

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Поволжский государственный университет телекоммуникаций и
информатики»

Кафедра высшей математики

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ
КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ 6 ПО МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКЕ И ТЕОРИИ АЛГОРИТМОВ
ДЛЯ СТУДЕНТОВ ОЧНОЙ И ЗАОЧНОЙ ФОРМЫ ОБУЧЕНИЯ

Авторы-составители
профессор, д.ф.м.-н. Блатов И.А.
доцент, к.ф.м.-н. Шевченко Г.Н.

Самара, 2017

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время математические методы широко используются для решения самых разнообразных задач науки, техники и экономики. Значение этих методов существенно возросло в связи с массовым применением компьютеров во всех сферах деятельности.

Программа курса математики составлена в объеме, необходимом для изучения общенаучных, инженерных и специальных дисциплин и развития навыков, требуемых для применения математических методов в практике работы инженера.

Общий курс математики, изучаемый студентами очной и заочной формы обучения ПГУТИ в течение обучения в университете состоит из аналитической геометрии и линейной алгебры, математического анализа, элементов теории вероятностей и математической статистики, дискретной математики, математической логики и теории алгоритмов, вычислительной математики.

В четвертом семестре изучается математическая логика теория алгоритмов.

Одобрено методическим советом ПГУТИ 06.06.2017, протокол №83

При изучении этих разделов рекомендуется использовать следующую литературу:

Основная литература.

1. Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. Задачи и упражнения по курсу дискретной математики. М., Наука. 2008.
2. Горбатов В.А. Фундаментальные основы дискретной математики. М., Наука. 2009.
3. Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р. Алгоритмы: построение и анализ. М., МЦНМО. 2010.
4. Кузнецов О.П., Адельсон-Вельский Г.М. Дискретная математика для инженеров. М., Энергоатомиздат. 2011.
5. Кук Д., Бейз Г. Компьютерная математика. М., Наука. 2008.
6. Логинов Б.М. Введение в дискретную математику. Калуга, 2009.
7. Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов. СПб, Питер. 2011.
8. Сергиевская И.М. Математическая логика и теория алгоритмов. Самара, 2004.
9. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. М., Высшая школа. 2011.

Дополнительная литература.

0. Бочкарева О.В. Учебное пособие по математике (специальные главы). М., Радио и связь. 2001.
1. Карпов В.Г., Мощенский В.А. Математическая логика и дискретная математика. Минск, Вышэйшая школа. 1977.
2. Лихтарников Л.М., Сукачева Т.Г. Математическая логика. Курс лекций. Задачник-практикум и решения. СПб, Лань. 1999.

3. Расева Е., Сикорский Р. Математика метаматематики. М., 1972.
4. Фейс Р. Модальная логика. М., 1974.

Программа экзамена по математической логике.

1. Высказывания. Тавтологии. Теоремы о правиле заключения и правиле подстановки.
2. Отношение логической эквивалентности.
3. Отношение логического следствия. Теорема о связи отношений логического следствия и логической эквивалентности.
4. Формальные теории.
5. Исчисление высказываний. Теорема о непротиворечивости исчисления высказываний.
6. Теорема дедукции. Теорема о полноте исчисления высказываний.
7. Понятие предиката. Кванторы всеобщности и существования и их свойства. Предваренная нормальная форма.
8. Теорема о тождественно истинном предикате.
9. Понятие терма.
10. Интерпретации и модели.
11. Исчисление предикатов. Примеры теорий первого порядка с собственными аксиомами.
12. Непротиворечивость исчисления предикатов. Теоремы Геделя о неполноте.
13. Метод резолюций. Теорема о доказательстве от противного.
14. Предложения. Метод получения предложений.
15. Правило резолюций. Опровержение методом резолюций.
16. Понятие алгоритма. Требования к алгоритмам.
17. Понятие машины Тьюринга. Способы задания машины Тьюринга.
18. Структура машины Тьюринга.
19. Двойственные машины.
20. Действия с машинами Тьюринга. Композиция и итерация. Тезис Тьюринга.
21. Рекурсивные функции. Простейшие примитивно-рекурсивные функции. Построение примитивно-рекурсивных функций.
22. Оператор минимизации. Частично рекурсивные функции.

Варианты контрольной работы обновляются ежегодно и размещаются на сайте кафедры высшей математики vm.psati.ru. Номер Вашего варианта совпадает с номером Вашей зачетной книжки.

ПРИМЕРНЫЙ ВАРИАНТ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКЕ И ТЕОРИИ АЛГОРИТМОВ С РЕШЕНИЕМ

Задача 1

Доказать, что формула является тавтологией без построения таблицы истинности.

$$f(x, y, z) = ((z \vee x) \vee (z \vee y)) \sim ((\bar{y} \& \bar{x}) \rightarrow (\bar{x} \rightarrow z))$$

Примечание :

& - конъюнкция

\vee - дизъюнкция

\sim - эквивалентность

\rightarrow - импликация

$\left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\}$ - квантор существования

$\left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\}$ - квантор всеобщности

$\neg A, \bar{A}$ - отрицание A

$$f(x, y, z) = ((z \vee x) \vee (z \vee y)) \sim ((\bar{y} \& \bar{x}) \rightarrow (\bar{x} \rightarrow z))$$

РЕШЕНИЕ.

Используя таблицы истинности для элементарных булевых функций, получим :

$$(z \vee x) \vee (z \vee y) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (z \vee x) = 0 \\ (z \vee y) = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=0 \\ x=0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=0 \\ y=0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=0 \\ x=0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=0 \\ y=0 \end{array} \right.$$

Используя таблицы истинности для элементарных булевых функций, получим :

$$(\bar{y}\bar{x}) \rightarrow (\bar{x} \rightarrow z) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (\bar{y}\bar{x}) = 1 \\ (\bar{x} \rightarrow z) = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \bar{y} = 1 \\ \bar{x} = 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \bar{x} = 1 \\ z = 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{array} \right.$$

Что и требовалось доказать.

Задача 2

Построить вывод формулы

$$(A \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow \neg A) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow \neg A)) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow A)$$

РЕШЕНИЕ.

По обратной теореме дедукции (см. И.М.Сергиевская "Математическая логика и теория алгоритмов", с. 25)

$$\vdash (A \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow \neg A) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow \neg A)) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow A)$$

если

$$(A \rightarrow C), (B \rightarrow \neg A) \vdash ((A \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow \neg A)) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow A)$$

Далее

$$(A \rightarrow C), (B \rightarrow \neg A), A2$$

$$\vdash ((A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow \neg A) \rightarrow A)) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow \neg A)) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow A).$$

Так как $((A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow \neg A) \rightarrow A)) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow \neg A)) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow A)$,

то по теореме дедукции

$$(B \rightarrow \neg A), A \vdash (B \rightarrow \neg A) \rightarrow A;$$

$$(A \rightarrow C), ((B \rightarrow \neg A) \rightarrow A) \vdash (A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow \neg A) \rightarrow A);$$

MP $(A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow \neg A) \rightarrow A)$,

$$((A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow \neg A) \rightarrow A)) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow \neg A)) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow A) \vdash$$

$$((A \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow \neg A)) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow A)$$

Вывод построен.

Задача 3

Методом резолюций доказать теорему

$$(B \rightarrow ((\neg C \rightarrow \neg A) \rightarrow ((C \rightarrow B) \rightarrow ((\neg B) \rightarrow \neg (C \rightarrow B))))))$$

РЕШЕНИЕ.

Предположим противное. Применяя формулы

$$A \rightarrow B = \neg A \vee B,$$

$$\begin{aligned}
CVD &= \neg (\neg C \& \neg D), \text{ имеем} \\
&\neg (B \rightarrow ((\neg C \rightarrow \neg A) \rightarrow ((C \rightarrow B) \rightarrow ((\neg B) \rightarrow \neg (C \rightarrow B)))))) = \\
&= \neg (\neg B \vee (\neg (\neg C \rightarrow \neg A) \vee (\neg (C \rightarrow B) \vee (\neg (\neg B) \vee \neg (C \rightarrow B)))))) = \\
&= \neg (\neg B \vee (\neg (\neg C \rightarrow \neg A) \vee (\neg (C \rightarrow B) \vee ((\neg B) \& (C \rightarrow B)))))) = \\
&= \neg (\neg B \vee (\neg (\neg C \rightarrow \neg A) \vee ((C \rightarrow B) \& (\neg B) \& (C \rightarrow B)))) = \\
&= \neg (\neg B \vee ((\neg C \rightarrow \neg A) \& (C \rightarrow B) \& (\neg B) \& (C \rightarrow B))) = \\
&= B \& (\neg C \rightarrow \neg A) \& (C \rightarrow B) \& (\neg B) \& (C \rightarrow B) .
\end{aligned}$$

Получили предложения

$$B, (\neg C \rightarrow \neg A), (C \rightarrow B), (\neg B), (C \rightarrow B) .$$

Из $B, (\neg B)$ методом резолюций получаем пустое предложение.
Теорема доказана.

Задача 4

Определить функцию $f(x, y)$, полученную из функций

$$g(x) = 7x^8 + 9 \text{ и } h(x) = 6x^7 + 6z,$$

по схеме примитивной рекурсии.

РЕШЕНИЕ.

По схеме примитивной рекурсии имеем

$$\begin{aligned}
f(x, 0) &= 7x^8 + 9, \\
f(x, 1) &= 6x^7 + 6(7x^8 + 9), \\
f(x, 2) &= 6x^7 + 6(6x^7 + 6(7x^8 + 9)) = \\
&= 6(6+1)x^7 + 6(7x^8 + 9), \\
f(x, 3) &= 6x^7 + 6(6(6+1)x^7 + 6(7x^8 + 9)) = \\
&= 6(6+6+1)x^7 + 6(7x^8 + 9), \\
f(x, 4) &= 6x^7 + 6(6(6+6+1)x^7 + 6(7x^8 + 9)) = \\
&= 6(6+6+6+1)x^7 + 6(7x^8 + 9),
\end{aligned}$$

Возникает гипотеза: при $y \geq 2$

$$f(x, y) = 6(6^{y-1} + 6^{y-2} + \dots + 6 + 1)x^7 + 6(7x^8 + 9), \quad (1)$$

Докажем ее индукцией по y . При $y=2$ данная формула совпадает с полученной выше $f(x, 2)$. Предположим, что она верна при некотором $y \in \mathbb{N}$ и докажем для $y+1$. Имеем

$$f(x, y+1) = 6x^7 + 6(6^{y-2} + 6^{y-1} + \dots + 6+1)x^7 + 6^y(7x^8 + 9) =$$

$$= 6(6 + 6^y + \dots + 6+1)x^7 + 6^y(7x^8 + 9)$$

Шаг индукции завершен и формула (1) доказана.

Задача 5

Записать формулу в приведенной форме, а затем преобразовать к предваренной.

$$\left(\left[\bigwedge_x \bigvee_y P(x, y, z) \rightarrow \left[\bigwedge_x \bigvee_y Q(x, y) \right] \& \left[\bigvee_x \left[\bigvee_y R(x, y) \& \bigvee_x \bigvee_y T(x, y, z) \right] \right] \right)$$

РЕШЕНИЕ.

Переобозначая связанные переменные, имеем

$$\left(\left[\bigwedge_x \bigvee_y P(x, y, z) \rightarrow \left[\bigwedge_x \bigvee_y Q(x, y) \right] \& \left[\bigvee_x \left[\bigvee_y R(x, y) \& \bigvee_x \bigvee_y T(x, y, z) \right] \right] \right) =$$

$$= \left(\left[\bigwedge_x \bigvee_y P(x, y, z) \rightarrow \left[\bigwedge_u \bigvee_v Q(u, v) \right] \& \left[\bigvee_w \left[\bigvee_t R(w, t) \& \bigvee_q \bigvee_r T(q, r, z) \right] \right] \right) =$$

$$= (\neg \left[\bigwedge_x \bigvee_y P(x, y, z) \vee \left[\bigwedge_u \bigvee_v Q(u, v) \right] \& \left[\bigvee_w \left[\bigvee_t R(w, t) \& \bigvee_q \bigvee_r T(q, r, z) \right] \right] \right) =$$

$$= \left(\bigvee_x \left[\bigvee_y \neg P(x, y, z) \vee \left[\bigwedge_u \bigvee_v Q(u, v) \right] \& \left[\bigvee_w \left[\bigvee_t R(w, t) \& \bigvee_q \bigvee_r T(q, r, z) \right] \right] \right) =$$

Это приведенная нормальная форма.

Вынося кванторы, и, используя закон дистрибутивности, получаем предваренную нормальную форму

$$= \left(\bigvee_x \left[\bigvee_y \left[\bigwedge_u \bigvee_v \bigvee_w \left[\bigvee_t \bigvee_q \bigvee_r (\neg P(x, y, z) \& R(w, t) \& T(q, r, z)) \vee (Q(u, v) \& R(w, t) \& T(q, r, z)) \right] \right] \right] \right)$$

Задача 6

Выяснить, применима ли машина Тьюринга Т к слову Р.

Если применима, то выписать результат Т(Р) применения машины Тьюринга Т к слову Р.

$$T: \left\langle \begin{array}{l} q_1 \ 1 \ q_1 \ 0 \ R \\ q_1 \ 0 \ q_3 \ 0 \ L \\ q_2 \ 0 \ q_2 \ 1 \ L \\ q_3 \ 1 \ q_2 \ 1 \ R \\ q_3 \ 0 \ q_3 \ 1 \ E \end{array} \right.$$

$$P = 11111001$$

Предполагается, что начальный момент Машина Тьюринга обозревает самую левую единицу слова.

РЕШЕНИЕ. По определению команд машины Тьюринга (см. И.М.Сергиевская "Математическая логика и теория алгоритмов", гл. 9) получаем последовательность конфигураций

```
q1 11111001
q1 1111001
q1 111001
q1 11001
q1 1001
q1 001
q3 0001
q3 1001
1 q2 001
q2 1101
```

Так как команда, начинающаяся символами $q2 1$, в программе отсутствует, то последняя конфигурация является заключительной. Следовательно, машина Тьюринга применима к слову P и

$T(P)=1101$