**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики»**

Кафедра высшей математики

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ 7 ПО ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИТЕ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ОЧНОЙ И ЗАОЧНОЙ ФОРМЫ ОБУЧЕНИЯ

**Авторы-составители
профессор, д.ф.м.-н. Блатов И.А.
доцент, к.ф.м.-н. Шевченко Г.Н.**

Самара, 2017

ВВЕДЕНИЕ
В настоящее время математические методы широко используются для решения самых разнообразных задач науки, техники и экономики. Значение этих методов существенно возросло в связи с массовым применением компьютеров во всех сферах деятельности.

Программа курса специальных глав математического анализа составлена в объеме, необходимом для изучения общенаучных и специальных дисциплин и развития навыков, требуемых для применения приближенных и численных методов математики в практике работы программиста.

Общий курс математики, изучаемый студентами очной и заочной формы обучения ПГУТИ а течение обучения в университете состоит из аналитической геометрии и линейной алгебры, математического анализа, элементов теории вероятностей и математической статистики, дискретной математики, математической логики и теории алгоритмов, вычислительной математики.

В четвертом семестре изучаются специальные главы математического анализа.

При изучении этих разделов рекомендуется использовать следующую литературу:

Одобрено методическим советом ПГУТИ 06.06.2017, протокол №83

Учебно-методические материалы по дисциплине.

Рекомендуемая литература. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П.,Кобельков Г.М. Численные методы. - М.: Наука, 2009. 2. Калиткин Н.Н. Численные методы. М.: Наука, 2010. 3. Самарский А.А.,Гулин А.В. Численные методы. - М.: Наука, 2011. 4. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. М.: Наука,2012.
5. Вержбицкий В.М. Основы численных методов. М.: «Высшая школа», 2009.
Дополнительная литература. 1. Крылов В.И.,Бобков В.В.,Монастырный П. Вычислительные методы. М.: Наука, 2008. Т. 1-2 2. Ортега Дж.,Пул У. Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений. М.: Мир, 2012.

Программа экзамена по вычислительной математике

1. Источники и структура погрешности. Пример.
2. Элементы теории погрешности.
3. Постановка задачи интерполирования. Существование интерполянта.
4. Интерполяционный многочлен в форме Лагранжа.
5. Дифференцирование интерполяционного многочлена в форме Лагранжа.
6. Погрешность интерполяционного многочлена Лагранжа.
7. Разделенные разности и их свойства.
8. Интерполяционный многочлен в форме Ньютона.
9. Полиномиальные сплайны. B-сплайны. Примеры.
10. Интерполяционный кубический сплайн. Алгоритм построения.
11. Метод прогонки.
12. Простейшие квадратурные формулы и их геометрический смысл.
13. Квадратурные формулы Ньютона-Котеса.
14. Метод Рунге-Ромберга.
15. Квадратурные формулы Гаусса-Кристоффеля.
16. Числееное дифференцирование с помощью многочлена Ньютона.
17. Численное дифференцирование. Метод неопределенных коэффициентов. Пример.
18. Метод Рунге-Ромберга.
19. Наилучшее среднеквадратичное приближение.

20. Метод наименьших квадратов.
21. Метод Гаусса.
22. Метод Гаусса, как метод построения LU-разложения.
23. Метод Гаусса с перестановками.
24. Вычисление определителей и обратных матриц методом Гаусса.
25. Метод квадратного корня.
26. Метод простой итерации для СЛАУ. Теорема сходимости.
27. Метод Якоби.
28. Теорема о функционале энергии.
29. Метод наискорейшего спуска.
30. Метод простой итерации для нелинейных уравнений.
31. Метод дихотомии.
32. Метод Ньютона. Геометрический смысл.
33. Метод секущих. Геометрический смысл.
34. Метод Ньютона-Канторовича.
35. Наилучшее среднеквадратичное приближение.
36. Метод наименьших квадратов.
37. Метод Эйлера.
38. Методы Рунге-Кутта. Схема построения.
39. Методы Рунге-Кутта. Построение схем второго порядка.
40. Методы Рунге-Кутта для систем дифференциальных уравнений.
41. Численные методы решения краевых задач.

Варианты контрольной работы обновляются ежегодно и размещаются на сайте кафедры высшей математики vm,psati.ru. Номер Вашего варианта совпадает с номером Вашей зачетной книжки. В настоящем пособии приводятся формулы и алгоритмы решения задач. По этим алгоритмам Вы должны для каждой задачи написать и отладить программу на одном из языков высокого уровня, сделать необходимые расчеты и оформит решение в соответствии с примером из данного пособия.

ПРИМЕРНЫЙ ВАРИАНТ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ N7 С РЕШЕНИЕМ

Задача 1

Найти частные производные $U_x; U_y; U_{xy}; U_{xx}; U_{yy}$ функции

Определить абсолютную и относительную погрешность значения функции

$$U = 8tg(x^4 + y^4) + 9ln(x^5 + y^4) + 2arctg(x^3 \cdot y^3)$$

при заданных абсолютных погрешностях аргументов

$x\in(a-Dx,\ a+Dx)$, $y\in(b-Dy,\ b+Dy)$

a=1.20 b=1.30, Dx=0.006, Dy=0.003

Решение.

$$U = 8tg(x^4 + y^4) + 9ln(x^5 + y^4) + 2arctg(x^3 \cdot y^3)$$

a=1.20 b=1.30, Dx=0.006, Dy=0.003

Воспользуемся формулой

$$DU=|U_x(a,b)|\cdot Dx+|U_y(a,b)|\cdot Dy \qquad (1)$$

Найдем

$$U_x = 32cos^{-2}(x^4 + y^4)\cdot x^3 + 45(x^5 + y^4)^{-1}\cdot x^4 + 6(1 + x^6 \cdot y^6)^{-1}\cdot x^2\cdot y^3$$

$U_x(a,b)=1208.2268$

$$U_y = 32\cos^{-2}(x^4 + y^4)\cdot y^3 + 36(x^5 + y^4)^{-1}\cdot y^3 + 6(1 + x^6\cdot y^6)^{-1}\cdot x^3\cdot y^2$$

$U_y(a,b)=1528.3255$

Подставляя в (1), получаем абсолютную погрешность

$DU=|1208.2268|\cdot 0.006 + |1528.3255|\cdot 0.003 = 11.8343$

Относительную погрешность найдем по формуле

$$d = \frac{DU}{|U(x_0,y_0)|} = 0.63896$$

Задача 2

Функция $f(x)$ задана своими значениями $y_i = f(x_i)$ в узлах x_i, $i=1..10$.

x	8	8.080	8.090	8.180	8.200	8.250	8.270	8.360	8.400	8.410
f(x)	1.537	1.954	1.976	1.853	1.750	1.386	1.203	0.211	-0.268	-0.387

Приближенно найти $f(x)$ в узлах $\bar{x}_i = 0.7x_i + 0.3x_{i+1}$, $i=1,..9$

с помощью интерполяционных многочленов Ньютона третьей степени (для

(нахождения $f(\bar{x}_i)$ при $i=1..7$ использовать узлы $x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}$;

(а для $f(\bar{x}_i)$ при $i=8..9$ использовать узлы x_7, x_8, x_9, x_{10}).

Оценить погрешность $\bar{f}(x_i)$, полагая

$$\max_{x\in[x_1,x_{10}]} |f^{IV}(x)| \sim 4!\cdot \max_{0<i<7} |f(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3})|.$$

x	8	8.080	8.090	8.180	8.200	8.250	8.270	8.360	8.400	8.410
f(x)	1.537	1.954	1.976	1.853	1.750	1.386	1.203	0.211	-0.268	-0.387

Решение.

Составим таблицу разделенных разностей

f(x)	$f(x_i, x_{i+1})$	$f(x_i, x_{i+1}, x_{i+2})$	$f(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+2})$	$f(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+2}, x_{i+3})$
$f(x_1)$				
$f(x_2)$	$f(x_1,x_2)$			
$f(x_3)$	$f(x_2,x_3)$	$f(x_1,x_2,x_3)$		
$f(x_4)$	$f(x_3,x_4)$	$f(x_2,x_3,x_4)$	$f(x_1,x_2,x_3,x_4)$	
$f(x_5)$	$f(x_4,x_5)$	$f(x_3,x_4,x_5)$	$f(x_2,x_3,x_4,x_5)$	$f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)$

$f(x_6)$	$f(x_5,x_6)$	$f(x_4,x_5,x_6)$	$f(x_3,x_4,x_5,x_6)$	$f(x_2,x_3,x_4,x_5,x_6)$
$f(x_7)$	$f(x_6,x_7)$	$f(x_5,x_6,x_7)$	$f(x_4,x_5,x_6,x_7)$	$f(x_3,x_4,x_5,x_6,x_7)$
$f(x_8)$	$f(x_7,x_8)$	$f(x_6,x_7,x_8)$	$f(x_5,x_6,x_7,x_8)$	$f(x_4,x_5,x_6,x_7,x_8)$
$f(x_9)$	$f(x_8,x_9)$	$f(x_7,x_8,x_9)$	$f(x_6,x_7,x_8,x_9)$	$f(x_5,x_6,x_7,x_8,x_9)$
$f(x_{10})$	$f(x_9,x_{10})$	$f(x_8,x_9,x_{10})$	$f(x_7,x_8,x_9,x_{10})$	$f(x_6,x_7,x_8,x_9,x_{10})$

по формулам

$$f(x_i,x_{i+1},...,x_{i+p}) = \frac{f(x_{i+1},x_{i+2},...,x_{i+p})-f(x_i,x_{i+1},...,x_{i+p-1})}{x_{i+p} - x_i}$$

В нашем случае таблица имеет вид:

$f(x)$	$f(x_{i,}x_{i+1})$	$f(x_i,x_{i+1},x_{i+2})$	$f(x_i,x_{i+1},x_{i+2},x_{i+3})$	$f(x_i,x_{i+1},x_{i+2},x_{i+3},x_{i+4})$
1.537				
1.954	5.212			
1.976	2.200	-33.472		
1.853	-1.367	-35.667	-12.191	
1.750	-5.150	-34.394	10.606	113.987
1.386	-7.280	-30.429	24.784	83.397
1.203	-9.150	-26.714	41.270	91.591
0.211	-11.022	-17.020	60.588	107.323
-0.268	-11.975	-7.329	64.608	20.098
-0.387	-11.900	1.500	63.065	-9.643

Используя данные таблицы и формулы

$$f(\bar{x}_i) \sim f(x_i) + f(x_i,x_{i+1})(\bar{x}_i - x_i) + f(x_i,x_{i+1},x_{i+2})(\bar{x}_i - x_i)(\bar{x}_i - x_{i+1}) +$$

$$+ f(x_i,x_{i+1},x_{i+2},x_{i+3})(\bar{x}_i - x_i)(\bar{x}_i - x_{i+1})(\bar{x}_i - x_{i+2}), \quad i=1..7,$$

$$f(\bar{x}_i) \sim f(x_7) + f(x_7,x_8)(\bar{x}_i - x_7) + f(x_7,x_8,x_9)(\bar{x}_i - x_7)(\bar{x}_i - x_8) +$$

$$+ f(x_7,x_8,x_9,x_{10})(\bar{x}_i - x_7)(\bar{x}_i - x_8)(\bar{x}_i - x_9), \quad i=8,9,$$

находим приближенные решения $f(\bar{x}_i)$ и заносим их в таблицу.

$\bar{x}$	8	8.083	8.117	8.186	8.215	8.256	8.297	8.372	8.403
$f(\bar{x})$	1.706	1.961	2.001	1.825	1.657	1.333	0.929	0.068	-0.304

Погрешность оцениваем по формуле

$$R_i = \left|f(\bar{x}_i) - L_i(\bar{x}_i, f)\right| < M_i \left|(\bar{x}_i - x_i)(\bar{x}_i - x_{i+1})(\bar{x}_i - x_{i+2})(\bar{x}_i - x_{i+3})\right|, \quad i=1,..7,$$

$$R_i = \left|f(\bar{x}_i) - L_i(\bar{x}_i, f)\right| < M_i \left|(\bar{x}_i - x_7)(\bar{x}_i - x_8)(\bar{x}_i - x_9)(\bar{x}_i - x_{10})\right|, \quad i=8,9,$$

$$M_i = \max_{j=\max\{1,i-3\},..,\min\{6,i\}} \left|f(x_j,x_{j+1},x_{j+2},x_{j+3},x_{j+4})\right|, \quad i=1,..,9.$$

Найденные значения R_i заносим в таблицу

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
R	0.00158	0.00003	0.00214	0.00005	0.00045	0.00014	0.00212	0.00003	0.00000

Задача 3

Методом трапеций найти значение интеграла

$$I = \int_3^9 \frac{dx}{\sqrt{x^3 + 3x^2 + 7x + 6}}$$

с точностью eps = 0.0001 . Привести результаты вычислений на всех сетках, число узлов самой мелкой сетки и найденное значение интеграла.

Решение.

$$I = \int_3^9 \frac{dx}{\sqrt{x^3 + 3x^2 + 7x + 6}}$$

Пусть $f(x) = \frac{1}{}$

$$\sqrt{x^3+3x^2+7x+6}$$

Вычисляем по следующему алгоритму.

1. Полагаем n:=1.

2. Для i=0,1,...,n полагаем $y_i = f(3 + \frac{6}{n} i)$

3. Вычисляем $I_n := \frac{6}{2n}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \ldots + 2y_{n-1} + y_n)$;

4. Для i=0,1,...,2n полагаем $y_i = f(3 + \frac{6}{2n} i)$

5. Вычисляем $I_{2n} := \frac{6}{4n}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \ldots + 2y_{2n-1} + y_{2n})$;

6. Если $|I_n - I_{2n}| < \frac{1}{2} \cdot 10^{-4}$, то $I \sim I_{2n}$ и конец.

7. n:=2n

8. Идти на 2.

n= 2 I_2 =0.368700

n= 4 I_4 =0.346734

n= 8 I_8 =0.346483

n= 16 I_{16} =0.346465

$I \sim I_{16}$ =0.346465

Задача 4

Решить систему линейных алгебраических уравнений

$Ax=f$, $A=\{a_{ij}\}$, $f=\{f_i\}$ методом Якоби с точностью eps=0.0001 .

Предварительно выяснить, выполнены ли условия сходимости

метода Якоби. В отчете привести количество итераций n,

приближенное решение $x^n \sim x$, а также приближения x^k

для k=[n/20], [n/10], [n/5] ([a] обозначает целую часть числа a.)

$$A = \left\| \begin{matrix} 8 & -2 & -4 & -1 \\ -1 & -7 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 9 & 3 \\ -4 & 1 & 1 & -7 \end{matrix} \right\| , \quad f = \left\| \begin{matrix} -2 \\ 3 \\ -8 \\ 5 \end{matrix} \right\|$$

Решение.

$$A = \left\| \begin{matrix} 8 & -2 & -4 & -1 \\ -1 & -7 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 9 & 3 \\ -4 & 1 & 1 & -7 \end{matrix} \right\| , \quad f = \left\| \begin{matrix} -2 \\ 3 \\ -8 \\ 5 \end{matrix} \right\|$$

$$\| \quad \| \quad \| \quad \|$$

1) Проверим условие сходимости метода Якоби:

$$r = \min_{0<i<5} \{|a_{ii}| - \sum_{j=1, j\neq i}^{4} |a_{ij}|\}$$

В нашем случае r=1>0

2) Преобразуем систему Ax=f к виду x=Bx+g,

где $B=\{b_{ij}\}$, $b_{ii}=0$, $b_{ij} = -\dfrac{a_{ij}}{a_{ii}}$, $i\neq j$;

$g=\{g_i\}$, $g_i = -\dfrac{f_i}{a_{ii}}$, $0<i,j<5$.

В нашем случае имеем

$$B = \left\| \begin{matrix} 0.00000 & 0.25000 & 0.50000 & 0.12500 \\ -0.14286 & 0.00000 & 0.00000 & 0.71429 \\ -0.33333 & -0.22222 & 0.00000 & -0.33333 \\ -0.57143 & 0.14286 & 0.14286 & 0.00000 \end{matrix} \right\|, \quad g = \left\| \begin{matrix} -0.25000 \\ -0.42857 \\ -0.88889 \\ -0.71429 \end{matrix} \right\|$$

$$g = (-0.25000\ -0.42857\ -0.88889\ -0.71429\ )^T$$

3) Вычислим $q := \max_{0<i<5} (|b_{i1}|+|b_{i2}|+|b_{i3}|+|b_{i4}|)$.

В нашем случае q=0.88889

4) Положим $x^0 = (0,0,0,0)$ $x^1 = g$.

5) Определим число итераций n по формуле

$$n := \left[\log_q \frac{eps\cdot(1-q)}{\| x^1 - x^0 \|} \right] + 1, \quad \text{где}$$

$\|x\| = \max_{0<i<5} |x_i|$. В нашем случае n=96.

$$x^{[n/20]} = x^4 = (-0.59850\ -0.62677\ -0.43093\ -0.51113\ )$$

$$x^{[n/10]} = x^9 = (-0.66199\ -0.68450\ -0.35998\ -0.49124\ )$$

$$x^{[n/5]} = x^{19} = (-0.65901\ -0.68149\ -0.35577\ -0.48585\ )$$

$$x \sim x^n = x^{96} = (-0.65901\ -0.68149\ -0.35581\ -0.48589\ )$$

Задача 5

Найти обратную матрицу и определитель матрицы A методом Гаусса. Вывести все промежуточные преобразования, определитель и матрицу A^{-1}.

$$\| \ 6\ \ -2\ \ \ 2\ \ -1 \ \|$$

$$A = \left\|\begin{matrix} 0 & -9 & 3 & -5 \\ 1 & -5 & -9 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & -7 \end{matrix}\right\|$$

Решение.

$$A = \left\|\begin{matrix} 6 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & -9 & 3 & -5 \\ 1 & -5 & -9 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & -7 \end{matrix}\right\|$$

Выполняем следующие преобразования

1) Полагаем $e_{ii}:=1$; $e_{ij}:=0$ при $i\neq j$, $0<i,j<5$.

2) Выводим запись

$$\left\|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{matrix}\right\| X = \left\|\begin{matrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} & e_{14} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} & e_{24} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & e_{34} \\ e_{41} & e_{42} & e_{43} & e_{44} \end{matrix}\right\| \quad (*)$$

3) Для i:=1..3 выполнить
begin
Для j:=i+1..4 выполнить
begin
Для k:=1..i выполнить

$$e_{jk}:=e_{jk}-\frac{e_{ik}}{a_{ii}}\cdot a_{ji}$$

Для k:=i+1..4 выполнить

$$a_{jk}:=a_{jk}-\frac{a_{ik}}{a_{ii}}\cdot a_{ji}$$

$a_{ji}:=0;$
end;
выводим запись (*).
end;

4) Находим $d:=a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}\cdot a_{44}$ и выводим запись "det A="d

5) Для i:=4..2 выполнить
begin
$p:=a_{ii}$

Для j:=1..4 выполнить
begin

$$a_{ij}:=\frac{a_{ij}}{p};\quad e_{ij}:=\frac{e_{ij}}{p};$$

end;

Для j:=i-1..1 выполнить
begin
Для k:=4..1 выполнить
$e_{jk}:=e_{jk}-e_{ik}\cdot a_{ji}$
$a_{ji}:=0;$
end;
выводим запись (*).

```
end;
```

6) Выводим запись

$$A^{-1} = \begin{Vmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} & e_{14} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} & e_{24} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & e_{34} \\ e_{41} & e_{42} & e_{43} & e_{44} \end{Vmatrix}$$ где E-последняя запись в (*)

7) Делаем проверку $A^{-1} A=I$.

$$\begin{Vmatrix} 6 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & -9 & 3 & -5 \\ 1 & -5 & -9 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & -7 \end{Vmatrix} X = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

$$\begin{Vmatrix} 6.000 & -2.000 & 2.000 & -1.000 \\ 0.000 & -9.000 & 3.000 & -5.000 \\ 0.000 & -4.667 & -9.333 & -0.833 \\ 0.000 & -0.667 & 0.667 & -7.333 \end{Vmatrix} X = \begin{Vmatrix} 1.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 1.000 & 0.000 & 0.000 \\ -0.167 & 0.000 & 1.000 & 0.000 \\ 0.333 & 0.000 & 0.000 & 1.000 \end{Vmatrix}$$

$$\begin{Vmatrix} 6.000 & -2.000 & 2.000 & -1.000 \\ 0.000 & -9.000 & 3.000 & -5.000 \\ 0.000 & 0.000 & -10.889 & 1.759 \\ 0.000 & 0.000 & 0.444 & -6.963 \end{Vmatrix} X = \begin{Vmatrix} 1.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 1.000 & 0.000 & 0.000 \\ -0.167 & -0.519 & 1.000 & 0.000 \\ 0.333 & -0.074 & 0.000 & 1.000 \end{Vmatrix}$$

$$\begin{Vmatrix} 6.000 & -2.000 & 2.000 & -1.000 \\ 0.000 & -9.000 & 3.000 & -5.000 \\ 0.000 & 0.000 & -10.889 & 1.759 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & -6.891 \end{Vmatrix} X = \begin{Vmatrix} 1.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 1.000 & 0.000 & 0.000 \\ -0.167 & -0.519 & 1.000 & 0.000 \\ 0.327 & -0.095 & 0.041 & 1.000 \end{Vmatrix}$$

det A = -4052.000

$$\begin{Vmatrix} 6.000 & -2.000 & 2.000 & 0.000 \\ 0.000 & -9.000 & 3.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & -10.889 & 0.000 \\ -0.000 & -0.000 & -0.000 & 1.000 \end{Vmatrix} X = \begin{Vmatrix} 0.953 & 0.014 & -0.006 & -0.145 \\ -0.237 & 1.069 & -0.030 & -0.726 \\ -0.083 & -0.543 & 1.010 & 0.255 \\ -0.047 & 0.014 & -0.006 & -0.145 \end{Vmatrix}$$

$$\begin{Vmatrix} 6.000 & -2.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & -9.000 & 0.000 & 0.000 \\ -0.000 & -0.000 & 1.000 & -0.000 \\ -0.000 & -0.000 & -0.000 & 1.000 \end{Vmatrix} X = \begin{Vmatrix} 0.937 & -0.086 & 0.180 & -0.098 \\ -0.260 & 0.920 & 0.249 & -0.655 \\ 0.008 & 0.050 & -0.093 & -0.023 \\ -0.047 & 0.014 & -0.006 & -0.145 \end{Vmatrix}$$

$$\begin{Vmatrix} 6.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ -0.000 & 1.000 & -0.000 & -0.000 \end{Vmatrix} X = \begin{Vmatrix} 0.995 & -0.290 & 0.124 & 0.047 \\ 0.029 & -0.102 & -0.028 & 0.073 \end{Vmatrix}$$

$$\begin{Vmatrix} -0.000 & -0.000 & 1.000 & -0.000 \\ -0.000 & -0.000 & -0.000 & 1.000 \end{Vmatrix} \quad \begin{Vmatrix} 0.008 & 0.050 & -0.093 & -0.023 \\ -0.047 & 0.014 & -0.006 & -0.145 \end{Vmatrix}$$

$$\begin{Vmatrix} 1.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ -0.000 & 1.000 & -0.000 & -0.000 \\ -0.000 & -0.000 & 1.000 & -0.000 \\ -0.000 & -0.000 & -0.000 & 1.000 \end{Vmatrix} X = \begin{Vmatrix} 0.166 & -0.048 & 0.021 & 0.008 \\ 0.029 & -0.102 & -0.028 & 0.073 \\ 0.008 & 0.050 & -0.093 & -0.023 \\ -0.047 & 0.014 & -0.006 & -0.145 \end{Vmatrix}$$

Для элементов I_{ij} матрицы $I = AA^{-1}$ имеем

$I_{11} = +6.000(0.166)-2.000(0.029)+2.000(0.008)-1.000(-0.047) = 1.000$

$I_{12} = +6.000(-0.048)-2.000(-0.102)+2.000(0.050)-1.000(0.014) = 0.000$

$I_{13} = +6.000(0.021)-2.000(-0.028)+2.000(-0.093)-1.000(-0.006) = -0.000$

$I_{14} = +6.000(0.008)-2.000(0.073)+2.000(-0.023)-1.000(-0.145) = 0.000$

$I_{21} = +0.000(0.166)-9.000(0.029)+3.000(0.008)-5.000(-0.047) = -0.000$

$I_{22} = +0.000(-0.048)-9.000(-0.102)+3.000(0.050)-5.000(0.014) = 1.000$

$I_{23} = +0.000(0.021)-9.000(-0.028)+3.000(-0.093)-5.000(-0.006) = -0.000$

$I_{24} = +0.000(0.008)-9.000(0.073)+3.000(-0.023)-5.000(-0.145) = -0.000$

$I_{31} = +1.000(0.166)-5.000(0.029)-9.000(0.008)-1.000(-0.047) = -0.000$

$I_{32} = +1.000(-0.048)-5.000(-0.102)-9.000(0.050)-1.000(0.014) = -0.000$

$I_{33} = +1.000(0.021)-5.000(-0.028)-9.000(-0.093)-1.000(-0.006) = 1.000$

$I_{34} = +1.000(0.008)-5.000(0.073)-9.000(-0.023)-1.000(-0.145) = -0.000$

$I_{41} = -2.000(0.166)+0.000(0.029)+0.000(0.008)-7.000(-0.047) = 0.000$

$I_{42} = -2.000(-0.048)+0.000(-0.102)+0.000(0.050)-7.000(0.014) = 0.000$

$I_{43} = -2.000(0.021)+0.000(-0.028)+0.000(-0.093)-7.000(-0.006) = 0.000$

$I_{44} = -2.000(0.008)+0.000(0.073)+0.000(-0.023)-7.000(-0.145) = 1.000$

Итак $I_{ij}=0$ при $i \neq j$, $I_{ii}=1$, то есть I-единичная матрица.

Задача 6

Методом дихотомии(половинного деления) найти корень уравнения $-4x^3 - 2x^2 - x - 7=0$ с точностью eps=0.001. Предварительно найти отрезок [a,b], содержащий корень (отделить корень). В отчете привести отрезок [a,b], приближенное значение корня.

Пусть $f(x)=-4x^3 - 2x^2 - x - 7$. Приведем алгоритм решения задачи.

В пунктах 1-10 отделяется корень, в пунктах 11-18

корень уточняется.

1. Положим u:=0; v:=0; t:=-1; w:=1.
2. Если f(u)=0, то $\bar{x}$=u, [a,b]=[u-1,u+1] и конец,

   Если f(v)=0, то $\bar{x}$=v, [a,b]=[v-1,v+1] и конец,

   Если f(w)=0, то $\bar{x}$=w, [a,b]=[w-1,w+1] и конец,

   Если f(t)=0, то $\bar{x}$=t, [a,b]=[t-1,t+1] и конец.
3. Если sign(f(u))sign(f(w))<0, то идти на 7.
4. Если sign(f(v))sign(f(t))<0, то идти на 9.
5. Положим u:=u+1; w:=w+1; v:=v-1; t:=t-1.
6. Идти на 2.
7. Положим a:=u; b:=w.
8. Идти на 10.
9. Положим a:=t; b:=v.
10. Выводим запись "Отрезок, содержащий корень-[a,b]".
11. Если b-a<eps, то выводим "приближенное значение

    корня $\bar{x}$=(b+a)/2" и конец.
12. Положим u:=(a+b)/2.
13. Если f(u)=0, то $\bar{x}$=u и конец.
14. Если f(u)f(a)<0, то идти на 17.
15. a:=u;
16. Идти на 11.
17. b:=u;
18. Идти на 11.

Отрезок, содержащий корень [-2.000000, -1.000000], приближенное

значение корня $\bar{x}$=-1.317871

Задача 7

Методом сеток найти приближенное решение {y0, y1, y2, ..., y8} краевой задачи

$$\begin{cases} -y'' + (3 + 2\sin(-2x-3))y = -5x^2 - 4x - 4 \\ y(2)=3, \quad y(5)=2 \end{cases}$$

с точностью $\max\limits_{0<i<8} |y_i - y(x_i)| < 10^{-3}$

Вывести таблицу значений приближенного решения
и число узлов самой мелкой сетки, на которой оно найдено.

Решение.

$$\begin{cases} -y'' + (3 + 2\sin(-2x-3))y = -5x^2 - 4x - 4 \\ y(2)=3, \quad y(5)=2 \end{cases}$$

с точностью $\max\limits_{0<i<8} |y_i - y(x_i)| < 10^{-3}$

Заменим функцию y(x) сеточной функцией $\{y_0, y_1, ..., y_8\}$,

$y_0 = 3$, $y_8 = 2$, производную y" - по формуле

численного дифференцирования

$$y''(x_i) \sim \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} \quad \text{где} \quad h=3/n;\ n = 2^k$$

Тогда получим разностную схему, аппроксимирующую задачу (1) с точностью $O(h^2)$

$$\begin{cases} -\dfrac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2} + (3 + 2\sin(-2x_i -3))y_i = -5x_i^2 - 4x_i - 4, \quad 0<i<n \\ y_0 = 3, \quad y_n = 2 \end{cases} \qquad (2)$$

Исключим y_0 и y_n, и преобразуем (2) к виду

$$\begin{cases} \left[3 + 2\sin(-2x_1 -3) + \dfrac{2}{h^2}\right]y_1 - \dfrac{1}{h^2}\cdot y_2 = -5x_1^2 - 4x_1 - 4 + \dfrac{3}{h^2} \\ -\dfrac{1}{h^2}\cdot y_{i-1} + \left[3 + 2\sin(-2x_i -3) + \dfrac{2}{h^2}\right]y_i - \dfrac{1}{h^2}\cdot y_{i+1} = -5x_i^2 - 4x_i - 4, \quad 1<i<n-1 \\ -\dfrac{1}{h^2}\cdot y_{n-2} + \left[3 + 2\sin(-2x_{n-1} -3) + \dfrac{2}{h^2}\right]y_{n-1} = -5x_{n-1}^2 - 4x_{n-1} - 4 + \dfrac{2}{h^2} \end{cases} \qquad (3)$$

Система (3) есть СЛАУ вида

$$\begin{cases} c_1 y_1 - b_1 y_2 = f_1 \\ -a_i y_{i-1} + c_i y_i - b_i y_{i+1} = f_i, \quad 1<i<n-1 \\ -a_{n-1} y_{n-2} + c_{n-1} y_{n-1} = f_{n-1} \end{cases}$$

решение которой находим по формулам метода прогонки

$$A_1 = \frac{b_1}{c_1}, \quad B_1 = \frac{f_1}{c_1} \qquad (4)$$

$$A_{i+1} = \frac{b_{i+1}}{c_{i+1} - A_i\cdot a_{i+1}}, \quad 0<i<n-2 \qquad (5)$$

$$B_{i+1} = \frac{f_{i+1} + a_{i+1}\cdot B_i}{c_{i+1} - A_i\cdot a_{i+1}}, \quad 0<i<n-1 \qquad (6)$$

$$y_{n-1} = B_{n-1}; \quad y_i = A_i\cdot y_{i+1} + B_i, \quad i=n-2,n-3,\dots,1 \qquad (7)$$

Алгоритм.

Полагаем k=3, n=8.

m1: Находим $y_1^{(n)}, y_2^{(n)},\dots, y_{n-1}^{(n)}$, решая СЛАУ (3) по формулам (4)-(7) для $h = \dfrac{3}{n}$.

(2n) (2n) (2n) 3

Находим y_1, y_2, ..., y_{2n-1}, решая СЛАУ (3) по формулам (4)-(7) для $h = \frac{}{2n}$,

n:=2n.

Находим $M = \max\limits_{0<i<n} \left| y_i^{(n)} - y_{2i}^{(2n)} \right|$. Если $M > \frac{3}{2} \cdot 10^{-3}$,

то полагаем n:=2n; h:=h/2 и возвращаемся к метке m1.
В противном случае выводим число 2n и таблицу значений

компонент $y^{(2n)}$, соответствующих x_1, x_2, ..., x_7.

В нашем случае 2n= 256 а таблица имеет вид

x	2	2.3750	2.7500	3.1250	3.5000	3.8750	4.2500	4.6250	5
y	3	-8.6180	-15.5914	-18.3765	-18.8262	-18.7900	-18.2339	-13.8220	2