Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики»

Кафедра высшей математики

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ 5 ПО ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ОЧНОЙ И ЗАОЧНОЙ ФОРМЫ ОБУЧЕНИЯ

Авторы-составители
профессор, д.ф.м.-н. Блатов И.А.
доцент, к.ф.м.-н. Шевченко Г.Н.

Самара, 2017

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время математические методы широко используются для решения самых разнообразных задач науки, техники и экономики. Значение этих методов существенно возросло в связи с массовым применением компьютеров во всех сферах деятельности.

Программа курса математики составлена в объеме, необходимом для изучения общенаучных, общеинженерных и специальных дисциплин и развития навыков, требуемых для применения математических методов в практике работы инженера.

Общий курс математики, изучаемый студентами-заочниками ПГАТИ а течение обучения в академии состоит из аналитической геометрии и линейной алгебры, математического анализа, элементов теории вероятностей и математической статистики, дискретной математики.

В первом семестре изучается аналитическая геометрия и линейная алгебра, первая часть курса математического анализа.

Одобрено методическим советом ПГУТИ 06.06.2017, протокол №83

При изучении этих разделов рекомендуется использовать следующую литературу:

1. Логинов Б.М. Введение в дискретную математику. Калуга,2008.
2. Москинова Г.И. Дискретная математика. Математика для менеджере в примерах и упражнениях. М.:Логос,2010.
3. Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов. СПб, Питер,2007.

Программа экзамена по дискретной математике

1. Понятие множества. Операции над множествами. Диаграммы Эйлера-Венна.
2. Мощность множества. Счетные множества.
3. Прямое произведение множеств. Понятие n-местного отношения.
4. Соответствия между множествами. Функции. Инъекция, сюръекция, биекция.
5. Отношения. Бинарные отношения. Свойства отношений.
6. Отношение эквивалентности. Связь между отношением эквивалентности и разбиением множества.
7. Отношения частичного и строгого порядка.
8. Булевы функции одной и двух переменных.
9. Булевы функции. Способы задания. Существенные и фиктивные переменные.
10. Булевы формулы. Свойства логических операций.
11. Разложение булевой функции по переменным. Алгоритмы построения совершенной дизъюнктивной нормальной формы и совершенной конъюнктивной нормальной формы.
12. Свойства суммы по модулю 2. Алгоритм построения полинома Жегалкина.
13. Замкнутые классы функций. Классы T_0 , T_1 , S , M , L .
14. Функционально полные системы. Теорема о функциональной полноте двух систем функций. Теорема Поста.
15. Схемы из функциональных элементов.
16. Основные задачи комбинаторики. Правило суммы. Правило произведения.
17. Формулы числа перестановок, размещений и сочетаний без повторений и с повторениями.
18. Формула включения и исключения. Задача о беспорядках.
19. Понятие рекуррентного соотношения. Линейные рекуррентные соотношения. Метод решения.
20. Графы. Основные понятия и определения. Изоморфизм графов.
21. Степени и полустепени вершин графа. Свойства.
22. Построение графа с заданным набором степеней вершин. Необходимое и достаточное условие существования. Алгоритм построения.
23. Матрица смежности. Матрица инцидентности. Свойства.
24. Маршруты, цепи, циклы. Связность. Метрические характеристики графа.

25. Алгоритм отыскания кратчайших путей в графе (волновой метод).
26. Планарность графов. Формула Эйлера.
27. Конечные автоматы. Основные понятия. Способы задания конечных автоматов.
28. Понятие алгоритма. Основные требования к алгоритмам.
29. Машина Тьюринга. Структура машины Тьюринга. Программа для машины Тьюринга.
30. Рекурсивные функции.

Варианты контрольной работы обновляются ежегодно и размещаются на сайте академии psati.ru. Номер Вашего варианта совпадает с последними тремя цифрами Вашей зачетной книжки.

ПРИМЕРНЫЙ ВАРИАНТ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ N5 С РЕШЕНИЕМ

Задача 1

Определить, являются ли формулы f и g эквивалентными.

f(x,y,z)=((y~x)—>(z ↓ x))&((zVx)&(z+y))

g(x,y,z)=((x—>y)V(z—>x))&((z—>y)~(xVy))

Примечание :

& - конъюнкция
V - дизъюнкция
~ - эквивалентность
—> - импликация
+ - сложение по модулю 2
| - штрих Шеффера

↓ - стрелка Пирса

Решение.

f(x,y,z)=((y~x)—>(z ↓ x))&((zVx)&(z+y))

g(x,y,z)=((x—>y)V(z—>x))&((z—>y)~(xVy))

Используя таблицы истинности для элементарных булевых функций, получим :

x y z	y~x	z ↓ x	(y~x)—>(z ↓ x)	zVx	z+y	(zVx)&(z+y)	f
0 0 0	1	1	1	0	0	0	0
0 0 1	1	0	0	1	1	1	1
0 1 0	0	1	1	0	1	0	0
0 1 1	0	0	1	1	0	0	0
1 0 0	0	0	1	1	0	0	0
1 0 1	0	0	1	1	1	1	1
1 1 0	1	0	0	1	1	1	1

1 1 1	1	0	0	1	0	0	1

x y z	x—>y	z—>x	(x—>y)V(z—>x)	z—>y	xVy	(z—>y)~(xVy)	g
0 0 0	1	1	1	1	0	0	1
0 0 1	1	0	1	0	0	1	1
0 1 0	1	1	1	1	1	1	1
0 1 1	1	0	1	1	1	1	1
1 0 0	0	1	1	1	1	1	1
1 0 1	0	1	1	0	1	0	1
1 1 0	1	1	1	1	1	1	1
1 1 1	1	1	1	1	1	1	1

Из таблиц истинности следует, что формулы f и g не эквивалентны.

Задача 2

Для булевой функции, заданной вектором значений (11100111), определить :
1) существенные и фиктивные переменные;
2) совершенную дизъюнктивную нормальную форму;
3) совершенную конъюнктивную нормальную форму;
4) полином Жегалкина двумя способами;
5) принадлежность классам T0,T1, S, M, L

Решение.

f(x,y,z) = (11100111)

1) Построим таблицу истинности данной булевой функции

N	x y z	f(x,y,z)
1	0 0 0	1
2	0 0 1	1
3	0 1 0	1
4	0 1 1	0
5	1 0 0	0
6	1 0 1	1
7	1 1 0	1
8	1 1 1	1

Переменная x булевой функции f(x,y,z) называется фиктивной, если имеет место равенство

f(0,y,z) = f(1,y,z)

при любых значениях переменных y и z .

В противном случае переменная x называется существенной.
Наборы значений переменных в последнем равенстве называются соседними по переменной x.

Проверим является ли переменная x существенной или фиктивной. Рассмотрим значения функции на наборах, соседних по переменной x :

$$f(0,0,0)=1 \qquad f(1,0,0)=0$$
$$f(0,0,1)=1 \qquad f(1,0,1)=1$$
$$f(0,1,0)=1 \qquad f(1,1,0)=1$$
$$f(0,1,1)=0 \qquad f(1,1,1)=1$$

Так как не на всех наборах, соседних по переменной x, совпадают значения функции, то переменная x является существенной .

Проверим является ли переменная y существенной или фиктивной. Рассмотрим значения функции на наборах, соседних по переменной y :

$$f(0,0,0)=1 \qquad f(0,1,0)=1$$
$$f(0,0,1)=1 \qquad f(0,1,1)=0$$
$$f(1,0,0)=0 \qquad f(1,1,0)=1$$
$$f(1,0,1)=1 \qquad f(1,1,1)=1$$

Так как не на всех наборах, соседних по переменной y, совпадают значения функции, то переменная y является существенной .

Проверим является ли переменная z существенной или фиктивной. Рассмотрим значения функции на наборах, соседних по переменной z :

$$f(0,0,0)=1 \qquad f(0,0,1)=1$$
$$f(0,1,0)=1 \qquad f(0,1,1)=0$$
$$f(1,0,0)=0 \qquad f(1,0,1)=1$$
$$f(1,1,0)=1 \qquad f(1,1,1)=1$$

Так как не на всех наборах, соседних по переменной y, совпадают значения функции, то переменная z является существенной .

2)

Совершенная дизъюнктивная нормальная форма для данной булевой функции f(x,y,z) имеет вид:

$$f(x,y,z) = \bar{x}\cdot\bar{y}\cdot\bar{z} \vee \bar{x}\cdot\bar{y}\cdot z \vee \bar{x}\cdot y\cdot\bar{z} \vee x\cdot\bar{y}\cdot z \vee x\cdot y\cdot\bar{z} \vee x\cdot y\cdot z \ .$$

3)

Совершенная конъюнктивная нормальная форма для данной булевой функции f(x,y,z) имеет вид:

$$f(x,y,z) = (x \vee \bar{y} \vee \bar{z})\cdot(\bar{x} \vee y \vee z) \ .$$

4)

Первый способ.

Полином Жегалкина для любой булевой функции от трех переменных имеет вид

$$f(x,y,z) = a0 + a1\cdot x + a2\cdot y + a3\cdot z + a4\cdot x\cdot y + \qquad (1)$$
$$+ a5\cdot x\cdot z + a6\cdot y\cdot z + a7\cdot x\cdot y\cdot z \ ,$$

где $a0,a1,a2,a3,a4,a5,a6,a7 \in \{0 , 1\}$,

значок "+" обозначает сложение по модулю 2.

Коэффициенты a0,a1,...,a7 будем находить, последовательно подставляя в формулу (1) наборы значений переменных :

$$f(0,0,0) = a0 = 1$$
$$f(0,0,1) = a0 + a3 = 1$$
$$f(0,1,0) = a0 + a2 = 1$$
$$f(0,1,1) = a0 + a2 + a3 + a6 = 0 \qquad (2)$$

$$f(1,0,0) = a0 + a1 = 0$$
$$f(1,0,1) = a0 + a1 + a3 + a5 = 1$$
$$f(1,1,0) = a0 + a1 + a2 + a4 = 1$$
$$f(1,1,1) = a0 + a1 + a2 + a3 + a4 + a5 + a6 + a7 = 1 .$$

Из системы уравнений (2) находим

$$a0 = 1$$
$$a1 = 1 + 0 = 1$$
$$a2 = 1 + 1 = 0$$
$$a3 = 1 + 1 = 0$$
$$a4 = 1 + 1 + 0 + 1 = 1$$
$$a5 = 1 + 1 + 0 + 1 = 1$$
$$a6 = 1 + 1 + 1 + 0 = 1$$
$$a6 = 1 + 1 + 1 + 0 + 0 + 1 + 1 + 1 = 0$$

Таким образом

$$f(x,y,z) = 1 + x + x \cdot y + x \cdot z + y \cdot z .$$

Второй способ.

В совершенной дизъюнктивной нормальной форме булевой функции дизъюнкции заменим суммами по модулю 2

$$f(x,y,z) = \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot \bar{z} + \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot z + \bar{x} \cdot y \cdot \bar{z} + x \cdot \bar{y} \cdot z + x \cdot y \cdot \bar{z} + x \cdot y \cdot z .$$

Заменим отрицание по формуле $\bar{x} = x+1$

$$f(x,y,z) = (x+1) \cdot (y+1) \cdot (z+1) + (x+1) \cdot (y+1) \cdot z + (x+1) \cdot y \cdot (z+1) +$$

$$+ x \cdot (y+1) \cdot z + x \cdot y \cdot (z+1) + x \cdot y \cdot z .$$

Раскрывая скобки и учитывая, что $x+x = 0$, получаем полином Жегалкина

$$f(x,y,z) = 1 + x + x \cdot y + x \cdot z + y \cdot z .$$

5)

Класс T0 функций, сохраняющих нуль

Так как

$f(0,0,0) = 1$, то

$f(x,y,z) \bar{\in} T0.$

Класс T1 функций, сохраняющих единицу

Так как

$f(1,1,1) = 1$, то $f(x,y,z) \in T1.$

Класс S самодвойственных функций составляют функции, на противоположных наборах принимающие противоположные значения,

Так как

$f(0,0,0) = 1$ $f(1,1,1) = 1$, то

$f(x,y,z) \bar{\in} S.$

Класс M монотонных функций

$f(x,y,z) \bar{\in} M$, так как $f(0,0,0)>f(0,1,1)$

Класс L линейных функций составляют функции, которые представляются полиномом Жегалкина первой степени .

$f(x,y,z)\ \bar{\in}\ L$, так как

$$f(x,y,z) = 1 + x + x \cdot y + x \cdot z + y \cdot z\ .$$

Задача 3

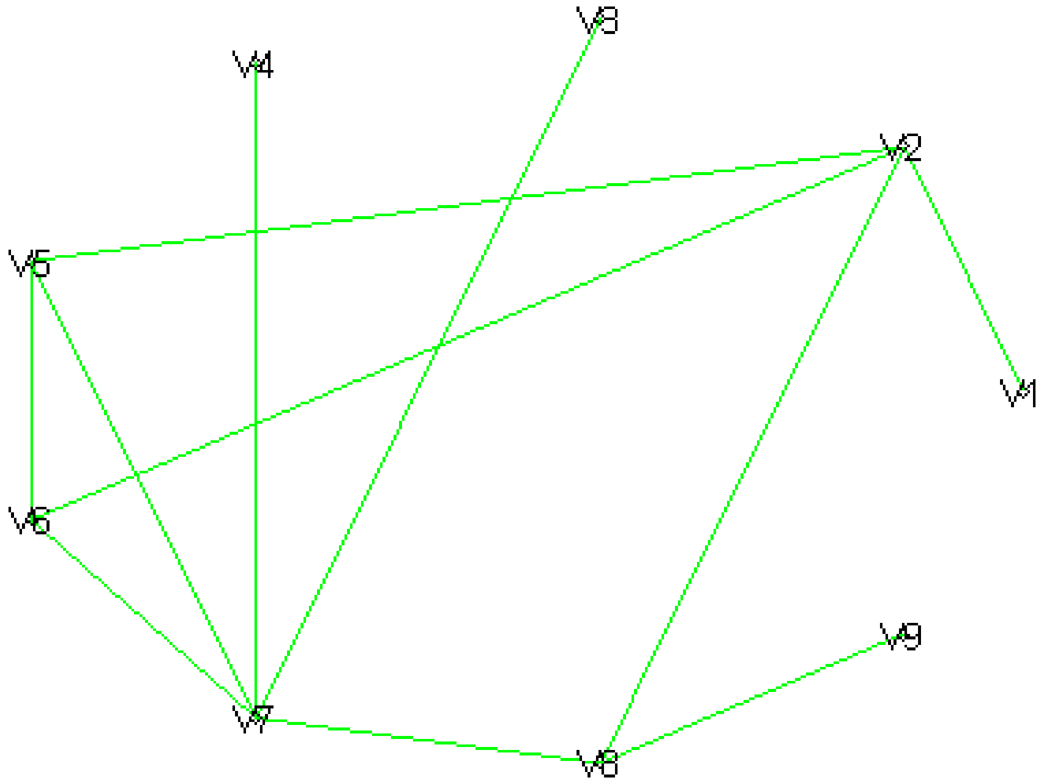
По заданной матрице смежности построить неориентированный граф, составить таблицу степеней вершин, матрицу инцидентности, таблицу расстояний и условных радиусов, найти радиус и центр графа.

$$A(G) = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$$

Решение.

$$A(G) = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$$

Изобразим граф G по матрице смежности .



Составим таблицу степеней вершин, определяя по рисунку для каждой из вершин количество выходящих из нее ребер

Vi	v1	v2	v3	v4	v5	v6	v7	v8	v9
S(Vi)	1	4	1	1	3	3	5	3	1

В графе G будем обозначать ребро, соединяющее вершины v_i и v_j, через a_{ij}

Матрица инцидентности для нашего графа имеет вид:

$$B(G) = \begin{array}{c} \\ v1 \\ v2 \\ v3 \\ v4 \\ v5 \\ v6 \\ v7 \\ v8 \\ v9 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccccc} a_{12} & a_{25} & a_{26} & a_{28} & a_{37} & a_{47} & a_{56} & a_{57} & a_{67} & a_{78} & a_{89} \end{array} \\ \left\| \begin{array}{ccccccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\| \end{array}$$

Составим по рисунку таблицу расстояний и условных радиусов

	v1	v2	v3	v4	v5	v6	v7	v8	v9	r(Vi)
v1	0	1	4	4	2	2	3	2	3	4
v2	1	0	3	3	1	1	2	1	2	3
v3	4	3	0	2	2	2	1	2	3	4
v4	4	3	2	0	2	2	1	2	3	4
v5	2	1	2	2	0	1	1	2	3	3
v6	2	1	2	2	1	0	1	2	3	3
v7	3	2	1	1	1	1	0	1	2	3
v8	2	1	2	2	2	2	1	0	1	2
v9	3	2	3	3	3	3	2	1	0	3

Определим по таблице расстояний центр и радиус графа. Радиус графа r(G)=2, следовательно, центр графа - это множество вершин {v8}

Задача 4

Выяснить, применима ли машина Тьюринга T к слову P. Если применима, то выписать результат T(P) применения машины Тьюринга T к слову P.

$$T: \left\langle \begin{array}{l} q1\ 1\ q1\ 1\ R \\ q1\ 0\ q2\ 0\ R \\ q2\ 0\ q2\ 0\ L \\ q3\ 1\ q3\ 0\ R \\ q3\ 0\ q3\ 0\ L \end{array} \right.$$

L

P=11111001

Предполагается, что начальный момент Машина Тьюринга обозревает самую левую единицу слова.

Решение. P=11111001

Согласно алгоритму функционирования машины Тьюринга имеем:

q1 11111001
1 q1 1111001
11 q1 111001
111 q1 11001
1111 q1 1001
11111 q1 001
111110 q2 01
11111 q2 001
1111 q2 1001

Машина Тьюринга применима к слову P и T(P)=11111001.

Задача 5

Найти число способов расстановки 25 томов на книжной полке, при котором первые 24 томов стоят рядом в порядке возрастания номеров.

Решение.

В условиях задачи можно считать первые 24 томов одним томом. Поэтому можно считать, что число разных томов 2.

Число способов расстановки равно числу перестановок $P_2 = 2! = 2$

Задача 6

В военном подразделении служат 12 офицеров и 13 рядовых оперативная группа состоит из командира, заместителя и 10 рядовых, причём командир и заместитель назначаются случайным образом из числа офицеров. Найти число возможных различных оперативных групп.

Решение.

10 рядовых из имеющихся 13 рядовых можно выбрать

$$C_{13}^{10} = \frac{13!}{10!3!} = 286$$

Командира и заместителя из имеющихся 12 офицеров можно выбрать $A_{12}^{2} = \frac{12!}{10!} = 12\cdot 11 = 132$ способами,

поскольку в данном случае пары являются упорядоченными (один командир, а другой - заместитель или наоборот). Отсюда общее число способов N = 37752

Задача 7

Найти множество всех подмножеств множества {4,3,6}

Решение.

Любое множество содержит пустое множество. Далее последовательно добавляем одноэлементные подмножества {4},{3},{6}, двухэлементные {4,3},{4,6},{3,6}, трёхэлементное {4,3,6}.

Окончательно получим

{Ф,{4},{3},{6},{4,3},{4,6},{3,6},{4,3,6}}

Задача 8

Найти декартово произведение множеств A={4,1}, B={8,7,6}

Решение.

Декартово произведение A X B есть множество всех упорядоченных пар элементов, первый из которых принадлежит A, а второй принадлежит B. Отсюда

A X B = {(4,8),(4,7),(4,6),(1,8),(1,7),(1,6)}

Задача 9

В вузе 38 отличников, 89 хорошистов и 341 троечников. Делегация на студенческую конференцию включает 9 отличников, 8 хорошистов и 3 троечников. Найти число возможных делегаций.

Решение.

Из 38 отличников можно выбрать 9 отличников

C_{38}^{9} способами, из 89 хорошистов можно выбрать 8 хорошистов

C_{89}^{8} способами, из 341 троечников можно выбрать 3 троечников

C_{341}^{3} способами. Совокупность трёх таких выборок составляет

делегацию. Поскольку эти выборки не зависят друг от друга, то

число возможных делегацй будет

$$C_{38}^{9} \cdot C_{89}^{8} \cdot C_{341}^{3} .$$

Задача 10

Даны числовые множества

A={22,30,14,26}, B={22,31,26,30}, C={26,32,34,35},

Найти множество A&(B\C).

Решение.

По определению теоретико-множественных операций имеем B\C = {22,30,31},

A&(B\C) = {22,30,14,26}&{22,30,31} = {22,30}

Задача 11

На множестве M={5,6,7,8} задано отношение

R = {(5,6),(5,7),(5,8),(6,7),(6,8),(7,8)}

Выяснить, является ли это отношение отношением эквивалентности, отношением частичного порядка, отношением строгого порядка или отношением линейного порядка.

Решение. Отношение R обладает свойством антирефлексивности:

для любого x∈M, $(x,x)\overline{\in}R$, свойством антисимметричности xRy, yRx => x=y, свойством транзитивности xRy, yRz => xRz

Значит, это отношение строгого порядка.