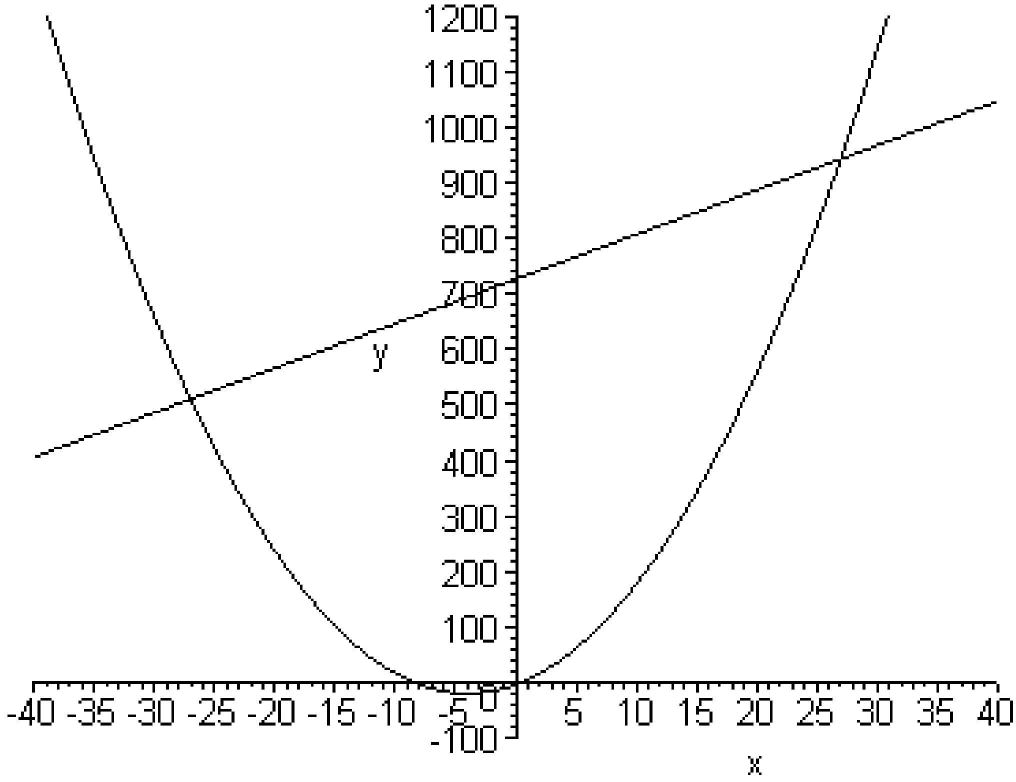
Найдем абсциссы точек пересечения графиков данных функций из уравнения

$$x^2 + 8x - 3 = 8x + 726$$

Тогда

$$x^2 = 729 \quad ; \quad x1=-27 \quad ; \quad x2=27$$

Отсюда A(-27 , 510), B(27 , 942) - точки пересечения.



Поэтому

$$S = \int_{-27}^{27} (8x + 726 - x^2 - 8x + 3)\,dx =$$

$$= \int_{-27}^{27} (729 - x^2)\,dx = 2\int_{0}^{27} (729 - x^2)\,dx =$$

$$= 2(9\cdot 9^2 \cdot 3\cdot 9 - (3\cdot 9)^3/3) = 26244$$

Задача 2

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$y = x/10$, $y = x/18$, $y = 2$

Решение.

Данные прямые образуют треугольник OAB с вершинами

O(0,0) ; A(20,2) ; B(36,2). Поэтому

$$S = (1/2)\left|AB\right|\cdot C = (1/2)(36 - 20)\cdot 2 = 16$$

Задача 3

Вычислить объём тела, ограниченного поверхностями

$$\frac{12}{\Pi}(64 - x^2 - y^2)\ , \quad z=0$$

Решение.

Тело ограничено сверху параболоидом вращения, а снизу кругом

$$D : \{(x,y)\in R^2 :\ x^2 + y^2 < 64\}$$

Поэтому, переходя к полярным координатам, имеем

$$V = \iint\limits_{x^2+y^2<64} \frac{12}{\Pi}(64 - x^2 - y^2)\,dxdy = \left|\begin{matrix} x=r\cdot\cos(\phi) \\ y=r\cdot\sin(\phi) \\ J=r \end{matrix}\right| =$$

$$\int_0^{2\Pi}\int_0^{8} \frac{12}{\Pi}(64 - r^2)r\,drd\phi = \frac{6}{\Pi}\cdot 2\Pi(8^4 - 8^4/2) = 24576$$

Задача 4

Вычислить

$$\iint\limits_D (- 9x + 6y + 12)dxdy\ ,$$ где область D ограничена линиями

$$x=7\ ;\quad y=3\ ;\quad x/7 + y/3 = 1$$

Решение.

Область интегрирования есть треугольник с вершинами

$$A(7,0)\ ;\ B(0,3)\ ;\ C(7,3).$$

Переходя к повторным интегралам, имеем

$$\iint\limits_D (-9x+6y+12)\,dxdy =$$

$$= \int_0^7 \left\{ \int_{3(1-x/7)}^{3} (-9x+6y+12)\,dy \right\} dx =$$

$$= \int_0^7 \left(3y^2 - 9xy + 12y \Big|_{3(1-x/7)}^{3} \right) dx =$$

$$= \int_0^7 \left(3(9(1-(1-x/7)^2)) - 9x\cdot 3x/7 + 12\cdot 3x/7 \right) dx =$$

$$= \int_0^7 \left(27(2x/7 - x^2/49) - (27/7)x^2 + (36/7)x \right) dx =$$

$$= (27(x^2/7 - x^3/147) - (9/7)x^3 + (18/7)x^2 \Big|_0^7 =$$

$$= (27(7^2/7 - 7^3/147) - (9/7)7^3 + (18/7)7^2 =$$

$$= 27\cdot 2\cdot 7/3 - 9\cdot 49 + 18\cdot 7 = -189$$

Задача 5

Вычислить

$$\iiint\limits_V (4x+8y+8z)\,dxdydz$$, где область V ограничена плоскостями

$x=0$; $y=0$; $z=8$; $z=24$; $x+y=2$

Решение.

Данная область есть прямая треугольная призма,

основания которой есть треугольники со сторонами, являющимися отрезками прямых, проекции которых на плоскость XOY имеют уравнения x=0, y=0, x+y=2. Эти

треугольники лежат в плоскостях z=8, z=24. Поэтому

$$\iiint_V (4x + 8y + 8z)\,dxdydz =$$

$$= \int_8^{24} \left(\int_0^{2} \left(\int_0^{2-x} (4x + 8y + 8z)\,dy \right) dx \right) dz =$$

$$= \int_8^{24} \left(\int_0^{2} (4x(2-x) + 4(2-x)^2 + 8z(2-x))\,dx \right) dz =$$

$$= \int_8^{24} (8x^2/2 - 4x^3/3 - 4(2-x)^3/3 - 8z(2-x)^2/2) \Big|_0^2 \, dz =$$

$$= \int_8^{24} (8\cdot 2^2/2 - 4\cdot 2^3/3 + 4\cdot 2^3/3 + 8z\cdot 2^2/2)\, dz =$$

$$= (2)\int_8^{24} (8 + 8z)\,dz =$$

$$= (2)(8z + 8z^2/2) \Big|_8^{24} =$$

$$= (2)(2\cdot 8\cdot 8 + 4\cdot 8\cdot 64) = 4352$$

Задача 6

Вычислить криволинейный интеграл

$$I = \int_{AB} (-12y+16z)\,dx + (14x-6z)\,dy + (14x-12y)\,dz \quad ,,$$

где AB - отрезок, соединяющий точки A(1,-7,-5) ; B(-9,-6,2) , пробегаемый от точки A к B .

Решение.

Параметризуем контур интегрирования

$AB : x = 1-10t ; \quad y = -7+1t ; \quad z = -5+7t ; \quad 0<=t<=1$

Отсюда

$$I = \int_0^1 [(-12(-7+1t)+16(-5+7t))(-10) +$$

$$+ (14(1-10t)-6(-5+7t))(1) +$$

$$+ (14(1-10t)-12(-7+1t))(7)]dt =$$

$$= (-12(-7+1/2)+16(-5+7/2))(-10) +$$

$$+ (14(1-10/2)-6(-5+7/2))(1) +$$

$$+ (14(1-10/2)-12(-7+1/2))(7) = -433$$

Задача 7

Вычислить криволинейный интеграл первого рода

$$I = \frac{1}{\sqrt{197}} \int_L (10x - 2y - 14z + 8)dL \text{ , ,}$$

где L - отрезок, соединяющий точки

A(3,-8,2) ; B(-7,-4,-7)

Решение.

Параметризуем контур интегрирования

$AB : x = 3-10t ; \quad y = -8+4t ; \quad z = 2-9t ; \quad 0<=t<=1$

Отсюда

$$I = \frac{1}{\sqrt{197}} \int_0^1 [10(3-10t) - 2(-8+4t) - 14(2-9t) +8]\cdot\sqrt{197}\ dt =$$

$= 30-50+16-4-28+63+8 = 35$

Задача 8

Найти скорость наибольшего возрастания поля

$$U(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{3285}}(18x^2 + 15y^2 - 18z^2),$$

в точке A(-7,3,-6)

Решение.

Скорость наибольшего возрастания в точке - это модуль градиента поля в этой точке. Имеем

$$\text{grad } U = (Ux,Uy,Uz) = \frac{1}{\sqrt{3285}}(36x, 30y, -36z),$$

Подставим сюда $x=-7$, $y=3$, $z=-6$ и найдём модуль

$$|\text{grad } U| = |(Ux,Uy,Uz)| = \frac{6}{\sqrt{3285}}\sqrt{3285} = 6,$$

Задача 9

С какой наибольшей скоростью может возрастать функция

$$U(x,y,z) = \frac{-1548}{2\sqrt{1405}}\ln(3x^2 + 9y^2 + 5z + 5),$$

при переходе через точку A(1,-4,2) ?

Решение.

Наибольшая скорость возрастания функции в точке равна модулю её градиента. Найдём grad U.

$$\text{grad } U = (Ux,Uy,Uz) = \frac{-1548}{2\sqrt{1405}}\cdot\frac{1}{3x^2 + 9y^2 + 5z^2 + 5}(6x, 18y, 10z),$$

$x=1$, $y=-4$, $z=2$

$$\left|\operatorname{grad} U(A)\right| = \frac{-9}{\sqrt{1405}}\sqrt{1405} = -9 ,$$

Задача 10

Дано векторное поле

$\overline{F}(M)=(-8x - 2y - z + 6)\overline{i} + (-2x + 7y - 6z - 6)\overline{j} + (4x + 7y - 8z + 9)\overline{k}$

и пирамида с вершинами в точках

O(0,0,0), A(9,0,0), B(0,8,0), C(0,0,-8);

а) проверить, является ли векторное поле $\overline{F}(M)$ соленоидальным;

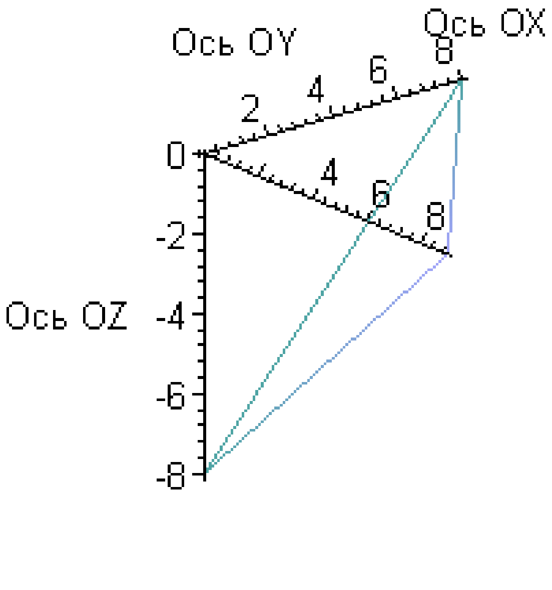
б) по теореме Остроградского-Гаусса найти поток векторного

поля $\overline{F}(M)$ через полную поверхность пирамиды OABC в направлении внешней нормали;

в) проверить, является ли поле $\overline{F}(M)$ потенциальным;

г) по теореме Стокса найти циркуляцию поля $\overline{F}(M)$ по треугольнику ABC в направлении, которое из начала координат видится по часовой стрелке. Сделать чертеж.

Решение.



Дано векторное поле

$\overline{F}(M)=(-8x - 2y - z + 6)\overline{i} + (-2x + 7y - 6z - 6)\overline{j} + (4x + 7y - 8z + 9)\overline{k}$

а) Найдем

$$\operatorname{div}\overline{F}(M)=\left[-8x-2y-z+6\right]'_x+\left[-2x+7y-6z-6\right]'_y+\left[4x+7y-8z+9\right]'_z$$
$$=-9\neq 0$$

векторное поле $\overline{F}(M)$ не является соленоидальным.

б) По формуле Остроградского-Гаусса поток векторного

поля $\overline{F}(M)$ через полную поверхность пирамиды OABC в направлении внешней нормали равен:

$$\Pi=\iiint\limits_{OABC}\operatorname{div}\overline{F}(M)\,dxdydz$$

Так как $\operatorname{div}\overline{F}(M)=-9$, то

$$\Pi=\iiint\limits_{OABC}(-9)\,dxdydz=-9\iiint\limits_{OABC}dxdydz=$$

$$=-9\cdot V_{OABC}=-9\cdot\frac{1}{6}\cdot|9|\cdot|8|\cdot|-8|=-864$$

в) Найдем

$$\operatorname{rot}\overline{F}(M)=\left[\left[4x+7y-8z+9\right]_y-\left[-2x+7y-6z-6\right]_z\right]\overline{i}-$$
$$-\left[\left[4x+7y-8z+9\right]_x-\left[-8x-2y-z+6\right]_z\right]\overline{j}+$$
$$+\left[\left[-2x+7y-6z-6\right]_x-\left[-8x-2y-z+6\right]_y\right]\overline{k}=$$
$$=13\overline{i}-5\overline{j}\neq 0$$

векторное поле $\overline{F}(M)$ не является потенциальным.

г) По формуле Стокса циркуляция векторного

поля $\overline{F}(M)$ по треугольнику OABC в направлении, которое из начала координат видится по часовой стрелке равна:

$$Ц=\iint\limits_{ABC}\operatorname{rot}\overline{F}(M)\cdot\overline{n}^\circ\,dб\ ,$$

где $\overline{n}^\circ$ - единичный нормальный вектор плоскости ABC, выходящий из начала координат в сторону ABC.
Так как $+x/9+y/8-z/8=1$ - уравнение ABC, то

$$\overline{n}^\circ=-(-64\overline{i}-72\overline{j}+72\overline{k})/\sqrt{14464}$$

Откуда

$$\operatorname{rot}\overline{F}(M)\cdot\overline{n}^\circ=(472)/\sqrt{14464}$$

Тогда

$$Ц = [(472)/\sqrt{14464}]\cdot\iint\limits_{ABC} d\sigma =$$

$$= (59/9)\iint\limits_{OAB} dxdy =$$

$$= (59/9)\cdot S_{OAB} = (59/18)\cdot|9|\cdot|8| = 236$$

Задача 11

Найти вычет функции

$$f(z) = \frac{45z^2 + 9z + 36}{5z^3 - 24z^2 - z - 20} \quad \text{в точке} \quad z=5$$

Решение.

Разлагая знаменатель дроби на множители делением углом, получим

$$f(z) = \frac{45z^2 + 9z + 36}{(z - 5)(5z^2 + z + 4)} \quad . \text{ Отсюда}$$

$$\operatorname*{res}_{z=5} f(z) = \lim_{z\to 5} (z-5)f(z) =$$

$$\lim_{z\to 5} \frac{45z^2 + 9z + 36}{5z^2 + z + 4} = 9$$

Задача 12

Вычислить

$$\frac{1}{2\Pi i}\int\limits_{Г} \frac{(z-6)(z+5)}{(z-3)(z-4)}\, dz ,$$

где $z=x+iy$, Г - окружность $|z|=13$

Решение.

По теореме Коши о вычетах

$$1 \quad \ulcorner \; (z-6)(z+5)$$

$$\frac{}{2\Pi i}\int_{\Gamma}\frac{}{(z-3)(z-4)}dz =$$

$$= \operatorname*{res}_{z=3}\frac{(z-6)(z+5)}{(z-3)(z-4)} + \operatorname*{res}_{z=4}\frac{(z-6)(z+5)}{(z-3)(z-4)} =$$

$$= \lim_{z\to 3}\frac{(z-6)(z+5)}{(z-4)} + \lim_{z\to 4}\frac{(z-6)(z+5)}{(z-3)} =$$

$$= \frac{(3-6)(3+5)}{(3-4)} + \frac{(4-6)(4+5)}{(4-3)} = 6$$

Задача 13

Найти мнимую часть $v(x,y)$ аналитической функции

$$f(x) = u(x,y) + i\cdot v(x,y)\ , \quad z=x+iy, \text{ если } f(0)=0$$

$$u(x,y) = 9x^2 - 9y^2 - 6xy - 8x - 2y$$

Решение.

Имеем

$$u_{xx} = 9\ ,$$

$$u_{yy} = -9\ ,$$

откуда $u_{xx} + u_{yy} = 0$, то есть $u(x,y)$ - гармоническая.

б) Из условий Коши-Римана $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ находим

$$v(x,y) = \int_0^y u_x(x,y)dy + \Phi(x)\ ; \quad \int_0^y u_{xx}(x,y)dy + \Phi'(x) = -u_y(x,y)\ ;$$

$$-\int_0^y u_{yy}(x,y)dy + \Phi'(x) = -u_y(x,y)\ ;\ \Phi'(x) = -u_y(x,0)\ ;$$

Г

$$\Phi(x) = -\int u_y(x,0)dx + C ,$$

$$\Phi_y(x) = -\int(-6x - 2)dx + C = 3x^2 - 2x + C$$

$$\int_0^y u_y(x,y)dy = \int_0^y(18x - 6y - 8)dy = -3y^2 + 18xy - 8y + C$$

Отсюда

$$v(x,y) = 3x^2 - 3y^2 + 18xy + 2x - 8y$$

Задача 14

Найти действительную часть $u(x,y)$ аналитической функции

$$f(x) = u(x,y) + i\cdot v(x,y) , \quad z=x+iy, \text{ если } f(0)=0$$

$$v(x,y) = 7x^2 - 7y^2 + 10xy - x + 7y$$

Решение.

Имеем

$$u_{xx} = 7 ,$$

$$u_{yy} = -7 ,$$

откуда $u_{xx} + u_{yy} = 0$, то есть $u(x,y)$ - гармоническая.

б) Из условий Коши-Римана $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ находим

$$u(x,y) = \int_0^x v_y(x,y)dx + \Phi(y) ; \quad \int_0^x v_{yy}(x,y)dx + \Phi'(y) = -v_x(x,y) ;$$

$$-\int_0^x v_{xx}(x,y)dy + \Phi'(x) = -v_x(x,y) ; \Phi'(y) = -v_x(0,y) ;$$

г

$$\Phi(x) = -\int v_x(0,y)\,dy + C,$$

$$\Phi_x(y) = -\int (10y - 1)\,dy + C = -5y^2 + y + C$$

$$\int_0^x v_y(x,y)\,dy = \int_0^x (10x - 14y + 7)\,dx = 5y^2 + 14xy - y + C$$

Отсюда

$$u(x,y) = 5x^2 - 5y^2 - 14xy + 7x + y$$