

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Поволжский государственный университет телекоммуникаций и
информатики»

Кафедра высшей математики

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ
КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ 5 ПО ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКЕ
ДЛЯ СТУДЕНТОВ ОЧНОЙ И ЗАОЧНОЙ ФОРМЫ ОБУЧЕНИЯ

Авторы-составители
профессор, д.ф.м.-н. Блатов И.А.
доцент, к.ф.м.-н. Шевченко Г.Н.

Самара, 2017

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время математические методы широко используются для решения самых разнообразных задач науки, техники и экономики. Значение этих методов существенно возросло в связи с массовым применением компьютеров во всех сферах деятельности.

Программа курса математики составлена в объеме, необходимом для изучения общенаучных, общинженерных и специальных дисциплин и развития навыков, требуемых для применения математических методов в практике работы инженера.

Общий курс математики, изучаемый студентами-заочниками ПГАТИ в течение обучения в академии состоит из аналитической геометрии и линейной алгебры, математического анализа, элементов теории вероятностей и математической статистики, дискретной математики.

В первом семестре изучается аналитическая геометрия и линейная алгебра, первая часть курса математического анализа.

**Одобрено методическим советом ПГУТИ 06.06.2017,
протокол №83**

При изучении этих разделов рекомендуется использовать следующую литературу:

1. Логинов Б.М. Введение в дискретную математику. Калуга, 2008.
2. Москинова Г.И. Дискретная математика. Математика для менеджера в примерах и упражнениях. М.:Логос, 2010.
3. Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов. СПб, Питер, 2007.

Программа экзамена по дискретной математике

1. Понятие множества. Операции над множествами. Диаграммы Эйлера-Венна.
2. Мощность множества. Счетные множества.
3. Прямое произведение множеств. Понятие n -местного отношения.
4. Соответствия между множествами. Функции. Инъекция, сюръекция, биекция.
5. Отношения. Бинарные отношения. Свойства отношений.
6. Отношение эквивалентности. Связь между отношением эквивалентности и разбиением множества.
7. Отношения частичного и строгого порядка.
8. Булевы функции одной и двух переменных.
9. Булевы функции. Способы задания. Существенные и фиктивные переменные.
10. Булевы формулы. Свойства логических операций.
11. Разложение булевой функции по переменным. Алгоритмы построения совершенной дизъюнктивной нормальной формы и совершенной конъюнктивной нормальной формы.
12. Свойства суммы по модулю 2. Алгоритм построения полинома Жегалкина.
13. Замкнутые классы функций. Классы T_0 , T_1 , S , M , L .
14. Функционально полные системы. Теорема о функциональной полноте двух систем функций. Теорема Поста.
15. Схемы из функциональных элементов.
16. Основные задачи комбинаторики. Правило суммы. Правило произведения.
17. Формулы числа перестановок, размещений и сочетаний без повторений и с повторениями.
18. Формула включения и исключения. Задача о беспорядках.
19. Понятие рекуррентного соотношения. Линейные рекуррентные соотношения. Метод решения.
20. Графы. Основные понятия и определения. Изоморфизм графов.
21. Степени и полустепени вершин графа. Свойства.
22. Построение графа с заданным набором степеней вершин. Необходимое и достаточное условие существования. Алгоритм построения.
23. Матрица смежности. Матрица инцидентности. Свойства.
24. Маршруты, цепи, циклы. Связность. Метрические характеристики графа.

25. Алгоритм отыскания кратчайших путей в графе (волновой метод).
26. Планарность графов. Формула Эйлера.
27. Конечные автоматы. Основные понятия. Способы задания конечных автоматов.
28. Понятие алгоритма. Основные требования к алгоритмам.
29. Машина Тьюринга. Структура машины Тьюринга. Программа для машины Тьюринга.
30. Рекурсивные функции.

Варианты контрольной работы обновляются ежегодно и размещаются на сайте академии psati.ru. Номер Вашего варианта совпадает с последними тремя цифрами Вашей зачетной книжки.

ПРИМЕРНЫЙ ВАРИАНТ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ N5 С РЕШЕНИЕМ

Задача 1

Определить, являются ли формулы f и g эквивалентными.

$$f(x, y, z) = ((y \sim x) \rightarrow (z \downarrow x)) \& ((z \vee x) \& (z + y))$$

$$g(x, y, z) = ((x \rightarrow y) \vee (z \rightarrow x)) \& ((z \rightarrow y) \sim (x \vee y))$$

Примечание :

& - конъюнкция

\vee - дизъюнкция

\sim - эквивалентность

\rightarrow - импликация

$+$ - сложение по модулю 2

\downarrow - штрих Шеффера

\downarrow - стрелка Пирса
 \vee

Решение.

$$f(x, y, z) = ((y \sim x) \rightarrow (z \downarrow x)) \& ((z \vee x) \& (z + y))$$

$$g(x, y, z) = ((x \rightarrow y) \vee (z \rightarrow x)) \& ((z \rightarrow y) \sim (x \vee y))$$

Используя таблицы истинности для элементарных булевых функций, получим :

x	y	z	$y \sim x$	$z \downarrow x$ \vee	$(y \sim x) \rightarrow (z \downarrow x)$ \vee	$z \vee x$	$z + y$	$(z \vee x) \& (z + y)$	f
0	0	0	1	1	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	0	1	0	0
0	1	1	0	0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	0	0	0
1	0	1	0	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	1	1	1	1

1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	1
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

x	y	z	$x \rightarrow y$	$z \rightarrow x$	$(x \rightarrow y) \vee (z \rightarrow x)$	$z \rightarrow y$	$x \vee y$	$(z \rightarrow y) \sim (x \vee y)$	g
0	0	0	1	1	1	1	0	0	1
0	0	1	1	0	1	0	0	1	1
0	1	0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	0	1	0	1
1	1	0	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Из таблиц истинности следует, что формулы f и g не эквивалентны.

Задача 2

Для булевой функции, заданной вектором значений (11100111), определить :

- 1) существенные и фиктивные переменные;
- 2) совершенную дизъюнктивную нормальную форму;
- 3) совершенную конъюнктивную нормальную форму;
- 4) полином Жегалкина двумя способами;
- 5) принадлежность классам T_0, T_1, S, M, L

Решение.

$$f(x, y, z) = (11100111)$$

- 1) Построим таблицу истинности данной булевой функции

N	x	y	z	$f(x, y, z)$
1	0	0	0	1
2	0	0	1	1
3	0	1	0	1
4	0	1	1	0
5	1	0	0	0
6	1	0	1	1
7	1	1	0	1
8	1	1	1	1

Переменная x булевой функции $f(x, y, z)$ называется фиктивной, если имеет место равенство

$$f(0, y, z) = f(1, y, z)$$

при любых значениях переменных y и z .

В противном случае переменная x называется существенной.
 Наборы значений переменных в последнем равенстве называются соседними по переменной x .

Проверим является ли переменная x существенной или фиктивной.
 Рассмотрим значения функции на наборах, соседних по переменной x :

$$\begin{array}{ll} f(0,0,0)=1 & f(1,0,0)=0 \\ f(0,0,1)=1 & f(1,0,1)=1 \\ f(0,1,0)=1 & f(1,1,0)=1 \\ f(0,1,1)=0 & f(1,1,1)=1 \end{array}$$

Так как не на всех наборах, соседних по переменной x , совпадают значения функции, то переменная x является существенной .

Проверим является ли переменная y существенной или фиктивной.
 Рассмотрим значения функции на наборах, соседних по переменной y :

$$\begin{array}{ll} f(0,0,0)=1 & f(0,1,0)=1 \\ f(0,0,1)=1 & f(0,1,1)=0 \\ f(1,0,0)=0 & f(1,1,0)=1 \\ f(1,0,1)=1 & f(1,1,1)=1 \end{array}$$

Так как не на всех наборах, соседних по переменной y , совпадают значения функции, то переменная y является существенной .

Проверим является ли переменная z существенной или фиктивной.
 Рассмотрим значения функции на наборах, соседних по переменной z :

$$\begin{array}{ll} f(0,0,0)=1 & f(0,0,1)=1 \\ f(0,1,0)=1 & f(0,1,1)=0 \\ f(1,0,0)=0 & f(1,0,1)=1 \\ f(1,1,0)=1 & f(1,1,1)=1 \end{array}$$

Так как не на всех наборах, соседних по переменной z , совпадают значения функции, то переменная z является существенной .

2)

Совершенная дизъюнктивная нормальная форма для данной булевой функции $f(x, y, z)$ имеет вид:

$$f(x, y, z) = \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot \bar{z} \vee \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot z \vee \bar{x} \cdot y \cdot \bar{z} \vee x \cdot \bar{y} \cdot z \vee x \cdot y \cdot \bar{z} \vee x \cdot y \cdot z .$$

3)

Совершенная конъюнктивная нормальная форма для данной булевой функции $f(x, y, z)$ имеет вид:

$$f(x, y, z) = (x \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \cdot (\bar{x} \vee y \vee z) .$$

4)

Первый способ.

Полином Жегалкина для любой булевой функции от трех переменных имеет вид

$$\begin{aligned} f(x, y, z) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot y + a_3 \cdot z + a_4 \cdot x \cdot y + \\ + a_5 \cdot x \cdot z + a_6 \cdot y \cdot z + a_7 \cdot x \cdot y \cdot z , \end{aligned} \quad (1)$$

где $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7 \in \{0, 1\}$,

значок "+" обозначает сложение по модулю 2.

Коэффициенты a_0, a_1, \dots, a_7 будем находить, последовательно подставляя в формулу (1) наборы значений переменных :

$$\begin{aligned} f(0,0,0) &= a_0 = 1 \\ f(0,0,1) &= a_0 + a_3 = 1 \\ f(0,1,0) &= a_0 + a_2 = 1 \\ f(0,1,1) &= a_0 + a_2 + a_3 + a_6 = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned}
f(1,0,0) &= a_0 + a_1 = 0 \\
f(1,0,1) &= a_0 + a_1 + a_3 + a_5 = 1 \\
f(1,1,0) &= a_0 + a_1 + a_2 + a_4 = 1 \\
f(1,1,1) &= a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = 1 .
\end{aligned}$$

Из системы уравнений (2) находим

$$\begin{aligned}
a_0 &= 1 \\
a_1 &= 1 + 0 = 1 \\
a_2 &= 1 + 1 = 0 \\
a_3 &= 1 + 1 = 0 \\
a_4 &= 1 + 1 + 0 + 1 = 1 \\
a_5 &= 1 + 1 + 0 + 1 = 1 \\
a_6 &= 1 + 1 + 1 + 0 = 1 \\
a_7 &= 1 + 1 + 1 + 0 + 0 + 1 + 1 + 1 = 0
\end{aligned}$$

Таким образом

$$f(x, y, z) = 1 + x + x \cdot y + x \cdot z + y \cdot z .$$

Второй способ.

В совершенной дизъюнктивной нормальной форме булевой функции дизъюнкции заменим суммами по модулю 2

$$f(x, y, z) = \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot \bar{z} + \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot z + \bar{x} \cdot y \cdot \bar{z} + x \cdot \bar{y} \cdot z + x \cdot y \cdot \bar{z} + x \cdot y \cdot z .$$

Заменим отрицание по формуле $\bar{x} = x+1$

$$\begin{aligned}
f(x, y, z) &= (x+1) \cdot (y+1) \cdot (z+1) + (x+1) \cdot (y+1) \cdot z + (x+1) \cdot y \cdot (z+1) + \\
&+ x \cdot (y+1) \cdot z + x \cdot y \cdot (z+1) + x \cdot y \cdot z .
\end{aligned}$$

Раскрывая скобки и учитывая, что $x+x = 0$, получаем полином Жегалкина

$$f(x, y, z) = 1 + x + x \cdot y + x \cdot z + y \cdot z .$$

5)

Класс T0 функций, сохраняющих нуль

Так как

$$f(0,0,0) = 1 , \text{ то}$$

$$f(x, y, z) \notin T_0 .$$

Класс T1 функций, сохраняющих единицу

Так как

$$f(1,1,1) = 1 , \text{ то } f(x, y, z) \in T_1 .$$

Класс S самодвойственных функций составляют функции, на противоположных наборах принимающие противоположные значения,

Так как

$$f(0,0,0) = 1 \quad f(1,1,1) = 1 , \text{ то}$$

$$f(x, y, z) \notin S .$$

Класс M монотонных функций

$$f(x, y, z) \notin M , \text{ так как } f(0,0,0) > f(0,1,1)$$

Класс L линейных функций составляют функции, которые

представляются полиномом Жегалкина первой степени .

$f(x, y, z) \in \bar{L}$, так как

$$f(x, y, z) = 1 + x + x \cdot y + x \cdot z + y \cdot z .$$

Задача 3

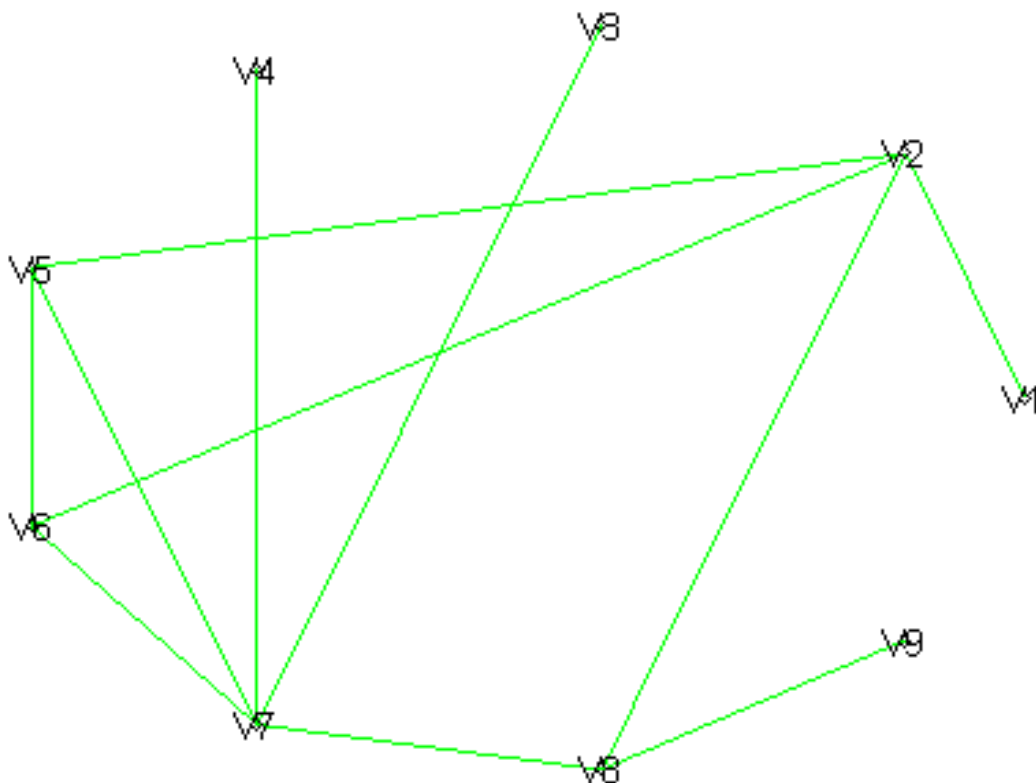
По заданной матрице смежности построить неориентированный граф, составить таблицу степеней вершин, матрицу инцидентности, таблицу расстояний и условных радиусов, найти радиус и центр графа.

$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Решение.

$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Изобразим граф G по матрице смежности .



Составим таблицу степеней вершин, определяя по рисунку для

каждой из вершин количество выходящих из нее ребер

V_i	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
$S(V_i)$	1	4	1	1	3	3	5	3	1

В графе G будем обозначать ребро, соединяющее вершины v_i и v_j , через a_{ij}

Матрица инцидентности для нашего графа имеет вид:

		a_{12}	a_{25}	a_{26}	a_{28}	a_{37}	a_{47}	a_{56}	a_{57}	a_{67}	a_{78}	a_{89}
$B(G) =$	v_1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	v_2	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
	v_3	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
	v_4	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
	v_5	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0
	v_6	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0
	v_7	0	0	0	0	1	1	0	1	1	1	0
	v_8	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1
	v_9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Составим по рисунку таблицу расстояний и условных радиусов

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	$r(V_i)$
v_1	0	1	4	4	2	2	3	2	3	4
v_2	1	0	3	3	1	1	2	1	2	3
v_3	4	3	0	2	2	2	1	2	3	4
v_4	4	3	2	0	2	2	1	2	3	4
v_5	2	1	2	2	0	1	1	2	3	3
v_6	2	1	2	2	1	0	1	2	3	3
v_7	3	2	1	1	1	1	0	1	2	3
v_8	2	1	2	2	2	2	1	0	1	2
v_9	3	2	3	3	3	3	2	1	0	3

Определим по таблице расстояний центр и радиус графа. Радиус графа $r(G)=2$, следовательно, центр графа - это множество вершин $\{v_8\}$

Задача 4

Выяснить, применима ли машина Тьюринга T к слову P . Если применима, то выписать результат $T(P)$ применения машины Тьюринга T к слову P .

$$T: \begin{cases} q_1 1 q_1 1 R \\ q_1 0 q_2 0 R \\ q_2 0 q_2 0 L \\ q_3 1 q_3 0 R \\ q_3 0 q_3 0 L \end{cases}$$

L

P=11111001

Предполагается, что начальный момент Машина Тьюринга обозревает самую левую единицу слова.

Решение. P=11111001

Согласно алгоритму функционирования машины Тьюринга имеем:

q1 11111001
1 q1 1111001
11 q1 111001
111 q1 11001
1111 q1 1001
11111 q1 001
111110 q2 01
11111 q2 001
1111 q2 1001

Машина Тьюринга применима к слову P и
T(P)=11111001.

Задача 5

Найти число способов расстановки 25 томов на книжной полке, при котором первые 24 томов стоят рядом в порядке возрастания номеров.

Решение.

В условиях задачи можно считать первые 24 томов одним

томом. Поэтому можно считать, что число разных томов 2.

Число способов расстановки равно числу перестановок $P_2 = 2! = 2$

Задача 6

В военном подразделении служат 12 офицеров и 13 рядовых оперативная группа состоит из командира, заместителя и 10 рядовых, причём командир и заместитель назначаются случайным образом из числа офицеров. Найти число возможных различных оперативных групп.

Решение.

10 рядовых из имеющихся 13 рядовых можно выбрать

$$C_{13}^{10} = \frac{13!}{10!3!} = 286$$

Командира и заместителя из имеющихся 12 офицеров можно

$$\text{выбрать } A = \frac{2 \cdot 12!}{12 \cdot 10!} = 12 \cdot 11 = 132 \text{ способами,}$$

поскольку в данном случае пары являются упорядоченными (один

командир, а другой - заместитель или наоборот). Отсюда общее число

способов $N = 37752$

Задача 7

Найти множество всех подмножеств множества $\{4, 3, 6\}$

Решение.

Любое множество содержит пустое множество. Далее последовательно добавляем одноэлементные подмножества $\{4\}, \{3\}, \{6\}$, двухэлементные $\{4, 3\}, \{4, 6\}, \{3, 6\}$, трёхэлементное $\{4, 3, 6\}$.

Окончательно получим

$\{\emptyset, \{4\}, \{3\}, \{6\}, \{4, 3\}, \{4, 6\}, \{3, 6\}, \{4, 3, 6\}\}$

Задача 8

Найти декартово произведение множеств $A=\{4, 1\}$, $B=\{8, 7, 6\}$

Решение.

Декартово произведение $A \times B$ есть множество всех упорядоченных пар элементов, первый из которых принадлежит A , а второй принадлежит B . Отсюда

$A \times B = \{(4, 8), (4, 7), (4, 6), (1, 8), (1, 7), (1, 6)\}$

Задача 9

В вузе 38 отличников, 89 хорошистов и 341 троечник. Делегация на студенческую конференцию включает 9 отличников, 8 хорошистов и 3 троечников. Найти число возможных делегаций.

Решение.

Из 38 отличников можно выбрать 9 отличников

9

C способами, из 89 хорошистов можно выбрать 8 хорошистов
38

8

C способами, из 341 троечников можно выбрать 3 троечников
89

3

C способами. Совокупность трёх таких выборок составляет
341

делегацию. Поскольку эти выборки не зависят друг от друга, то число возможных делегаций будет

9

8

3

$C \cdot C \cdot C$

38 89 341

Задача 10

Даны числовые множества

$A=\{22, 30, 14, 26\}$, $B=\{22, 31, 26, 30\}$, $C=\{26, 32, 34, 35\}$,

Найти множество $A \cap (B \setminus C)$.

Решение.

По определению теоретико-множественных операций имеем
 $B \setminus C = \{22, 30, 31\}$,

$A \cap (B \setminus C) = \{22, 30, 14, 26\} \cap \{22, 30, 31\} = \{22, 30\}$

Задача 11

На множестве $M=\{5, 6, 7, 8\}$ задано отношение

$R = \{(5, 6), (5, 7), (5, 8), (6, 7), (6, 8), (7, 8)\}$

Выяснить, является ли это отношение отношением эквивалентности, отношением частичного порядка, отношением строгого порядка или отношением линейного порядка.

Решение. Отношение R обладает свойством антирефлексивности:

для любого $x \in M$, $(x, x) \notin R$, свойством антисимметричности $xRy, yRx \Rightarrow x=y$, свойством транзитивности $xRy, yRz \Rightarrow xRz$

Значит, это отношение строгого порядка.

