Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики»

Кафедра высшей математики

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ 6 ПО МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКЕ И ТЕОРИИ АЛГОРИТМОВ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ОЧНОЙ И ЗАОЧНОЙ ФОРМЫ ОБУЧЕНИЯ

Авторы-составители
профессор, д.ф.м.-н. Блатов И.А.
доцент, к.ф.м.-н. Шевченко Г.Н.

Самара, 2017

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время математические методы широко используются для решения самых разнообразных задач науки, техники и экономики. Значение этих методов существенно возросло в связи с массовым применением компьютеров во всех сферах деятельности.

Программа курса математики составлена в объеме, необходимом для изучения общенаучных, общеинженерных и специальных дисциплин и развития навыков, требуемых для применения математических методов в практике работы инженера.

Общий курс математики, изучаемый студентами очной и заочной формы обучения ПГУТИ в течение обучения в университете состоит из аналитической геометрии и линейной алгебры, математического анализа, элементов теории вероятностей и математической статистики, дискретной математики, математической логики и теории алгоритмов, вычислительной математики.

В четвертом семестре изучается математическая логика теория алгоритмов.

Одобрено методическим советом ПГУТИ 06.06.2017, протокол №83

При изучении этих разделов рекомендуется использовать следующую литературу:

Основная литература.

1. Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. Задачи и упражнения по курсу дискретной математики. М., Наука. 2008.
2. Горбатов В.А. Фундаментальные основы дискретной математики. М., Наука. 2009.
3. Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р. Алгоритмы: построение и анализ. М., МЦНМО. 2010.
4. Кузнецов О.П., Адельсон-Вельский Г.М. Дискретная математика для инженеров. М., Энергоатомиздат. 2011.
5. Кук Д., Бейз Г. Компьютерная математика. М., Наука.2008.
6. Логинов Б.М. Введение в дискретную математику. Калуга, 2009.
7. Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов. СПб, Питер. 2011.
8. Сергиевская И.М. Математическая логика и теория алгоритмов. Самара, 2004.
9. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. М., Высшая школа. 2011.

Дополнительная литература.

0. Бочкарева О.В. Учебное пособие по математике (специальные главы). М., Радио и связь. 2001.

1. Карпов В.Г., Мощенский В.А. Математическая логика и дискретная математика. Минск, Вышэйшая школа. 1977.
2. Лихтарников Л.М., Сукачева Т.Г. Математическая логика. Курс лекций. Задачник-практикум и решения. СПб, Лань. 1999.

3. Расева Е., Сикорский Р. Математика метаматематики. М., 1972.
4. Фейс Р. Модальная логика. М.,1974.

Программа экзамена по математической логике.

1. Высказывания. Тавтологии. Теоремы о правиле заключения и правиле подстановки.
2. Отношение логической эквивалентности.
3. Отношение логического следствия. Теорема о связи отношений логического следствия и логической эквивалентности.
4. Формальные теории.
5. Исчисление высказываний. Теорема о непротиворечивости исчисления высказываний.
6. Теорема дедукции. Теорема о полноте исчисления высказываний.
7. Понятие предиката. Кванторы всеобщности и существования и их свойства. Предваренная нормальная форма.
8. Теорема о тождественно истинном предикате.
9. Понятие терма.
10. Интерпретации и модели.
11. Исчисление предикатов. Примеры теорий первого порядка с собственными аксиомами.
12. Непротиворечивость исчисления предикатов. Теоремы Геделя о неполноте.
13. Метод резолюций. Теорема о доказательстве от противного.
14. Предложения. Метод получения предложений.
15. Правило резолюций. Опровержение методом резолюций.
16. Понятие алгоритма. Требования к алгоритмам.
17. Понятие машины Тьюринга. Способы задания машины Тьюринга.
18. Структура машины Тьюринга.
19. Двойственные машины.
20. Действия с машинами Тьюринга. Композиция и итерация. Тезис Тьюринга.
21. Рекурсивные функции. Простейшие примитивно-рекурсивные функции. Построение примитивно-рекурсивных функций.
22. Оператор минимизации. Частично рекурсивные функции.

Варианты контрольной работы обновляются ежегодно и размещаются на сайте кафедры высшей математики vm.psati.ru. Номер Вашего варианта совпадает с номером Вашей зачетной книжки.

ПРИМЕРНЫЙ ВАРИАНТ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКЕ И ТЕОРИИ АЛГОРИТМОВ С РЕШЕНИЕМ

Задача 1

Доказать, что формула является тавтологией без построения таблицы истиности.

$$f(x,y,z)=((z \vee x)\vee(z \vee y))\sim((\bar{y}\&\bar{x})\rightarrow(\bar{x}\rightarrow z))$$

Примечание :

& - конъюнкция

V - дизъюнкция

~ - эквивалентность

—> - импликация

$\exists$ - квантор существования

$\forall$ - квантор всеобщности

$\neg A$, $\bar{A}$ - отрицание A

$$f(x,y,z)=((z \vee x)\vee(z \vee y))\sim((\bar{y}\&\bar{x})\rightarrow(\bar{x}\rightarrow z))$$

РЕШЕНИЕ.

Используя таблицы истинности для элементарных булевых функций, получим :

$$(z \vee x)\vee(z \vee y)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(z \vee x)=0\\ (z \vee y)=0\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}z=0\\ x=0\\ z=0\\ y=0\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}z=0\\ x=0\\ z=0\\ y=0\end{array}\right.$$

Используя таблицы истинности для элементарных булевых функций, получим :

$$(\bar{y}\&\bar{x})\to(\bar{x}\to z)=0 \iff \left[\begin{array}{l}(\bar{y}\&\bar{x})=1\\ (\bar{x}\to z)=0\end{array}\right. \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l}\bar{y}=1\\ \bar{x}=1\\ \bar{x}=1\\ z=0\end{array}\right. \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l}y=0\\ x=0\\ x=0\\ z=0\end{array}\right.$$

Что и требовалось доказать.

Задача 2

Построить вывод формулы

(A->C)->(B->¬A)->(((A->C)->(B->¬A))->((A->C)->A))

РЕШЕНИЕ.

По обратной теореме дедукции (см. И.М.Сергиевская "Математическая логика и теория алгоритмов", с. 25)

⊢ (A->C)->(B->¬A)->(((A->C)->(B->¬A))->((A->C)->A))

если

(A->C),(B->¬A)⊢(((A->C)->(B->¬A))->((A->C)->A))

Далее

(A->C) , (B->¬A) , A2

⊢((A->C)->((B->¬A)->A))->(((A->C)->(B->¬A))->((A->C)->A)).

Так как((A->C)->((B->¬A)->A))->(((A->C)->(B->¬A))->((A->C)->A)),

то по теореме дедукции

(B->¬A) , A⊢ (B->¬A)->A;

(A->C) , ((B->¬A)->A)⊢ (A->C)->((B->¬A)->A);

MP (A->C)->((B->¬A)->A) ,

((A->C)->((B->¬A)->A))->(((A->C)->(B->¬A))->((A->C)->A))⊢

(((A->C)->(B->¬A))->((A->C)->A))

Вывод построен.

Задача 3

Методом резолюций доказать теорему

(B->((¬C->¬A)->((C->B)->((¬B)->¬(C->B)))))

РЕШЕНИЕ.

Предположим противное. Применяя формулы

A->B = ¬AVB,

$C \vee D = \neg(\neg C \& \neg D)$, имеем

$\neg(B \to ((\neg C \to \neg A) \to ((C \to B) \to ((\neg B) \to \neg(C \to B))))) =$

$= \neg(\neg B \vee (\neg(\neg C \to \neg A) \vee (\neg(C \to B) \vee (\neg(\neg B) \vee \neg(C \to B))))) =$

$= \neg(\neg B \vee (\neg(\neg C \to \neg A) \vee (\neg(C \to B) \vee \neg((\neg B) \& (C \to B))))) =$

$= \neg(\neg B \vee (\neg(\neg C \to \neg A) \vee \neg((C \to B) \& (\neg B) \& (C \to B)))) =$

$= \neg(\neg B \vee \neg((\neg C \to \neg A) \& (C \to B) \& (\neg B) \& (C \to B))) =$

$= B \& (\neg C \to \neg A) \& (C \to B) \& (\neg B) \& (C \to B)$.

Получили предложения

B , $(\neg C \to \neg A)$, $(C \to B)$, $(\neg B)$, $(C \to B)$.

Из B , $(\neg B)$ методом резолюций получаем пустое предложение.
Теорема доказана.

Задача 4

Определить функцию $f(x,y)$, полученную из функций

$g(x)=7x^8 + 9$ и $h(x)=6x^7 + 6z$,
по схеме примитивной рекурсии.

РЕШЕНИЕ.

По схеме примитивной рекурсии имеем

$f(x,0)=7x^8 + 9$,

$f(x,1)=6x^7 + 6(7x^8 + 9)$,

$f(x,2)=6x^7 + 6(6x^7 + 6(7x^8 + 9))=$

$= 6(6+1)x^7 + 6^2(7x^8 + 9)$,

$f(x,3)=6x^7 + 6(6(6+1)x^7 + 6^2(7x^8 + 9)) =$

$= 6(6^2 +6+1)x^7 + 6^3(7x^8 + 9)$,

$f(x,4)=6x^7 + 6(6(6^2 +6+1)x^7 + 6^3(7x^8 + 9)) =$

$= 6(6^3 +6^2 +6+1)x^7 + 6^4(7x^8 + 9)$,

Возникает гипотеза: при $y >= 2$

$$f(x,y)=6(6^{y-1} +6^{y-2} +...+6+1)x^7 + 6^y(7x^8 + 9), \qquad (1)$$

Докажем ее индукцией по y. При $y=2$ данная формула совпадает с полученной выше $f(x,2)$. Предположим, что она верна при некотором $y \in N$ и докажем для $y+1$. Имеем

$$f(x,y+1)=6x^7+6(6(6^{y-2}+6^{y-1}+\ldots+6+1)x^7+6^y(7x^8+9))=$$

$$=6(6^y+6^{y-1}+\ldots+6+1)x^7+6^{y+1}(7x^8+9)$$

Шаг индукции завершен и формула (1) доказана.

Задача 5

Записать формулу в приведенной форме, а затем преобразовать к предваренной.

$$(\exists x\,\forall y\,P(x,y,z)\to\exists x\,\forall y\,Q(x,y))\,\&\,(\forall x\,\exists y\,R(x,y)\,\&\,\forall x\,\forall y\,T(x,y,z))$$

РЕШЕНИЕ.

Переобозначая связанные переменные, имеем

$$(\exists x\,\forall y\,P(x,y,z)\to\exists x\,\forall y\,Q(x,y))\,\&\,(\forall x\,\exists y\,R(x,y)\,\&\,\forall x\,\forall y\,T(x,y,z))=$$

$$=(\exists x\,\forall y\,P(x,y,z)\to\exists u\,\forall v\,Q(u,v))\,\&\,(\forall w\,\exists t\,R(w,t)\,\&\,\forall q\,\forall r\,T(q,r,z))=$$

$$=(\neg\exists x\,\forall y\,P(x,y,z)\vee\exists u\,\forall v\,Q(u,v))\,\&\,(\forall w\,\exists t\,R(w,t)\,\&\,\forall q\,\forall r\,T(q,r,z))=$$

$$=(\forall x\,\exists y\,\neg P(x,y,z)\vee\exists u\,\forall v\,Q(u,v))\,\&\,(\forall w\,\exists t\,R(w,t)\,\&\,\forall q\,\forall r\,T(q,r,z))=$$

Это приведенная нормальная форма.

Вынося кванторы, и, используя закон дистрибутивности, получаем предваренную нормальную форму

$$=\forall x\,\exists y\,\exists u\,\forall v\,\forall w\,\exists t\,\forall q\,\forall r(\neg P(x,y,z)\,\&\,R(w,t)\,\&\,T(q,r,z))\vee(Q(u,v)\,\&\,R(w,t)\,\&\,T(q,r,z)).$$

Задача 6

Выяснить, применима ли машина Тьюринга T к слову P. Если применима, то выписать результат T(P) применения машины Тьюринга T к слову P.

$$T:\ \begin{cases} q1\ 1\ q1\ 0\ R\\ q1\ 0\ q3\ 0\ L\\ q2\ 0\ q2\ 1\ L\\ q3\ 1\ q2\ 1\ R\\ q3\ 0\ q3\ 1\ E \end{cases}$$

P=11111001

Предполагается, что начальный момент Машина Тьюринга
обозревает самую левую единицу слова.

РЕШЕНИЕ. По определению команд машины Тьюринга (см. И.М.Сергиевская "Математическая логика и теория алгоритмов", гл. 9)) получаем последовательность конфигураций

q_1 11111001
q_1 1111001
q_1 111001
q_1 11001
q_1 1001
q_1 001
q_3 0001
q_3 1001
1 q_2 001
q_2 1101

Так как команда, начинающаяся символами q_2 1, в программе отсутствует, то последняя конфигурация является заключительной. Следовательно, машина Тьюринга применима к слову P и

T(P)=1101