

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Поволжский государственный университет телекоммуникаций и  
информатики»

Кафедра высшей математики

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ  
КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ IY ПО МАТЕМАТИКЕ И  
СТАТИСТИКЕ  
ДЛЯ СТУДЕНТОВ ЗАОЧНОГО ФАКУЛЬТЕТА

Авторы-составители  
д.ф.м.-н. Блатов И.А.  
доцент, к.ф.м.-н. Шевченко Г.Н.

Самара, 2017

## ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время математические методы широко используются для решения самых разнообразных задач науки, техники и экономики. Значение этих методов существенно возросло в связи с массовым применением компьютеров во всех сферах деятельности.

Настоящие указания содержат подробные рекомендации к выполнению контрольной работы по дисциплине «Математика и статистика».

При изучении этих разделов рекомендуется использовать следующую литературу:

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для вузов. М: Наука, 2012, - т.2.
2. Данко П.Е., Попов А.Г, Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. - М.: Высшая школа, 2011 -, ч.2.
3. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика.-М. Высшая школа, 2010.
4. Вентцель Е.С. Теория вероятностей.-М.: Наука, 2009.
5. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. -М.: Высшая школа, 2010.
6. Вентцель Е.С, Овчаров Л.Л. Теория вероятностей и ее инженерные приложения -М.: Наука, . 2008.

**Одобрено методическим советом ПГУТИ 06.06.2017,  
протокол №83**

Варианты контрольной работы обновляются ежегодно и размещаются на сайте кафедры высшей математики ПГУТИ [vm.psati.ru](http://vm.psati.ru). Номер Вашего варианта совпадает с последними тремя цифрами Вашей зачетной книжки.

### ПРИМЕРНЫЙ ВАРИАНТ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ С РЕШЕНИЕМ

Задача 1

Найти пределы функций, не пользуясь правилом Лопитала

1)

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 9} \frac{5x^3 - 44x^2 - 6x - 27}{9x^3 - 73x^2 - 73x + 9} = \\ & = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{(x - 9)(5x^2 + x + 3)}{(x - 9)(9x^2 + 8x - 1)} = \\ & = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{5x^2 + x + 3}{9x^2 + 8x - 1} = \\ & = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{5 \cdot 9^2 + 1 \cdot 9 + 3}{9 \cdot 9^2 + 8 \cdot 9 - 1} = \\ & = \frac{417}{800} \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-7x^3 - 4x^2 + 6x - 7}{7x^3 + 4x^2 - 6x + 4} = \\ & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-7 - 4 \cdot x^{-1} + 6 \cdot x^{-2} - 7 \cdot x^{-3}}{7 + 4 \cdot x^{-1} - 6 \cdot x^{-2} + 4 \cdot x^{-3}} = \\ & = -1 \end{aligned}$$

3)

$$\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{-8x^2 + 74x - 14} - \sqrt{-2x^2 + 24x - 50}}{\sqrt{x^2 - 7x + 63} - \sqrt{-8x^2 + 71x + 90}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{-8x^2 + 74x - 14} - \sqrt{-2x^2 + 24x - 50}}{\sqrt{x^2 - 7x + 63} - \sqrt{-8x^2 + 71x + 90}} \cdot \frac{\sqrt{x^2 - 7x + 63} + \sqrt{-8x^2 + 71x + 90}}{\sqrt{x^2 - 7x + 63} + \sqrt{-8x^2 + 71x + 90}}$$

$$\cdot \frac{\sqrt{-8x^2 + 74x - 14} + \sqrt{-2x^2 + 24x - 50}}{\sqrt{-8x^2 + 74x - 14} + \sqrt{-2x^2 + 24x - 50}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 9} \frac{(x-9)(-8x+2)+4-(x-9)(-2x+6)-4}{(x-9)(x+2)+81-(x-9)(-8x-1)-81} \cdot \frac{\sqrt{(x-9)(x+2)+81} + \sqrt{(x-9)(-8x-1)+81}}{\sqrt{(x-9)(-8x+2)+4} + \sqrt{(x-9)(-2x+6)+4}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 9} \frac{(x-9)(-6x-4)(\sqrt{(x-9)(x+2)+81} + \sqrt{(x-9)(-8x-1)+81})}{(x-9)(9x+3)(\sqrt{(x-9)(-8x+2)+4} + \sqrt{(x-9)(-2x+6)+4})} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 9} \frac{(-6x-4)(\sqrt{(x-9)(x+2)+81} + \sqrt{(x-9)(-8x-1)+81})}{(9x+3)(\sqrt{(x-9)(-8x+2)+4} + \sqrt{(x-9)(-2x+6)+4})} =$$

$$= \frac{(-6 \cdot 9 - 4) \cdot 2 \cdot (9)}{(9 \cdot 9 + 3) \cdot 2 \cdot (2)} = -87/28$$

4)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x-6}}{3x-3} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x(1-6/x)}}{x(3-3/x)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|x| \sqrt{1-6/x}}{x(3-3/x)} =$$

$$\left\langle \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sqrt{1-6/x}}{x(3-3/x)} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{1-6/x}}{x(3-3/x)} \end{array} \right. =$$

$$= \left\langle \begin{array}{l} \sqrt{1/3} \quad x \rightarrow +\infty \\ -\sqrt{1/3} \quad x \rightarrow -\infty \end{array} \right.$$

r

$$= \begin{cases} 1/3 & x \rightarrow + \\ -1/3 & x \rightarrow - \end{cases}$$

5)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{9x^2 + 4x - 5}{9x^2 + 4x + 4} \right]^{7x^2 - 2x + 5} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[ 1 + \frac{9x^2 + 4x - 5}{9x^2 + 4x + 4} - 1 \right]^{7x^2 - 2x + 5} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[ 1 + \frac{9x^2 + 4x - 5 - 9x^2 - 4x - 4}{9x^2 + 4x + 4} \right]^{7x^2 - 2x + 5} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[ 1 + \frac{-9}{9x^2 + 4x + 4} \right]^{7x^2 - 2x + 5} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \left[ 1 + \frac{-9}{9x^2 + 4x + 4} \right]^{\frac{9x^2 + 4x + 4}{-9}} \right]^{\frac{(-9)(7x^2 - 2x + 5)}{9x^2 + 4x + 4}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \left[ 1 + \frac{-9}{9x^2 + 4x + 4} \right]^{\frac{9x^2 + 4x + 4}{-9}} \right]^{\frac{-63x^2 + 18x - 45}{9x^2 + 4x + 4}} =$$

$$= e^{-7}$$

6)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (-4x - 6) (\ln(-8x + 1) - \ln(-8x + 2)) =$

$x \rightarrow \infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left[ \frac{-8x + 1}{-8x + 2} \right]^{-4x - 6} = \ln \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{-8x + 1}{-8x + 2} \right]^{-4x - 6} =$$

$$\ln \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ 1 + \frac{-8x + 1}{-8x + 2} - 1 \right]^{-4x - 6} =$$

$$\ln \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ 1 + \frac{-8x + 1 + 8x - 2}{-8x + 2} \right]^{-4x - 6} =$$

$$\ln \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ 1 + \frac{-1}{-8x + 2} \right]^{-4x - 6} =$$

r

$\sqrt[4]{4x + 6}$

$$\ln \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \left( 1 + \frac{-1}{-8x+2} \right)^{\frac{-8x+2}{-1}} \right]^{\frac{-8x+2}{-8x+2}} =$$

$$= \ln e^{-1 \cdot (-4) / (-8)} = \ln e^{-1/2}$$

Задача 2

Найти производную  $y'$  данной функции

$$y = 6[ \sin(x)^9 \cdot \arctg(x)^4 ] + 3\ln[ 6\text{ctg}(x)^4 + 4\text{sh}(x)^9 ]$$

$$y' = 24[ \sin(x)^9 \cdot \arctg(x)^3 \cdot \cos(x) ] \cdot [ 9x \cos(x) \cdot \arctg(x)^3 + 3x \sin(x) \cdot (1+x)^6 ] + 3[ 6\text{ctg}(x)^4 + 4\text{sh}(x)^9 ] \cdot [ -24x \sin^3(x) + 36x \text{ch}(x)^8 ]$$

Задача 3

Исследовать методами дифференциального исчисления и построить график функции

$$y = (6x^2 + 5x - 5) \cdot \exp(-x)$$

Функция определена при всех действительных  $x$ .

График данной функции пересекается с осью  $OY$  в точке  $B(0, -5 \cdot \exp(0))$ , с осью  $OX$  в точках

$$A1 \left( \frac{-5/12 - \sqrt{145/12}}{2}; 0 \right);$$

$$A2 \left( \frac{-5/12 + \sqrt{145/12}}{2}; 0 \right);$$

Найдем производные  $y'$  и  $y''$

$$y' = (-6x^2 - 5x + 5) \cdot \exp(-x) + (12x + 5) \cdot \exp(-x)$$

$$y' = (-6x^2 + 7x + 10) \cdot \exp(-x)$$

$$y'' = (6x^2 - 7x - 10) \cdot \exp(-x) + (-12x + 7) \cdot \exp(-x)$$

$$y'' = (6x^2 - 19x - 3) \cdot \exp(-x)$$

Определим точки экстремума и промежутки монотонности функции

Критические точки находим из уравнения

$$-6x^2 + 7x + 10 = 0$$

$$x1 = 2 = 2.000$$

$$x2 = -5/6 = -0.833$$

$$y(x1) = 3.925$$

$$y(x2) = -11.505$$

x	$(-\infty; -0.833)$	$-0.833$	$(-0.833; 2.000)$	$2.000$	$(2.000; +\infty)$
y'	-	0	+	0	-
y	убывает	-11.505	возрастает	3.925	убывает
		min		max	

Определим точки перегиба и промежутки выпуклости и вогнутости функции

Критические точки находим из уравнения

$$6x^2 - 19x - 3 = 0$$

$$x3 = \frac{19/12 - \sqrt{433/12}}{2} = -0.151$$

$$x4 = \frac{19/12 + \sqrt{433/12}}{2} = 3.317$$

$$y(x3) = -6.531$$

$$y(x4) = 2.813$$

x	$(-\infty; -0.151)$	$-0.151$	$(-0.151; 3.317)$	$3.317$	$(3.317; +\infty)$
y					

y'	+	0	-	0	+
y	вогнутый	-6.531	выпуклый	2.813	вогнутый
		перегиб		перегиб	

Найдем асимптоты графика функции.

Вертикальных асимптот график функции не имеет, так как она всюду непрерывна.

Вычислим пределы

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)/x = \lim_{x \rightarrow +\infty} (6x^2 + 5x - 5) \cdot \exp(-x)/x = 0$$

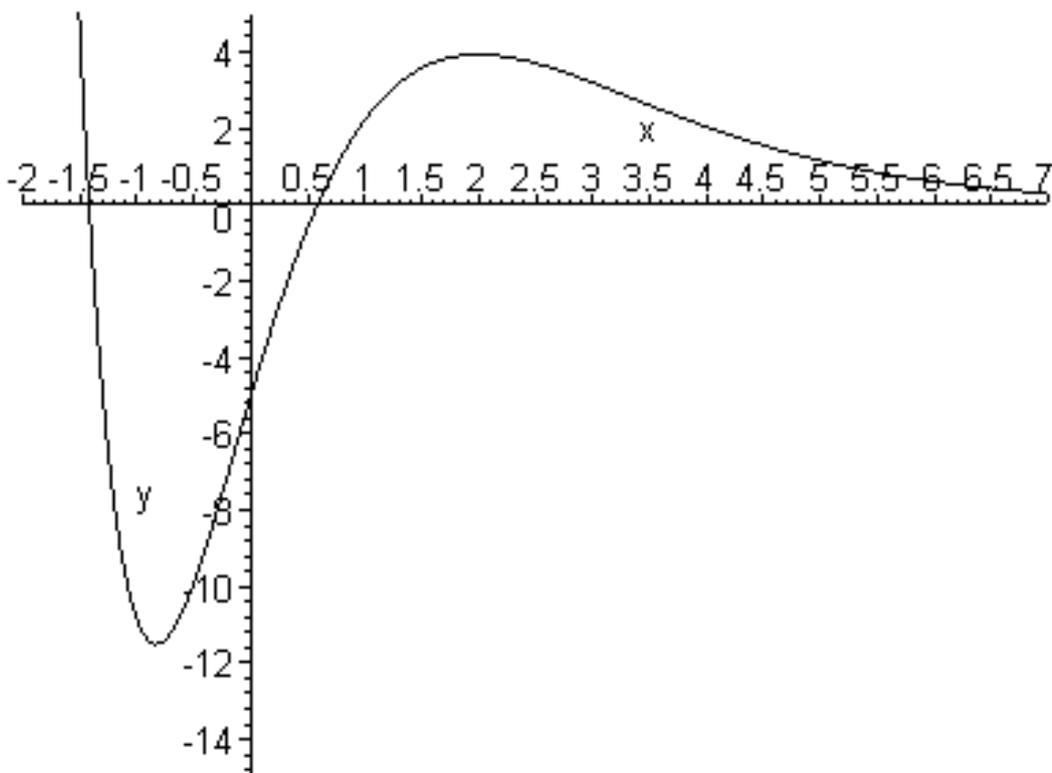
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g \cdot x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} ((6x^2 + 5x - 5) \cdot \exp(-x) - 0 \cdot x) = 0$$

Значит уравнение  $y=0$  является уравнением асимптоты правой ветви графика функции.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)/x = \lim_{x \rightarrow -\infty} (6x^2 + 5x - 5) \cdot \exp(-x)/x = \infty$$

Левая ветвь графика асимптот не имеет

Строим график исходной функции



#### Задача 4

Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x) = -3x^6 + 8x^4 - 4x^2 + 6 \text{ на } [-1; 2]$$

Решение.

Найдем производную функции  $f(x)$  и приравняем ее к нулю

$$f'(x) = (-18x^5 + 32x^3 - 8x) \cdot 2x = 0$$

Найдем корни полученного уравнения

$$x_0 = 0$$

$$x_1 = -\sqrt{(8 + \sqrt{64 - 9 \cdot 4})} / 9 =$$

$$= -\sqrt{8/9 + \sqrt{28}} / 9 = -1.215$$

$$x_2 = -\sqrt{(8 - \sqrt{64 - 9 \cdot 4})} / 9 =$$

$$= -\sqrt{8/9 - \sqrt{28}} / 9 = -0.549$$

$$x_3 = \frac{\sqrt{(8 + \sqrt{64 - 9 \cdot 4})}}{9} =$$

$$= \frac{\sqrt{8/9 + \sqrt{28}/9}}{9} = 1.215$$

$$x_4 = \frac{\sqrt{(8 - \sqrt{64 - 9 \cdot 4})}}{9} =$$

$$= \frac{\sqrt{8/9 - \sqrt{28}/9}}{9} = 0.549$$

Из всех корней выберем  $x_i$ , принадлежащие  $[-1, 2]$

$$f_{\max} = \max\{f(-1), f(x_0), f(x_2), f(x_3), f(x_4), f(2)\} =$$

$$= \max\{7.000, 6.000, 5.439, 7.878, 5.439, -74.000\} = 7.878$$

$$f_{\min} = \min\{f(-1), f(x_0), f(x_2), f(x_3), f(x_4), f(2)\} = -74$$

#### Задача 5

В партии из 19 изделий 8 дефектных. Найти вероятность  $p$  того, что среди выбранных наугад 8 изделий окажется ровно 5 дефектных.

Решение.

Общее число равновероятных исходов равно  $C_{19}^8$  -  
числу сочетаний из 19 по 8.

$$C_{19}^8 = \frac{19!}{8! \cdot 11!}$$

Число благоприятных исходов равно  $C_8^5 \cdot C_{11}^3 = \frac{8!}{5! \cdot 3!} \cdot \frac{11!}{3! \cdot 8!}$

Используя классическое определение вероятности события, получаем

$$P = \frac{C_8^5 \cdot C_{11}^3}{C_{19}^8} = \frac{8! \cdot 11! \cdot 8! \cdot 11!}{19! \cdot 5! \cdot 3! \cdot 3! \cdot 8!}$$

#### Задача 6

Найти вероятность того, что в 6 независимых испытаниях событие появится:

а) ровно 3 раз, б) хотя бы один раз, зная, что в каждом испытании вероятность появления события равна  $\frac{1}{5}$

Решение.

а) По формуле Бернулли

$$P(x=3) = C_6^3 \cdot (1/5)^3 \cdot (4/5)^3 =$$

$$= \frac{6!}{3! \cdot 3!} \cdot (1/5)^3 \cdot (4/5)^3 = 256/3125 = 0.0819200000$$

б) Так как сумма вероятностей противоположных событий равна 1, то есть

$$P(x > 1, x=1) + P(x=0) = 1, \text{ то}$$

$$P(x > 1, x=1) = 1 - P(x=0) =$$

$$= 1 - C_6^0 \cdot (1/5)^0 \cdot (4/5)^6 = 1 - (4/5)^6 = 11529/15625 = 0.7378560000$$

#### Задача 7

Среднее число вызовов, поступающих на АТС за 1 минуту равно 17. Найти вероятность того, что за 25 минут

поступит : а) 25 вызовов; б) хотя бы один вызов. Предполагается, что каждый абонент, независимо от других, может сделать вызов с одинаковой вероятностью в любое время.

Решение.

а) По формуле Пуассона вероятность того, что за 25 минут наступит ровно  $k$  вызовов равна

$$P(X=k) = \frac{a^k}{k!} e^{-a},$$

где  $a$  - среднее число вызовов за 25 минут.  
В нашем случае  $k = 25$ ,  $a = 17 \cdot 25 = 425$

$$P(X=25) = \frac{425^{25}}{25!} e^{-425}.$$

б) Вероятность хотя бы одного вызова найдем по формуле

$$\begin{aligned} P(X>1, X=1) &= 1 - P(X=0) = \\ &= 1 - \frac{425^0}{0!} e^{-425} = 1 - e^{-425}. \end{aligned}$$

Задача 8

8 датчиков посылают сигналы в общий канал связи в пропорциях  $5 : 1 : 3 : 5 : 3 : 8 : 5 : 5$ . Вероятность получить искаженный сигнал от каждого датчика равна соответственно :

- 0.01 ; 0.25 ; 0.23 ; 0.30 ; 0.44 ; 0.23 ; 0.09 ; 0.30 ;  
1) Какова вероятность получить искаженный сигнал в общем канале связи ?  
2) В общем канале связи получен искаженный сигнал. Какова вероятность, что этот сигнал от 3-го датчика ?

Решение.

1) Пусть  $A$  - событие, состоящее в том, что в общем канале связи получен искаженный сигнал.

$A_i$  - событие, состоящее в том, что сигнал, полученный в общем канале связи, послан  $i$ -ым датчиком ( $i=1, \dots, k$ ).

Тогда

$$P(A_1) = 5 : (5+1+3+5+3+8+5+5) = 1/7$$

$$P(A_2) = 1 : (5+1+3+5+3+8+5+5) = 1/35$$

$$P(A_3) = 3 : (5+1+3+5+3+8+5+5) = 3/35$$

$$P(A_4) = 5 : (5+1+3+5+3+8+5+5) = 1/7$$

$$P(A_5) = 3 : (5+1+3+5+3+8+5+5) = 3/35$$

$$P(A_6) = 8 : (5+1+3+5+3+8+5+5) = 8/35$$

$$P(A_7) = 5 : (5+1+3+5+3+8+5+5) = 1/7$$

$$P(A_8) = 5 : (5+1+3+5+3+8+5+5) = 1/7$$

По данным задачи известны условные вероятности

$$P(A_1|A) = 0.01$$

$$P(A_2|A) = 0.25$$

$$P(A_3|A) = 0.23$$

$$P(A_4|A) = 0.30$$

$$P(A_5) = 0.44$$

$$P(A_6) = 0.23$$

$$P(A_7) = 0.09$$

$$P(A_8) = 0.30$$

По формуле полной вероятности находим

$$P(A) = \sum_{i=1}^8 P(A_i) \cdot P(A_i) = \frac{5 \cdot 0.01 + 1 \cdot 0.25 + 3 \cdot 0.23 + 5 \cdot 0.30 + 3 \cdot 0.44 + 8 \cdot 0.23 + 5 \cdot 0.09 + 5 \cdot 0.30}{5 + 1 + 3 + 5 + 3 + 8 + 5 + 5} = 0.1857$$

2) Если в общем канале связи получен искаженный сигнал, то вероятность, что этот сигнал послан 3-м датчиком находится по формуле Байеса:

$$P(A_3 | A) = \frac{P(A_3) \cdot P(A)}{P(A)} = \frac{3 \cdot 0.23}{5 \cdot 0.01 + 1 \cdot 0.25 + 3 \cdot 0.23 + 5 \cdot 0.30 + 3 \cdot 0.44 + 8 \cdot 0.23 + 5 \cdot 0.09 + 5 \cdot 0.30} = 0.1062$$

Задача 9

Случайная величина  $X$  имеет закон распределения,

$X$	48	40
$P$	1/4	3/4

Найти математическое ожидание  $M[X]$  и дисперсию  $D[X]$ .

Решение.

Согласно определению математического ожидания имеем

$$M[X] = x_1 P(x_1) + x_2 P(x_2)$$

$$M[X] = 48(1/4) + 40(3/4) = 42$$

Для нахождения дисперсии воспользуемся формулой

$$D[X] = M[X^2] - (M[X])^2$$

$$M[X^2] = (x_1)^2 P(x_1) + (x_2)^2 P(x_2)$$

$$M[X^2] = 2304(1/4) + 1600(3/4) = 1776$$

$$D[X] = 1776 - 1764 = 12$$

Задача 10

Найти вероятность попадания в заданный интервал  $(-68/19 ; -33/17)$  значений нормально распределенной случайной величины  $X$ , если математическое ожидание  $M(X) = 6/61$ , среднеквадратическое отклонение  $\sigma(X) = 87/41$

Решение.

$$P(X \in (-68/19 ; -33/17)) = \Phi\left(\frac{-33/17 - 6/61}{87/41}\right) - \Phi\left(\frac{-68/19 - 6/61}{87/41}\right) =$$

$$= \Phi(-0.961) - \Phi(-1.733) = -0.3318 - (-0.4585) = 0.1267$$

где

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt \quad - \text{ функция Лапласа}$$

Задача 11

Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания нормального распределения с надежностью 0.910, зная выборочную среднюю 50, объем выборки 519 и среднеквадратическое отклонение 20.

Решение.

Найдем по таблице значение аргумента  $t$ , для которого функция Лапласа

$$\Phi(t) = 0.910/2.$$

Получили, что  $t = 1.695556$ .

В силу условий задачи следует взять выборочную среднюю 50 и тогда искомым доверительный интервал будет следующим

$$(50 - 20t/\sqrt{519}; 50 + 20t/\sqrt{519})$$

то есть

$$(48.511467; 51.488533).$$

Задача 12

Случайные величины  $X$  и  $Y$  заданы плотностями распределения вероятностей

$$f(x) = \begin{cases} 1/9 - x/162, & x \in [0;18] \\ 0, & x \notin [0;18] \end{cases}$$

$$g(y) = \begin{cases} 1/3 - y/18, & y \in [0;6] \\ 0, & y \notin [0;6] \end{cases}$$

Найти дисперсию  $D[7X + 6Y + 7]$

Решение.

По формуле для дисперсии независимых случайных величин имеем

$$D[7X + 6Y + 7] = D[7X] + D[6Y] + D[7] = 49D[X] + 36D[Y]$$

Найдём  $D[X]$  и  $D[Y]$ . Имеем

$$M[X] = \int_0^{18} x f(x) dx = \int_0^{18} (x/9 - x^2/162) dx = \left[ x^2/18 - x^3/486 \right]_0^{18} = 324/18 - 5832/486 = 18 - 12 = 6$$

$$M[Y] = \int_0^6 yg(y) dy = \int_0^6 (y/3 - y^2/18) dy = \left[ y^2/6 - y^3/54 \right]_0^6 = 36/6 - 216/54 = 6 - 4 = 2$$

$$M[X^2] = \int_0^{18} x^2 f(x) dx = \int_0^{18} (x^2/9 - x^3/162) dx = \left[ x^3/27 - x^4/648 \right]_0^{18} = 5832/27 - 104976/648 = 216 - 162 = 54$$

$$M[Y] = \int_0^6 y g(y) dy = \int_0^6 (y^2/3 - y^3/18) dy =$$

$$= y^3/9 - y^4/72 \Big|_0^6 = 216/9 - 1296/72 = 24 - 18 = 6$$

Откуда

$$D[X] = M[X^2] - (M[X])^2 = 54 - 36 = 18$$

$$D[Y] = M[Y^2] - (M[Y])^2 = 6 - 4 = 2$$

$$D[7X + 6Y + 7] = 49 \cdot 18 + 36 \cdot 2 = 882 + 72 = 954$$

#### Задача 13

В ящике имеются 6 билетов по 100 рублей, 1 билет стоимостью по 200 рублей и 8 билетов по 300 рублей. Наугад берутся три билета. Найти вероятность того, что все три билета имеют разную стоимость.

Решение.

Пусть А - событие, состоящее в том, что взятый билет стоит 100 рублей, В - 200 рублей, С - 300 рублей. Тогда событие, состоящее в том, что все билеты имеют разную стоимость - это событие АВС. По формуле произведения независимых случайных событий и согласно классическому определению вероятностей имеем

$$P(ABC) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

$$P(A) = 6 / (6+1+8)$$

$$P(B) = 1 / (6+1+8-1)$$

$$P(C) = 8 / (6+1+8-2)$$

$$P(ABC) = (6/15) \cdot (1/14) \cdot (8/13) = 8/455$$

#### Задача 14

Случайная величина X подчинена нормальному закону:

$$f(x) = \frac{1}{8\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{128}}$$

Найти математическое ожидание величины

$$Y = 6X^3 + 4X^2 + 4X + 7$$

Решение.

Поскольку  $f(x)$  чётная функция, а

$$M[X^k] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x) dx, \text{ то при нечётных } k \text{ } M[X^k] = 0, \text{ то есть}$$

$$M[Y] = M[4X^3 + 7] = 4M[X^3] + M[7] = 4M[X^3] + 7$$

$$M[X^2] = D[X] + (M[X])^2 = D[X] = 64$$

$$M[Y] = 4 \cdot 64 + 7 = 263$$

#### Задача 15

В двух урнах находятся шары, отличающиеся только цветом, причём в первой урне 3 белых шаров и 6 чёрных, а во второй 7 белых и 2 чёрных. Из обеих урн извлекаются наугад по одному шару. Найти вероятность того, что оба шара одного цвета.

Решение.

Пусть А - событие, состоящее в том, что извлечены два белых шара, а В - событие, состоящее в том, что извлечены два чёрных шара. Согласно классическому определению вероятности и формуле вероятности произведения независимых случайных событий

$$P(A) = \frac{3}{3+6} \cdot \frac{7}{7+2} = 7/27$$

$$P(B) = \frac{6}{3+6} \cdot \frac{2}{7+2} = 4/27$$

По формуле вероятности суммы несовместных событий

$$P(A+B) = 7/27 + 4/27 = 11/27$$

Задача 16

Экзаменационный билет содержит три вопроса. Вероятности того, что студент ответит на первый и второй вопросы равны 6/7 и 8/9 а на третий - 7/8. Студент сдаст экзамен, если ответит на два любых вопроса. Найти вероятность того, что студент не сдаст экзамен.

Решение.

Пусть А, В, С - события, состоящие в том, что студент правильно ответил

на первый, второй и третий вопрос соответственно,  $\bar{A}$ ,  $\bar{B}$ ,  $\bar{C}$  - противоположные к ним события. Тогда событие, состоящее в том, что студент не сдал

экзамен есть  $D = \bar{A} \bar{B} \bar{C} + A \bar{B} \bar{C} + \bar{A} B \bar{C} + \bar{A} \bar{B} C$ . По формулам вероятности суммы несовместных случайных событий, вероятности произведения независимых случайных событий и вероятности противоположного события имеем:

$$\begin{aligned} P(D) &= P(\bar{A} \bar{B} \bar{C} + A \bar{B} \bar{C} + \bar{A} B \bar{C} + \bar{A} \bar{B} C) = \\ &= P(\bar{A} \bar{B} \bar{C}) + P(A \bar{B} \bar{C}) + P(\bar{A} B \bar{C}) + P(\bar{A} \bar{B} C) = \\ &= P(\bar{A})P(\bar{B})P(\bar{C}) + P(A)P(\bar{B})P(\bar{C}) + P(\bar{A})P(B)P(\bar{C}) + P(\bar{A})P(\bar{B})P(C) = \\ P(D) &= P(\bar{A} \bar{B} \bar{C} + A \bar{B} \bar{C} + \bar{A} B \bar{C} + \bar{A} \bar{B} C) = \\ &= \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{8} + \frac{6}{7} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{7}{8} = 11/252 \end{aligned}$$

Задача 17

Имеются две случайные величины X и Y, связанные соотношениями  $Y = 1X + 6$ . Числовые характеристики X заданы:  $M[X]=6$ ,  $D[X]=1$ . Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины Y.

Решение.

Согласно свойствам математического ожидания и дисперсии имеем

$$M[Y] = M[1X+6] = M[1X] + M[6] = 1M[X] + M[6] = 7$$

$$D[Y] = D[1X+6] = D[1X] + D[6] = D[1X] = 1D[X] = 1$$