

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Поволжский государственный университет телекоммуникаций и
информатики»

Кафедра высшей математики

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ
КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ 9 ПО СПЕЦИАЛЬНЫМ ГЛАВАМ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА
ДЛЯ СТУДЕНТОВ ОЧНОЙ И ЗАОЧНОЙ ФОРМЫ ОБУЧЕНИЯ

Авторы-составители
профессор, д.ф.м.-н. Блатов И.А.
доцент, к.ф.м.-н. Шевченко Г.Н.

Самара, 2017

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время математические методы широко используются для решения самых разнообразных задач науки, техники и экономики. Значение этих методов существенно возросло в связи с массовым применением компьютеров во всех сферах деятельности.

Программа курса специальных глав математического анализа составлена в объеме, необходимом для изучения общенаучных и специальных дисциплин и развития навыков, требуемых для применения приближенных и численных методов математики в практике работы программиста.

Общий курс математики, изучаемый студентами очной и заочной формы обучения ПГУТИ в течение обучения в университете состоит из аналитической геометрии и линейной алгебры, математического анализа, элементов теории вероятностей и математической статистики, дискретной математики, математической логики и теории алгоритмов, вычислительной математики.

В четвертом семестре изучаются специальные главы математического анализа.

При изучении этих разделов рекомендуется использовать следующую литературу:

Учебно-методические материалы по дисциплине.

- Рекомендуемая литература. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – М.: Наука, 2009. 2. Калиткин Н.Н. Численные методы. М.: Наука, 2010. 3. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. – М.: Наука, 2011. 4. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 2012. 5. Вержбицкий В.М. Основы численных методов. М.: «Высшая школа», 2009. Дополнительная литература. 1. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырский П. Вычислительные методы. М.: Наука, 2008. Т. 1–2 2. Ортега Дж., Пул У. Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений. М.: Мир, 2012.

**Одобрено методическим советом ПГУТИ 06.06.2017,
протокол №83**

Программа экзамена по специальным главам математического анализа

1. Источники и структура погрешности. Пример.
2. Элементы теории погрешности.
3. Постановка задачи интерполирования. Существование интерполянта.
4. Интерполяционный многочлен в форме Лагранжа.
5. Дифференцирование интерполяционного многочлена в форме Лагранжа.
6. Погрешность интерполяционного многочлена Лагранжа.
7. Разделенные разности и их свойства.
8. Интерполяционный многочлен в форме Ньютона.
9. Полиномиальные сплайны. S -сплайны. Примеры.
10. Интерполяционный кубический сплайн. Алгоритм построения.
11. Метод прогонки.
12. Простейшие квадратурные формулы и их геометрический смысл.
13. Квадратурные формулы Ньютона-Котеса.
14. Метод Рунге-Ромберга.
15. Квадратурные формулы Гаусса-Кристоффеля.
16. Численное дифференцирование с помощью многочлена Ньютона.
17. Численное дифференцирование. Метод неопределенных коэффициентов. Пример.
18. Метод Рунге-Ромберга.
19. Наилучшее среднеквадратичное приближение.

20. Метод наименьших квадратов.
21. Метод Гаусса.
22. Метод Гаусса, как метод построения LU -разложения.
23. Метод Гаусса с перестановками.
24. Вычисление определителей и обратных матриц методом Гаусса.
25. Метод квадратного корня.
26. Метод простой итерации для СЛАУ. Теорема сходимости.
27. Метод Якоби.
28. Теорема о функционале энергии.
29. Метод наискорейшего спуска.
30. Метод простой итерации для нелинейных уравнений.
31. Метод дихотомии.
32. Метод Ньютона. Геометрический смысл.
33. Метод секущих. Геометрический смысл.
34. Метод Ньютона-Канторовича.
35. Наилучшее среднеквадратичное приближение.
36. Метод наименьших квадратов.
37. Метод Эйлера.
38. Методы Рунге-Кутты. Схема построения.
39. Методы Рунге-Кутты. Построение схем второго порядка.
40. Методы Рунге-Кутты для систем дифференциальных уравнений.
41. Численные методы решения краевых задач.

Варианты контрольной работы обновляются ежегодно и размещаются на сайте кафедры высшей математики vm,rsati.ru. Номер Вашего варианта совпадает с номером Вашей зачетной книжки. В настоящем пособии приводятся формулы и алгоритмы решения задач. По этим алгоритмам Вы должны для каждой задачи написать и отладить программу на одном из языков высокого уровня, сделать необходимые расчеты и оформить решение в соответствии с примером из данного пособия.

ПРИМЕРНЫЙ ВАРИАНТ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ N7 С РЕШЕНИЕМ

Задача 1

Найти частные производные $U_x; U_y; U_{xy}; U_{xx}; U_{yy}$ функции

Определить абсолютную и относительную погрешность значения функции

$$U = 8\text{tg}(x^4 + y^4) + 9\ln(x^5 + y^4) + 2\text{arctg}(x^3 \cdot y^3)$$

при заданных абсолютных погрешностях аргументов
 $x \in (a-Dx, a+Dx), y \in (b-Dy, b+Dy)$
 $a=1.20, b=1.30, Dx=0.006, Dy=0.003$

Решение.

$$U = 8\text{tg}(x^4 + y^4) + 9\ln(x^5 + y^4) + 2\text{arctg}(x^3 \cdot y^3)$$

$a=1.20, b=1.30, Dx=0.006, Dy=0.003$

Воспользуемся формулой

$$dU = \left| \frac{\partial U}{\partial x}(a,b) \right| \cdot Dx + \left| \frac{\partial U}{\partial y}(a,b) \right| \cdot Dy \quad (1)$$

Найдем

$$U_x = 32\cos^{-2}(x^4 + y^4) \cdot x^3 + 45(x^5 + y^4)^{-1} \cdot x^4 + 6(1 + x^3 \cdot y^3)^{-1} \cdot x^2 \cdot y^3$$

$$U_x(a,b) = 1208.2268$$

$$U_y = 32\cos^{-2}(x^4 + y^4) \cdot y^3 + 36(x^5 + y^4)^{-1} \cdot y^4 + 6(1 + x^3 \cdot y^3)^{-1} \cdot x^3 \cdot y^2$$

$$U_y(a,b) = 1528.3255$$

У

Подставляя в (1), получаем абсолютную погрешность
 $DU = |1208.2268| \cdot 0.006 + |1528.3255| \cdot 0.003 = 11.8343$
 Относительную погрешность найдем по формуле

$$d = \frac{DU}{|U(x_0, y_0)|} = 0.63896$$

Задача 2

Функция $f(x)$ задана своими значениями $y = f(x_i)$ в узлах $x_i, i=1..10$.

x	8	8.080	8.090	8.180	8.200	8.250	8.270	8.360	8.400	8.410
f(x)	1.537	1.954	1.976	1.853	1.750	1.386	1.203	0.211	-0.268	-0.387

Приблизительно найти $f(\bar{x}_i)$ в узлах $\bar{x}_i = 0.7x_i + 0.3x_{i+1}, i=1..9$

с помощью интерполяционных многочленов Ньютона третьей степени (для

(нахождения $f(\bar{x}_i)$) при $i=1..7$ использовать узлы $x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}$;

(а для $f(\bar{x}_i)$) при $i=8..9$ использовать узлы x_7, x_8, x_9, x_{10}).

Оценить погрешность $\bar{f}_i(x)$, полагая

$$\max_{x \in [x_1, x_{10}]} |f^{IV}(x)| \sim 4! \cdot \max_{0 < i < 7} |f(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3})|.$$

x	8	8.080	8.090	8.180	8.200	8.250	8.270	8.360	8.400	8.410
f(x)	1.537	1.954	1.976	1.853	1.750	1.386	1.203	0.211	-0.268	-0.387

Решение.

Составим таблицу разделенных разностей

f(x)	f(x, x _{i, i+1})	f(x, x _{i, i+1, i+2})	f(x, x _{i, i+1, i+2, i+2})	f(x, x _{i, i+1, i+2, i+2, i+3})
f(x) ₁				
f(x) ₂	f(x, x _{1 2})			
f(x) ₃	f(x, x _{2 3})	f(x, x _{1 2 3})		
f(x) ₄	f(x, x _{3 4})	f(x, x _{2 3 4})	f(x, x _{1 2 3 4})	
f(x) ₅	f(x, x _{4 5})	f(x, x _{3 4 5})	f(x, x _{2 3 4 5})	f(x, x _{1 2 3 4 5})
f(x) ₆	f(x, x _{5 6})	f(x, x _{4 5 6})	f(x, x _{3 4 5 6})	f(x, x _{2 3 4 5 6})
f(x) ₇	f(x, x _{6 7})	f(x, x _{5 6 7})	f(x, x _{4 5 6 7})	f(x, x _{3 4 5 6 7})
f(x) ₈	f(x, x _{7 8})	f(x, x _{6 7 8})	f(x, x _{5 6 7 8})	f(x, x _{4 5 6 7 8})
f(x) ₉	f(x, x _{8 9})	f(x, x _{7 8 9})	f(x, x _{6 7 8 9})	f(x, x _{5 6 7 8 9})

8	7 8	6 7 8	5 6 7 8	4 5 6 7 8
$f(x)_9$	$f(x, x)_8 9$	$f(x, x, x)_7 8 9$	$f(x, x, x, x)_6 7 8 9$	$f(x, x, x, x, x)_5 6 7 8 9$
$f(x)_{10}$	$f(x, x)_9 10$	$f(x, x, x)_8 9 10$	$f(x, x, x, x)_7 8 9 10$	$f(x, x, x, x, x)_6 7 8 9 10$

по формулам

$$f(x, x, \dots, x)_{i+p} - f(x, x, \dots, x)_i = \frac{f(x, x, \dots, x)_{i+1} - f(x, x, \dots, x)_{i+2}}{x_{i+p} - x_i}$$

В нашем случае таблица имеет вид:

$f(x)$	$f(x, x)_{i, i+1}$	$f(x, x, x)_{i, i+1, i+2}$	$f(x, x, x, x)_{i, i+1, i+2, i+3}$	$f(x, x, x, x, x)_{i, i+1, i+2, i+3, i+4}$
1.537				
1.954	5.212			
1.976	2.200	-33.472		
1.853	-1.367	-35.667	-12.191	
1.750	-5.150	-34.394	10.606	113.987
1.386	-7.280	-30.429	24.784	83.397
1.203	-9.150	-26.714	41.270	91.591
0.211	-11.022	-17.020	60.588	107.323
-0.268	-11.975	-7.329	64.608	20.098
-0.387	-11.900	1.500	63.065	-9.643

Используя данные таблицы и формулы

-

-

-

-

$$f(x_i) \sim f(x_i) + f(x_i, x_{i+1})(x_i - x_{i+1}) + f(x_i, x_{i+1}, x_{i+2})(x_i - x_{i+1})(x_i - x_{i+2}) +$$

$$+ f(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3})(x_i - x_{i+1})(x_i - x_{i+2})(x_i - x_{i+3}), \quad i=1..7,$$

$$f(\bar{x}_i) \sim f(x_7) + f(x_7, x_8)(\bar{x}_i - x_7) + f(x_7, x_8, x_9)(\bar{x}_i - x_7)(\bar{x}_i - x_8) +$$

$$+ f(x_7, x_8, x_9, x_{10})(\bar{x}_i - x_7)(\bar{x}_i - x_8)(\bar{x}_i - x_9), \quad i=8,9,$$

находим приближенные решения $f(\bar{x}_i)$ и заносим их в таблицу.

\bar{x}	8	8.083	8.117	8.186	8.215	8.256	8.297	8.372	8.403
$f(\bar{x})$	1.706	1.961	2.001	1.825	1.657	1.333	0.929	0.068	-0.304

Погрешность оцениваем по формуле

$$R_i = |f(\bar{x}_i) - L(\bar{x}_i, f)| < M |(x_i - x_{i+1})(x_i - x_{i+2})(x_i - x_{i+3})|, \quad i=1..7,$$

$$R_i = |f(\bar{x}_i) - L(\bar{x}_i, f)| < M |(x_i - x_7)(x_i - x_8)(x_i - x_9)(x_i - x_{10})|, \quad i=8,9,$$

$$M = \max_j |f(x_j, x_{j+1}, x_{j+2}, x_{j+3}, x_{j+4})|, \quad i=1..9.$$

$$j = \max\{1, i-3\}, \dots, \min\{6, i\}$$

Найденные значения R_i заносим в таблицу

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
R	0.00158	0.00003	0.00214	0.00005	0.00045	0.00014	0.00212	0.00003	0.00000

Задача 3

Методом трапеций найти значение интеграла

$$I = \int_3^9 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 3x + 7x + 6}}$$

с точностью $\epsilon_{rs} = 0.0001$. Привести результаты вычислений на всех сетках, число узлов самой мелкой сетки и найденное значение интеграла.

Решение.

$$I = \int_3^9 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 3x + 7x + 6}}$$

Пусть $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 3x + 7x + 6}}$

Вычисляем по следующему алгоритму.

1. Полагаем $n:=1$.

2. Для $i=0,1,\dots,n$ полагаем $y_i = f\left(3 + \frac{6}{n}i\right)$

3. Вычисляем $I_n := \frac{6}{2n} (y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \dots + 2y_{n-1} + y_n)$;

4. Для $i=0,1,\dots,2n$ полагаем $y_i = f\left(3 + \frac{6}{2n}i\right)$

5. Вычисляем $I_{2n} := \frac{6}{4n} (y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \dots + 2y_{2n-1} + y_{2n})$;

6. Если $\left| I_{2n} - I_n \right| < \frac{1}{2} \cdot 10^{-4}$, то $I \sim I_{2n}$ и конец.

7. $n:=2n$

8. Идти на 2.

$n= 2$ $I_2 = 0.368700$

$n= 4$ $I_4 = 0.346734$

$n= 8$ $I_8 = 0.346483$

$n= 16$ $I_{16} = 0.346465$

$I \sim I_{16} = 0.346465$

Задача 4

Решить систему линейных алгебраических уравнений

$Ax=f$, $A=\{a_{ij}\}$, $f=\{f_i\}$ методом Якоби с точностью $\text{eps}=0.0001$.

Предварительно выяснить, выполнены ли условия сходимости метода Якоби. В отчете привести количество итераций n ,

приближенное решение $x^n \sim x^k$, а также приближения x^k

для $k=[n/20]$, $[n/10]$, $[n/5]$ ($[a]$ обозначает целую часть числа a .)

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -2 & -4 & -1 \\ -1 & -7 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 9 & 3 \\ -4 & 1 & 1 & -7 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -8 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Решение.

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -2 & -4 & -1 \\ -1 & -7 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 9 & 3 \\ -4 & 1 & 1 & -7 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -8 \\ 5 \end{pmatrix}$$

1) Проверим условие сходимости метода Якоби:

$$r = \min_{0 < i < 5} \left\{ |a_{ii}| - \sqrt{\sum_{j=1, j \neq i}^4 |a_{ij}|} \right\}$$

В нашем случае $r=1 > 0$

2) Преобразуем систему $Ax=f$ к виду $x=Bx+g$,

$$\text{где } B=(b_{ij}), \quad b_{ii}=0, \quad b_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}, \quad i \neq j;$$

$$g=(g_i), \quad g_i = -\frac{f_i}{a_{ii}}, \quad 0 < i, j < 5.$$

В нашем случае имеем

$$B = \begin{pmatrix} 0.00000 & 0.25000 & 0.50000 & 0.12500 \\ -0.14286 & 0.00000 & 0.00000 & 0.71429 \\ -0.33333 & -0.22222 & 0.00000 & -0.33333 \\ -0.57143 & 0.14286 & 0.14286 & 0.00000 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} -0.25000 \\ -0.42857 \\ -0.88889 \\ -0.71429 \end{pmatrix}$$

$$g = (-0.25000 \quad -0.42857 \quad -0.88889 \quad -0.71429)^T$$

3) Вычислим $q := \max_{0 < i < 5} (|b_{i1}| + |b_{i2}| + |b_{i3}| + |b_{i4}|)$.

В нашем случае $q=0.88889$

4) Положим $x^0 = (0, 0, 0, 0)$ $x^1 = g$.

5) Определим число итераций n по формуле

$$n := \left\lceil \log_q \frac{\text{eps} \cdot (1-q)}{\|x^1 - x^0\|} \right\rceil + 1, \quad \text{где}$$

$$\|x\| = \max_{0 < i < 5} |x_i|. \quad \text{В нашем случае } n=96.$$

$$x^{[n/20]} = x^4 = (-0.59850 \quad -0.62677 \quad -0.43093 \quad -0.51113)$$

$$x^{[n/10]} = x^9 = (-0.66199 \quad -0.68450 \quad -0.35998 \quad -0.49124)$$

$$x^{[n/5]} = x^{19} = (-0.65901 \quad -0.68149 \quad -0.35577 \quad -0.48585)$$

$$x^n = x^{96} = (-0.65901 \quad -0.68149 \quad -0.35581 \quad -0.48589)$$

Задача 5

Найти обратную матрицу и определитель матрицы A методом Гаусса. Вывести все промежуточные преобразования,

определитель и матрицу A^{-1} .

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & -9 & 3 & -5 \\ 1 & -5 & -9 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 & -7 \end{vmatrix}$$

Решение.

$$A = \begin{vmatrix} 6 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & -9 & 3 & -5 \\ 1 & -5 & -9 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & -7 \end{vmatrix}$$

Выполняем следующие преобразования

1) Полагаем $e_{ii} := 1$; $e_{ij} := 0$ при $i \neq j$, $0 < i, j < 5$.

2) Выводим запись

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} X = \begin{vmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} & e_{14} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} & e_{24} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & e_{34} \\ e_{41} & e_{42} & e_{43} & e_{44} \end{vmatrix} \quad (*)$$

3) Для $i:=1..3$ выполнить

```
begin
  Для j:=i+1..4 выполнить
  begin
    Для k:=1..i выполнить
      e
      ik
      e := e - (a_jk / a_ji) * a_ik
    Для k:=i+1..4 выполнить
      a
      ik
      a := a - (a_jk / a_ji) * a_ik
    a := 0;
    j := i;
  end;
  выводим запись (*).
end;
```

4) Находим $d := a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot a_{44}$ и выводим запись "det A="d

5) Для $i:=4..2$ выполнить

```
begin
  p := a_ii
  Для j:=1..4 выполнить
  begin
    a
    ij
    e := a_ij / p; e := e_ij / p;
  end;
  Для j:=i-1..1 выполнить
  begin
    Для k:=4..1 выполнить
      e := e - e_jk * a_ik / a_ji
    a := 0;
    j := i;
  end;
  выводим запись (*).
end;
```

6) Выводим запись

$$\begin{vmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} & e_{14} \end{vmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} e & e & e & e \\ 21 & 22 & 23 & 24 \\ e & e & e & e \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ e & e & e & e \\ 41 & 42 & 43 & 44 \end{pmatrix} \quad \text{где E-последняя запись в (*)}$$

7) Делаем проверку $A^{-1} A = I$.

$$\begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & -9 & 3 & -5 \\ 1 & -5 & -9 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6.000 & -2.000 & 2.000 & -1.000 \\ 0.000 & -9.000 & 3.000 & -5.000 \\ 0.000 & -4.667 & -9.333 & -0.833 \\ 0.000 & -0.667 & 0.667 & -7.333 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 1.000 & 0.000 & 0.000 \\ -0.167 & 0.000 & 1.000 & 0.000 \\ 0.333 & 0.000 & 0.000 & 1.000 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6.000 & -2.000 & 2.000 & -1.000 \\ 0.000 & -9.000 & 3.000 & -5.000 \\ 0.000 & 0.000 & -10.889 & 1.759 \\ 0.000 & 0.000 & 0.444 & -6.963 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 1.000 & 0.000 & 0.000 \\ -0.167 & -0.519 & 1.000 & 0.000 \\ 0.333 & -0.074 & 0.000 & 1.000 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6.000 & -2.000 & 2.000 & -1.000 \\ 0.000 & -9.000 & 3.000 & -5.000 \\ 0.000 & 0.000 & -10.889 & 1.759 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & -6.891 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 1.000 & 0.000 & 0.000 \\ -0.167 & -0.519 & 1.000 & 0.000 \\ 0.327 & -0.095 & 0.041 & 1.000 \end{pmatrix}$$

det A = -4052.000

$$\begin{pmatrix} 6.000 & -2.000 & 2.000 & 0.000 \\ 0.000 & -9.000 & 3.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & -10.889 & 0.000 \\ -0.000 & -0.000 & -0.000 & 1.000 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0.953 & 0.014 & -0.006 & -0.145 \\ -0.237 & 1.069 & -0.030 & -0.726 \\ -0.083 & -0.543 & 1.010 & 0.255 \\ -0.047 & 0.014 & -0.006 & -0.145 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6.000 & -2.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & -9.000 & 0.000 & 0.000 \\ -0.000 & -0.000 & 1.000 & -0.000 \\ -0.000 & -0.000 & -0.000 & 1.000 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0.937 & -0.086 & 0.180 & -0.098 \\ -0.260 & 0.920 & 0.249 & -0.655 \\ 0.008 & 0.050 & -0.093 & -0.023 \\ -0.047 & 0.014 & -0.006 & -0.145 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ -0.000 & 1.000 & -0.000 & -0.000 \\ -0.000 & -0.000 & 1.000 & -0.000 \\ -0.000 & -0.000 & -0.000 & 1.000 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0.995 & -0.290 & 0.124 & 0.047 \\ 0.029 & -0.102 & -0.028 & 0.073 \\ 0.008 & 0.050 & -0.093 & -0.023 \\ -0.047 & 0.014 & -0.006 & -0.145 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ -0.000 & 1.000 & -0.000 & -0.000 \\ -0.000 & -0.000 & 1.000 & -0.000 \\ -0.000 & -0.000 & -0.000 & 1.000 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0.166 & -0.048 & 0.021 & 0.008 \\ 0.029 & -0.102 & -0.028 & 0.073 \\ 0.008 & 0.050 & -0.093 & -0.023 \\ -0.047 & 0.014 & -0.006 & -0.145 \end{pmatrix}$$

Для элементов I_{ij} матрицы $I = AA^{-1}$ имеем

$$I_{11} = +6.000(0.166) - 2.000(0.029) + 2.000(0.008) - 1.000(-0.047) = 1.000$$

$$I_{12} = +6.000(-0.048) - 2.000(-0.102) + 2.000(0.050) - 1.000(0.014) = 0.000$$

$$I_{13} = +6.000(0.021) - 2.000(-0.028) + 2.000(-0.093) - 1.000(-0.006) = -0.000$$

$$I_{14} = +6.000(0.008) - 2.000(0.073) + 2.000(-0.023) - 1.000(-0.145) = 0.000$$

$$I_{21} = +0.000(0.166) - 9.000(0.029) + 3.000(0.008) - 5.000(-0.047) = -0.000$$

$$I_{22} = +0.000(-0.048) - 9.000(-0.102) + 3.000(0.050) - 5.000(0.014) = 1.000$$

$$I_{23} = +0.000(0.021) - 9.000(-0.028) + 3.000(-0.093) - 5.000(-0.006) = -0.000$$

$$I_{24} = +0.000(0.008) - 9.000(0.073) + 3.000(-0.023) - 5.000(-0.145) = -0.000$$

$$I_{31} = +1.000(0.166) - 5.000(0.029) - 9.000(0.008) - 1.000(-0.047) = -0.000$$

$$I_{32} = +1.000(-0.048) - 5.000(-0.102) - 9.000(0.050) - 1.000(0.014) = -0.000$$

$$I_{33} = +1.000(0.021) - 5.000(-0.028) - 9.000(-0.093) - 1.000(-0.006) = 1.000$$

$$I_{34} = +1.000(0.008) - 5.000(0.073) - 9.000(-0.023) - 1.000(-0.145) = -0.000$$

$$I_{41} = -2.000(0.166) + 0.000(0.029) + 0.000(0.008) - 7.000(-0.047) = 0.000$$

$$I_{42} = -2.000(-0.048) + 0.000(-0.102) + 0.000(0.050) - 7.000(0.014) = 0.000$$

$$I_{43} = -2.000(0.021) + 0.000(-0.028) + 0.000(-0.093) - 7.000(-0.006) = 0.000$$

$$I_{44} = -2.000(0.008) + 0.000(0.073) + 0.000(-0.023) - 7.000(-0.145) = 1.000$$

Итак $I_{ij} = 0$ при $i \neq j$, $I_{ii} = 1$, то есть I -единичная матрица.

Задача 6

Методом дихотомии (половинного деления) найти корень

$$\text{уравнения } -4x^3 - 2x^2 - x - 7 = 0 \text{ с точностью } \epsilon_{ps} = 0.001.$$

Предварительно найти отрезок $[a, b]$, содержащий корень (отделить корень). В отчете привести отрезок $[a, b]$, приближенное значение корня.

Пусть $f(x) = -4x^3 - 2x^2 - x - 7$. Приведем алгоритм решения задачи.

В пунктах 1-10 отделяется корень, в пунктах 11-18 корень уточняется.

1. Положим $u:=0$; $v:=0$; $t:=-1$; $w:=1$.
2. Если $f(u)=0$, то $\bar{x}=u$, $[a,b]=[u-1,u+1]$ и конец,
Если $f(v)=0$, то $\bar{x}=v$, $[a,b]=[v-1,v+1]$ и конец,
Если $f(w)=0$, то $\bar{x}=w$, $[a,b]=[w-1,w+1]$ и конец,
Если $f(t)=0$, то $\bar{x}=t$, $[a,b]=[t-1,t+1]$ и конец.
3. Если $\text{sign}(f(u))\text{sign}(f(w))<0$, то идти на 7.
4. Если $\text{sign}(f(v))\text{sign}(f(t))<0$, то идти на 9.
5. Положим $u:=u+1$; $w:=w+1$; $v:=v-1$; $t:=t-1$.
6. Идти на 2.
7. Положим $a:=u$; $b:=w$.
8. Идти на 10.
9. Положим $a:=t$; $b:=v$.
10. Выводим запись "Отрезок, содержащий корень-[a,b]".
11. Если $b-a<\epsilon$, то выводим "приближенное значение
корня $\bar{x}=(b+a)/2$ " и конец.
12. Положим $u:=(a+b)/2$.
13. Если $f(u)=0$, то $\bar{x}=u$ и конец.
14. Если $f(u)f(a)<0$, то идти на 17.
15. $a:=u$;
16. Идти на 11.
17. $b:=u$;
18. Идти на 11.

Отрезок, содержащий корень $[-2.000000, -1.000000]$, приближенное значение корня $\bar{x}=-1.317871$

Задача 7

Методом сеток найти приближенное решение $\{y_0, y_1, y_2, \dots, y_8\}$ краевой задачи

$$\begin{cases} -y'' + (3 + 2\sin(-2x-3))y = -5x^2 - 4x - 4 \\ y(2)=3, \quad y(5)=2 \end{cases}$$

$$\text{с точностью } \max_{0 < i < 8} |y_i - y(x_i)| < 10^{-3}$$

Вывести таблицу значений приближенного решения и число узлов самой мелкой сетки, на которой оно найдено.

Решение.

$$\begin{cases} -y'' + (3 + 2\sin(-2x-3))y = -5x^2 - 4x - 4 \\ y(2)=3, \quad y(5)=2 \end{cases}$$

$$\text{с точностью } \max_{0 < i < 8} |y_i - y(x_i)| < 10^{-3}$$

Заменим функцию $y(x)$ сеточной функцией $\{y_0, y_1, \dots, y_8\}$,

$y_0 = 3$, $y_8 = 2$, производную y'' - по формуле численного дифференцирования

$$y''(x) \sim \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} \quad \text{где } h=3/n; \quad n = 2^k$$

Тогда получим разностную схему, аппроксимирующую задачу (1) с точностью $O(h^2)$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + (3 + 2\sin(-2x_i - 3))y_i = -5x_i^2 - 4x_i - 4, \quad 0 < i < n \\ y_0 = 3, \quad y_n = 2 \end{array} \right. \quad (2)$$

Исключим y_0 и y_n , и преобразуем (2) к виду

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[3 + 2\sin(-2x_1 - 3) + \frac{2}{h} \right] y_1 - \frac{1}{h^2} \cdot y_2 = -5x_1^2 - 4x_1 - 4 + \frac{3}{h} \\ -\frac{1}{h^2} \cdot y_{i-1} + \left[3 + 2\sin(-2x_i - 3) + \frac{2}{h} \right] y_i - \frac{1}{h^2} \cdot y_{i+1} = -5x_i^2 - 4x_i - 4, \quad 1 < i < n-1 \\ -\frac{1}{h^2} \cdot y_{n-2} + \left[3 + 2\sin(-2x_{n-1} - 3) + \frac{2}{h} \right] y_{n-1} = -5x_{n-1}^2 - 4x_{n-1} - 4 + \frac{2}{h} \end{array} \right. \quad (3)$$

Система (3) есть СЛАУ вида

$$\left\{ \begin{array}{l} c_1 y_1 - b_1 y_2 = f_1 \\ -a_i y_{i-1} + c_i y_i - b_i y_{i+1} = f_i, \quad 1 < i < n-1 \\ -a_{n-1} y_{n-2} + c_{n-1} y_{n-1} = f_{n-1} \end{array} \right.$$

решение которой находим по формулам метода прогонки

$$A_1 = \frac{b_1}{c_1}, \quad B_1 = \frac{f_1}{c_1} \quad (4)$$

$$A_{i+1} = \frac{b_{i+1}}{c_{i+1} - A_i \cdot a_{i+1}}, \quad 0 < i < n-2 \quad (5)$$

$$B_{i+1} = \frac{f_{i+1} + a_{i+1} \cdot B_i}{c_{i+1} - A_i \cdot a_{i+1}}, \quad 0 < i < n-1 \quad (6)$$

$$y_{n-1} = B_{n-1}; \quad y_i = A_i \cdot y_{i+1} + B_i, \quad i = n-2, n-3, \dots, 1 \quad (7)$$

Алгоритм.

Полагаем $k=3, n=8$.

m1: Находим $y_1^{(n)}, y_2^{(n)}, \dots, y_{n-1}^{(n)}$, решая СЛАУ (3) по формулам (4)-(7) для $h = \frac{3}{n}$.

Находим $y_1^{(2n)}, y_2^{(2n)}, \dots, y_{2n-1}^{(2n)}$, решая СЛАУ (3) по формулам (4)-(7) для $h = \frac{3}{2n}$,

$n:=2n$.

Находим $M = \max_{0 < i < n} \left| y_i^{(n)} - y_{2i}^{(2n)} \right|$. Если $M > \frac{3}{2} \cdot 10^{-3}$,

то полагаем $n:=2n$; $h:=h/2$ и возвращаемся к метке m1.
В противном случае выводим число $2n$ и таблицу значений

компонент $y_1^{(2n)}, \dots, y_{2n}^{(2n)}$, соответствующих x_1, x_2, \dots, x_{2n} .

В нашем случае $2n=256$ а таблица имеет вид

x	2	2.3750	2.7500	3.1250	3.5000	3.8750	4.2500	4.6250	5
y	3	-8.6180	-15.5914	-18.3765	-18.8262	-18.7900	-18.2339	-13.8220	2