Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики»

Кафедра высшей математики

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ IY ПО МАТЕМАТИКЕ И СТАТИСТИКЕ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ЗАОЧНОГО ФАКУЛЬТЕТА

Авторы-составители
д.ф.м.-н. Блатов И.А.
доцент, к.ф.м.-н. Шевченко Г.Н.

Самара, 2017

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время математические методы широко используются для решения самых разнообразных задач науки, техники и экономики. Значение этих методов существенно возросло в связи с массовым применением компьютеров во всех сферах деятельности.

Настоящие указания содержат подробные рекомендации к выполнению контрольной работы по дисциплине «Математика и статистика».

При изучении этих разделов рекомендуется использовать следующую литературу:

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. М: Наука, 2012,- т.2.
2. Данко П.Е., Попов А.Г, Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. - М.: Высшая школа, 2011 -, ч.2.
3. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика.–М. Высшая школа, 2010.
4. Вентцель Е.С. Теория вероятностей.-М.: Наука, 2009.
5. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. –М.: Высшая школа, 2010.
6. Вентцель Е.С, Овчаров Л.Л. Теория вероятностей и ее инженерные приложения –М.: Наука,. 2008.

Одобрено методическим советом ПГУТИ 06.06.2017, протокол №83

Варианты контрольной работы обновляются ежегодно и размещаются на сайте кафедры высшей математики ПГУТИ vm.psati.ru. Номер Вашего варианта совпадает с последними тремя цифрами Вашей зачетной книжки.

ПРИМЕРНЫЙ ВАРИАНТ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ С РЕШЕНИЕМ

Задача 1

Найти пределы функций, не пользуясь правилом Лопиталя

1)

$$\lim_{x\to 9}\frac{5x^3-44x^2-6x-27}{9x^3-73x^2-73x+9}=$$

$$=\lim_{x\to 9}\frac{(x-9)(5x^2+x+3)}{(x-9)(9x^2+8x-1)}=$$

$$=\lim_{x\to 9}\frac{5x^2+x+3}{9x^2+8x-1}=$$

$$=\lim_{x\to 9}\frac{5\cdot 9^2+1\cdot 9+3}{9\cdot 9^2+8\cdot 9-1}=$$

$$=\frac{417}{800}$$

2)

$$\lim_{x\to \infty}\frac{-7x^3-4x^2+6x-7}{7x^3+4x^2-6x+4}=$$

$$\lim_{x\to \infty}\frac{-7-4\cdot x^{-1}+6\cdot x^{-2}-7\cdot x^{-3}}{7+4\cdot x^{-1}-6\cdot x^{-2}+4\cdot x^{-3}}=$$

$$=-1$$

3)

$$\lim_{x\to 9} \frac{\sqrt{-8x^2+74x-14}-\sqrt{-2x^2+24x-50}}{\sqrt{x^2-7x+63}-\sqrt{-8x^2+71x+90}} =$$

$$\lim_{x\to 9} \frac{\sqrt{-8x^2+74x-14}-\sqrt{-2x^2+24x-50}}{\sqrt{x^2-7x+63}-\sqrt{-8x^2+71x+90}} \cdot \frac{\sqrt{x^2-7x+63}+\sqrt{-8x^2+71x+90}}{\sqrt{x^2-7x+63}+\sqrt{-8x^2+71x+90}} \cdot$$

$$\cdot \frac{\sqrt{-8x^2+74x-14}+\sqrt{-2x^2+24x-50}}{\sqrt{-8x^2+74x-14}+\sqrt{-2x^2+24x-50}} =$$

$$\lim_{x\to 9} \frac{(x-9)(-8x+2)+4-(x-9)(-2x+6)-4}{(x-9)(x+2)+81-(x-9)(-8x-1)-81} \cdot \frac{\sqrt{(x-9)(x+2)+81}+\sqrt{(x-9)(-8x-1)+81}}{\sqrt{(x-9)(-8x+2)+4}+\sqrt{(x-9)(-2x+6)+4}} =$$

$$\lim_{x\to 9} \frac{(x-9)(-6x-4)\left(\sqrt{(x-9)(x+2)+81}+\sqrt{(x-9)(-8x-1)+81}\right)}{(x-9)(9x+3)\left(\sqrt{(x-9)(-8x+2)+4}+\sqrt{(x-9)(-2x+6)+4}\right)} =$$

$$\lim_{x\to 9} \frac{(-6x-4)\left(\sqrt{(x-9)(x+2)+81}+\sqrt{(x-9)(-8x-1)+81}\right)}{(9x+3)\left(\sqrt{(x-9)(-8x+2)+4}+\sqrt{(x-9)(-2x+6)+4}\right)} =$$

$$= \frac{(-6\cdot 9-4)\cdot 2\cdot (9)}{(9\cdot 9+3)\cdot 2\cdot (2)} = -87/28$$

4)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2-6}}{3x-3} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2(1-6\cdot x^{-2})}}{x(3-3\cdot x^{-1})} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{|x|\sqrt{1-6\cdot x^{-2})}}{x(3-3\cdot x^{-1})} =$$

$$\begin{cases} \lim_{x\to+\infty} \dfrac{x\sqrt{1-6\cdot x^{-2})}}{x(3-3\cdot x^{-1})} \\ \lim_{x\to-\infty} \dfrac{-x\sqrt{1-6\cdot x^{-2})}}{x(3-3\cdot x^{-1})} \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \sqrt{1}/3 & x\to +\infty \\ -\sqrt{1}/3 & x\to -\infty \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1/3 & x \to + \\ -1/3 & x \to - \end{cases}$$

5)

$$\lim_{x \to \infty} \left[\frac{9x^2 + 4x - 5}{9x^2 + 4x + 4} \right]^{7x^2 - 2x + 5} =$$

$$\lim_{x \to \infty} \left[1 + \frac{9x^2 + 4x - 5}{9x^2 + 4x + 4} - 1 \right]^{7x^2 - 2x + 5} =$$

$$\lim_{x \to \infty} \left[1 + \frac{9x^2 + 4x - 5 - 9x^2 - 4x - 4}{9x^2 + 4x + 4} \right]^{7x^2 - 2x + 5} =$$

$$\lim_{x \to \infty} \left[1 + \frac{-9}{9x^2 + 4x + 4} \right]^{7x^2 - 2x + 5} =$$

$$\lim_{x \to \infty} \left[\left[1 + \frac{-9}{9x^2 + 4x + 4} \right]^{\frac{9x^2 + 4x + 4}{-9}} \right]^{\frac{(-9)(7x^2 - 2x + 5)}{9x^2 + 4x + 4}} =$$

$$\lim_{x \to \infty} \left[\left[1 + \frac{-9}{9x^2 + 4x + 4} \right]^{\frac{9x^2 + 4x + 4}{-9}} \right]^{\frac{-63x^2 + 18x - 45}{9x^2 + 4x + 4}} =$$

$$= e^{-7}$$

6)

$$\lim_{x \to \infty} (-4x - 6)(\mathrm{Ln}(-8x + 1) - \mathrm{Ln}(-8x + 2)) =$$

$$\lim_{x \to \infty} \mathrm{Ln} \left[\frac{-8x + 1}{-8x + 2} \right]^{-4x - 6} = \mathrm{Ln} \lim_{x \to \infty} \left[\frac{-8x + 1}{-8x + 2} \right]^{-4x - 6} =$$

$$\mathrm{Ln} \lim_{x \to \infty} \left[1 + \frac{-8x + 1}{-8x + 2} - 1 \right]^{-4x - 6} =$$

$$\mathrm{Ln} \lim_{x \to \infty} \left[1 + \frac{-8x + 1 + 8x - 2}{-8x + 2} \right]^{-4x - 6} =$$

$$\mathrm{Ln} \lim_{x \to \infty} \left[1 + \frac{-1}{-8x + 2} \right]^{-4x - 6} =$$

$$\left[\qquad \right]^{4x + 6}$$

$$\operatorname{Ln}\lim_{x\to\infty}\left[\left[1+\frac{-1}{-8x+2}\right]^{\frac{-8x+2}{-1}}\right]^{\frac{\quad}{-8x+2}} =$$

$$= \operatorname{Ln} e^{-1\cdot(-4)/(-8)} = -1/2$$

Задача 2

Найти производную y' данной функции

$$y = 6[\sin(x^9)\cdot\operatorname{arctg}(x^3)]^4 + 3\operatorname{Ln}[6\operatorname{ctg}(x^4)+4\operatorname{sh}(x^9)]$$

$$y' = 24[\sin(x^9)\cdot\operatorname{arctg}(x^3)]^3\cdot[9x^8\cos(x^9)\cdot\operatorname{arctg}(x^3) + 3x^2\sin(x^9)\cdot(1+x^6)^{-1}]$$
$$+ 3[6\operatorname{ctg}(x^4)+4\operatorname{sh}(x^9)]^{-1}\cdot[-24x^3\sin^{-2}(x^4)+36x^8\operatorname{ch}(x^9)]$$

Задача 3

Исследовать методами дифференциального исчисления и построить график функции

$$y = (6x^2 + 5x - 5)\cdot\exp(-x)$$

Функция определена при всех действительных x .
График данной функции пересекается с осью OY в точке B(0 , -5·exp(0)),
с осью OX в точках

A1 ($-5/12-\sqrt{145}/12$; 0) ;

A2 ($-5/12+\sqrt{145}/12$; 0) ;

Найдем производные y' и y''

$$y' = (-6x^2 - 5x + 5)\cdot\exp(-x) + (12x + 5)\cdot\exp(-x)$$

$$y' = (-6x^2 + 7x + 10)\cdot\exp(-x)$$

$$y'' = (6x^2 - 7x - 10)\cdot\exp(-x) + (-12x + 7)\cdot\exp(-x)$$

$$y'' = (6x^2 - 19x - 3)\cdot\exp(-x)$$

Определим точки экстремума и промежутки монотонности функции
Критические точки находим из уравнения

$$-6x^2 + 7x + 10 = 0$$

x1 = 2 = 2.000

x2 = -5/6 = -0.833

y(x1) = 3.925
y(x2) = -11.505

x	(-OO ;-0.833)	-0.833	(-0.833 ;2.000)	2.000	(2.000;+OO)
y'	-	0	+	0	-
y	убывает	-11.505	возрастает	3.925	убывает
		min		max	

Определим точки перегиба и
промежутки выпуклости и вогнутости функции

Критические точки находим из уравнения

$$6x^2 - 19x - 3 = 0$$

x3 = $19/12-\sqrt{433}/12$ = -0.151

x4 = $19/12+\sqrt{433}/12$ = 3.317
y(x3) = -6.531
y(x4) = 2.813

x	(-OO ;-0.151)	-0.151	(-0.151 ;3.317)	3.317	(3.317;+OO)

y'	+	0	-	0	+
y	вогнутый	-6.531	выпуклый	2.813	вогнутый
		перегиб		перегиб	

Найдем асимптоты графика функции.
Вертикальных асимптот график функции не имеет, так как она всюду непрерывна.
Вычислим пределы

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)/x = \lim_{x\to+\infty} (6x^2 + 5x - 5)\cdot\exp(-x)/x = 0$$

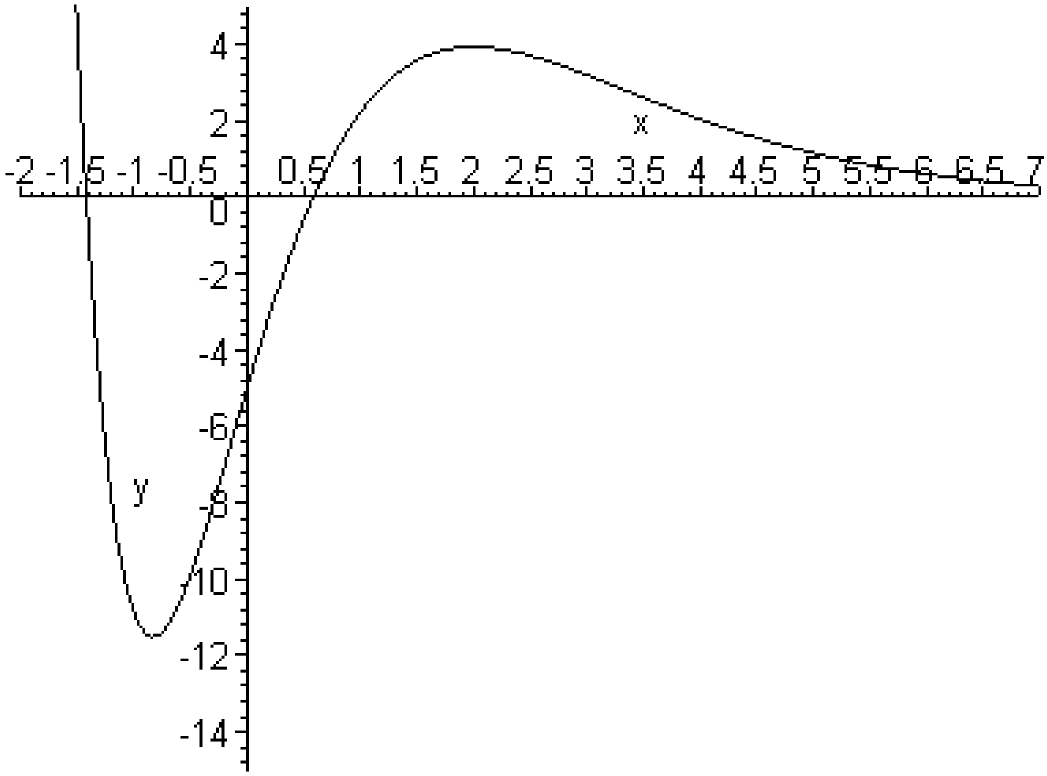
$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - g\cdot x) = \lim_{x\to+\infty} ((6x^2 + 5x - 5)\cdot\exp(-x) - 0\cdot x) = 0$$

Значит уравнение y=0 является уравнением асимптоты правой ветви графика функции.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)/x = \lim_{x\to-\infty} (6x^2 + 5x - 5)\cdot\exp(-x)/x = \infty$$

Левая ветвь графика асимптот не имеет

Строим график исходной функции



Задача 4
Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x) = -3x^6 + 8x^4 - 4x^2 + 6 \quad \text{на } [-1\ ;\ 2]$$

Решение.
Найдем производную функции f(x) и приравняем ее к нулю

$$f'(x) = (-9x^4 + 16x^2 - 4)\cdot 2x = 0$$

Найдем корни полученного уравнения

$x0 = 0$

$$x1 = -\sqrt{(8+\sqrt{64-9\cdot 4})/9} =$$

$$= -\sqrt{8/9+\sqrt{28}/9} = -1.215$$

$$x2 = -\sqrt{(8-\sqrt{64-9\cdot 4})/9} =$$

$$= -\sqrt{8/9-\sqrt{28}/9} = -0.549$$

$$x_3 = \sqrt{(8+\sqrt{64-9\cdot4})/9} =$$

$$= \sqrt{8/9+\sqrt{28}/9} = 1.215$$

$$x_4 = \sqrt{(8-\sqrt{64-9\cdot4})/9} =$$

$$= \sqrt{8/9-\sqrt{28}/9} = 0.549$$

Из всех корней выберем Xi, принадлежащие [-1,2]

$$f_{max} = \max\{ f(-1) , f(x0) , f(x2) , f(x3) , f(x4) , f(2) \} =$$

$$=\max\{ 7.000, 6.000, 5.439, 7.878, 5.439, -74.000\}=7.878$$

$$f_{min} = \min\{ f(-1) , f(x0) , f(x2) , f(x3) , f(x4) , f(2) \} = -74$$

Задача 5

В партии из 19 изделий 8 дефектных. Найти вероятность p того, что среди выбранных наугад 8 изделий окажется ровно 5 дефектных.

Решение.

Общее число равновозможных исходов равно C_{19}^{8} - числу сочетаний из 19 по 8.

$$C_{19}^{8} = \frac{19!}{8!\ 11!}$$

Число благоприятных исходов равно $C_8^5 \cdot C_{11}^3 = \frac{8!}{5!\ 3!}\cdot\frac{11!}{3!\ 8!}$

Используя классическое определение вероятности события, получаем

$$P = \frac{C_8^5 . C_{11}^3}{C_{19}^8} = \frac{8!\cdot11!\cdot8!\cdot11!}{19!\cdot5!\cdot3!\cdot3!\ 8!} .$$

Задача 6

Найти вероятность того, что в 6 независимых испытаниях событие появится :
а) ровно 3 раз, b) хотя бы один раз, зная, что в каждом испытании вероятность появления события равна $\frac{1}{5}$

Решение.

а) По формуле Бернулли

$$P_6(x=3) = C_6^3\cdot(1/5)^3\cdot(4/5)^3 =$$

$$= \frac{6!}{3!\cdot3!}\cdot(1/5)^3\cdot(4/5)^3 = 256/3125 = 0.0819200000$$

б) Так как сумма вероятностей противоположных событий равна 1, то есть

$$P_6(x>1,x=1) + P_6(x=0) =1, \text{ то}$$

$$P_6(x>1,x=1) = 1 - P_6(x=0) =$$

$$= 1 - C_6^0\cdot(1/5)^0\cdot(4/5)^{6-0} = 1 - (4/5)^6 = 11529/15625 = 0.7378560000$$

Задача 7

Среднее число вызовов, поступающих на АТС за 1 минуту равно 17. Найти вероятность того, что за 25 минут поступит : а) 25 вызовов; б) хотя бы один вызов. Предполагается, что каждый абонент, независимо от других, может сделать вызов с одинаковой вероятностью в любое время.

Решение.

а) По формуле Пуассона вероятность того, что за 25 минут наступит ровно k вызовов равна

$$P(X=k) = \frac{a^k}{k!} e^{-a},$$

где a - среднее число вызовов за 25 минут.
В нашем случае k = 25, a = 17·25=425

$$P(X=25) = \frac{425^{25}}{25!} e^{-425}.$$

б) Вероятность хотя бы одного вызова найдем по формуле

$$P(X>1,X=1) = 1 - P(X=0) =$$

$$= 1 - \frac{425^{0}}{0!} e^{-425} = 1 - e^{-425}.$$

Задача 8

8 датчиков посылают сигналы в общий канал связи в пропорциях 5 : 1 : 3 : 5 : 3 : 8 : 5 : 5 .
Вероятность получить искаженный сигнал от каждого датчика равна соответственно :
0.01 ; 0.25 ; 0.23 ; 0.30 ; 0.44 ; 0.23 ; 0.09 ; 0.30 ;
1) Какова вероятность получить искаженный сигнал в общем канале связи ?
2) В общем канале связи получен искаженный сигнал. Какова вероятность, что этот сигнал от 3-го датчика ?

Решение.

1) Пусть A - событие, состоящее в том, что о общем канале связи получен искаженный сигнал.

A_i - событие, состоящее в том, что сигнал, полученный в общем канале связи, послан i-ым датчиком (i=1,...,k).

Тогда

$P(A_1) = 5:(5+1+3+5+3+8+5+5) = 1/7$

$P(A_2) = 1:(5+1+3+5+3+8+5+5) = 1/35$

$P(A_3) = 3:(5+1+3+5+3+8+5+5) = 3/35$

$P(A_4) = 5:(5+1+3+5+3+8+5+5) = 1/7$

$P(A_5) = 3:(5+1+3+5+3+8+5+5) = 3/35$

$P(A_6) = 8:(5+1+3+5+3+8+5+5) = 8/35$

$P(A_7) = 5:(5+1+3+5+3+8+5+5) = 1/7$

$P(A_8) = 5:(5+1+3+5+3+8+5+5) = 1/7$

По данным задачи известны условные вероятности

$P_{A_1}(A) = 0.01$

$P_{A_2}(A) = 0.25$

$P_{A_3}(A) = 0.23$

$P_{A_4}(A) = 0.30$

$P_{A_5}(A) = 0.44$

$P_{A_6}(A) = 0.23$

$P_{A_7}(A) = 0.09$

$P_{A_8}(A) = 0.30$

По формуле полной вероятности находим

$$P(A) = \sum_{i=1}^{8} P(A_i)\cdot P_{A_i}(A) =$$

$$= \frac{5\cdot0.01+1\cdot0.25+3\cdot0.23+5\cdot0.30+3\cdot0.44+8\cdot0.23+5\cdot0.09+5\cdot0.30}{5 + 1 + 3 + 5 + 3 + 8 + 5 + 5} = 0.1857$$

2) Если в общем канале связи получен искаженный сигнал, то вероятность, что этот сигнал послан 3-ым датчиком находится по формуле Байеса:

$$P_A(A_3) = \frac{P(A_3)\cdot P_{A_3}(A)}{P(A)} =$$

$$= \frac{3\cdot0.23}{5\cdot0.01+1\cdot0.25+3\cdot0.23+5\cdot0.30+3\cdot0.44+8\cdot0.23+5\cdot0.09+5\cdot0.30} = 0.1062$$

Задача 9

Случайная величина X имеет закон распределения,

X	48	40
P	1/4	3/4

Найти математическое ожидание M[X] и дисперсию D[X].

Решение.

Согласно определению математического ожидания имеем

$M[X] = x1\ P(x1) + x2\ P(x2)$

$M[X] = 48(1/4) + 40(3/4) = 42$

Для нахождения дисперсии воспользуемся формулой

$$D[X] = M[X^2] - (M[X])^2 .$$

$$M[X^2] = (x1)^2\ P(x1) + (x2)^2\ P(x2)$$

$$M[X^2] = 2304(1/4) + 1600(3/4) = 1776$$

$$D[X] = 1776 - 1764 = 12$$

Задача 10

Найти вероятность попадания в заданный интервал (-68/19 ; -33/17) значений нормально распределенной случайной величины X, если математическое ожидание M(X) = 6/61, среднеквадратическое отклонение g(X) = 87/41

Решение.

$$P(X \in (-68/19 ; -33/17) = \Phi\left[\frac{-33/17 - 6/61}{87/41}\right] - \Phi\left[\frac{-68/19 - 6/61}{87/41}\right] =$$

$= \Phi(-0.961) - \Phi(-1.733) = -0.3318 - (-0.4585) =$

$= 0.1267$

где

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2}\, dt \quad \text{- функция Лапласа}$$

Задача 11

Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания нормального распределения с надежностью 0.910, зная выборочную среднюю 50, объем выборки 519 и среднеквадратическое отклонение 20.

Решение.
Найдем по таблице значение аргумента t, для которого функция Лапласа

$\Phi(t)=0.910/2.$

Получили, что $t = 1.695556$.

В силу условий задачи следует взять выборочную среднюю 50 и тогда искомый доверительный интервал будет следующим

$(50 - 20t/\sqrt{519}\ ;\ 50 + 20t/\sqrt{519})$

то есть

$(48.511467\ ;\ 51.488533)$.

Задача 12

Случайные величины X и Y заданы плотностями распределения вероятностей

$$f(x) = \begin{cases} 1/9 - x/162, & x \in [0;18] \\ 0, & x \bar{\in} [0;18] \end{cases}$$

$$g(y) = \begin{cases} 1/3 - y/18, & y \in [0;6] \\ 0, & y \bar{\in} [0;6] \end{cases}$$

Найти дисперсию $D[7X + 6Y + 7]$

Решение.
По формуле для дисперсии независимых случайных величин имеем

$D[7X + 6Y + 7] = D[7X] + D[6Y] + D[7] = 49D[X] + 36D[Y]$

Найдём D[X] и D[Y]. Имеем

$$M[X] = \int_0^{18} xf(x)dx = \int_0^{18} (x/9 - x^2/162)dx =$$

$$= x^2/18 - x^3/486 \Big|_0^{18} = 324/18 - 5832/486 = 18 - 12 = 6$$

$$M[Y] = \int_0^{6} yg(y)dy = \int_0^{6} (y/3 - y^2/18)dy =$$

$$= y^2/6 - y^3/54 \Big|_0^{6} = 36/6 - 216/54 = 6 - 4 = 2$$

$$M[X^2] = \int_0^{18} x^2 f(x)dx = \int_0^{18} (x^2/9 - x^3/162)dx =$$

$$= x^3/27 - x^4/648 \Big|_0^{18} = 5832/27 - 104976/648 = 216 - 162 = 54$$

$$M[Y^2] = \int_0^6 y^2 g(y)dy = \int_0^6 (y^2/3 - y^3/18)dy =$$

$$= y^3/9 - y^4/72 \Big|_0^6 = 216/9 - 1296/72 = 24 - 18 = 6$$

Откуда

$$D[X] = M[X^2] - (M[X])^2 = 54 - 36 = 18$$

$$D[Y] = M[Y^2] - (M[Y])^2 = 6 - 4 = 2$$

$$D[7X + 6Y + 7] = 49\cdot 18 + 36\cdot 2 = 882 + 72 = 954$$

Задача 13

В ящике имеются 6 билетов по 100 рублей, 1 билетов стоимостью по 200 рублей и 8 билетов по 300 рублей . Наугад берутся три билета. Найти вероятность того, что все три билета имеют разную стоимость.

Решение.

Пусть A - событие, состоящее в том, что взятый билет стоит 100 рублей, B - 200 рублей, C - 300 рублей. Тогда событие, состоящее в том, что все билеты имеют разную стоимость - это событие ABC. По формуле произведения зависимых случайных событий и согласно классическому определению вероятностей имеем

$$P(ABC) = P(A)\cdot P_A(B)\cdot P_{AB}(C)$$

$$P(A) = 6/(6+1+8)$$

$$P_A(B) = 1/(6+1+8-1)$$

$$P_{AB}(C) = 8/(6+1+8-2)$$

$$P(ABC) = (6/15)\cdot(1/14)\cdot(8/13) = 8/455$$

Задача 14

Случайная величина X подчинена нормальному закону:

$$f(x) = \frac{1}{8\sqrt{2\Pi}} e^{-\frac{x^2}{128}}$$

Найти математическое ожидание величины

$$Y = 6X^3 + 4X^2 + 4X + 7$$

Решение.

Поскольку f(x) чётная функция, а

$$M[X^k] = \int_{-OO}^{+OO} x^k f(x)dx$$, то при нечётных k $M[X^k]=0$, то есть

$$M[Y] = M[4X^3 + 7] = 4M[X^2] + M[7] = 4M[X^2] + 7$$

$$M[X^2] = D[X]+(M[X])^2 = D[X] = 64$$

$$M[y] = 4\cdot 64+7 = 263$$

Задача 15

В двух урнах находятся шары, отличающиеся только цветом, причём в первой урне 3 белых шаров и 6 чёрных, а во второй 7 белых и 2 чёрных. Из обеих урн извлекаются наугад по одному шару. Найти вероятность того, что оба шара одного цвета.

Решение.
Пусть A - событие, состоящее в том, что извлечены два белых шара, а B - событие, состоящее в том, что извлечены два чёрных шара. Согласно классическому определению вероятности и формуле вероятности произведения независимых случайных событий

$$P(A) = \frac{3}{3+6} \cdot \frac{7}{7+2} = 7/27$$

$$P(B) = \frac{6}{3+6} \cdot \frac{2}{7+2} = 4/27$$

По формуле вероятности суммы несовместных событий

$$P(A+B) = 7/27 + 4/27 = 11/27$$

Задача 16

Экзаменационный билет содержит три вопроса. Вероятности того, что студент ответит на первый и второй вопросы равны 6/7 и 8/9 а на третий - 7/8 . Студент сдаст экзамен, если ответит на два любых вопроса. Найти вероятность того, что студент не сдаст экзамен.

Решение.
Пусть A, B, C - события, состоящие в том, что студент правильно ответил на первый, второй и третий вопрос соответственно, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$ - противоположные к ним события. Тогда событие, состоящее в том, что студент не сдал экзамен есть $D = \overline{A}\ \overline{B}\ \overline{C} + A\ \overline{B}\ \overline{C} + \overline{A}\ B\ \overline{C} + \overline{A}\ \overline{B}\ C$. По формулам вероятности суммы несовместных случайных событий, вероятности произведения независимых случайных событий и вероятности противоположного события имеем:

$$P(D) = P(\overline{A}\ \overline{B}\ \overline{C} + A\ \overline{B}\ \overline{C} + \overline{A}\ B\ \overline{C} + \overline{A}\ \overline{B}\ C) =$$

$$= P(\overline{A}\ \overline{B}\ \overline{C}) + P(A\ \overline{B}\ \overline{C}) + P(\overline{A}\ B\ \overline{C}) + P(\overline{A}\ \overline{B}\ C)) =$$

$$= P(\overline{A})P(\overline{B})P(\overline{C}) + P(A)P(\overline{B})P(\overline{C}) + P(\overline{A})P(B)P(\overline{C}) + P(\overline{A})P(\overline{B})P\{C) =$$

$$P(D) = P(\overline{A}\ \overline{B}\ \overline{C} + A\ \overline{B}\ \overline{C} + \overline{A}\ B\ \overline{C} + \overline{A}\ \overline{B}\ C) =$$

$$= \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{8} + \frac{6}{7}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{8} + \frac{1}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{1}{8} + \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{7}{8} = 11/252$$

Задача 17

Имеются две случайные величины X и Y, связанные соотношениями Y = 1X +6. Числовые характеристики X заданы:
M[X]=6, D[X]=1. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины Y.
Решение.
Согласно свойствам математического ожидания и дисперсии имеем

$$M[Y] = M[1X+6] = M[1X] + M[6] = 1M[X] + M[6 = 7$$

$$D[Y] = D[1X+6] = D[1X] + D[6] = D[1X] = 1D[X] = 1$$