ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО СВЯЗИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«ПОВОЛЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСТЕТ
ТЕЛЕКОММУНИКАЦИЙ И ИНФОРМАТИКИ»

Кафедра физики

Глущенко Е.П.

# СТОЯЧИЕ ВОЛНЫ В ИЗОТРОПНЫХ

# И В НЕВЗАИМНЫХ СРЕДАХ

Учебное пособие

Самара 2018

УДК 537.8

БКК 22.3

Г

Рекомендовано к изданию методическим советом ПГУТИ, протокол №39, от 18.04.2018 г

***Рецензент:***

Андреев В.А. – д.т.н., профессор кафедры ЛС и ИТС ФГБОУ ВО ПГУТИ

**Глущенко Е.П. Стоячие волны в изотропных и невзаимных средах**: учебное пособие / Е.П. Глущенко. – Самара: ПГУТИ, 2018. – 16 с.

Учебное пособие содержит материал отдельного раздела курса физики (основы упругих и электромагнитных волновых процессов). Учебное пособие разработано в соответствии с ФГОС ВПО по направлению подготовки бакалавров и с магистров бакалавров и магистров 09.03.02 - Информационные системы и технологии, 10.03.01 - Информационная безопасность, 10.05.02 - Информационная безопасность телекоммуникационных систем, 11.05.01 - Радиоэлектронные системы и комплексы, 11.03.02 - Инфокоммуникационные технологии и системы связи, 11.03.01 – Радиотехника, 12.03.03 - Фотоника и оптоинформатика. Содержит материал не входящий в известные учебные пособия, контрольные вопросы и предметный указатель. Предназначено для студентов 1-2 курсов факультета базового телекоммуникационного образования для практических занятий и самостоятельной подготовки, а также может быть использовано студентами других специальностей вузов.

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики»

***Введение***

**Стоячая волна** — явление интерференции когерентных волн с одинаковой поляризацией, распространяющихся во взаимно противоположных направлениях. Стоячая волна проявляется в периодическом изменении амплитуды колебательного процесса вдоль направления распространения.

Стоячая волна — колебательный процесс в распределённых колебательных системах с устойчивым в пространстве расположением чередующихся максимумов (пучностей) и минимумов (узлов) амплитуды. Стоячие волны формируются при отражении волн и наложении падающей на препятствие и отраженной волн, что обеспечивает когерентность этих волн. Стоячая волна, строго говоря, формируется только при полном отражении волн (с коэффициентом отражения равном единице) и в отсутствие затухания (потерь энергии), что обеспечивает сложение волн с одинаковой амплитудой. В реальных средах и волноводных структурах наблюдается смешанный режим, который можно рассматривать как наложение стоячей и бегущей волн [1-8].

***Одномерные стоячие волны.***

Рассмотрим падающую и отраженную волны гармонических колебаний в виде:

$$\xi_1(x,t) = A\cos(\omega t - kx)$$

$$\xi_2(x,t) = A\cos(\omega t + kx + \varphi)$$

где $\xi_{1,2}(x,t)$ – возмущения в точке $x$ в момент времени $t$, $A$ – амплитуда стоячей волны, $\omega$ – частота, $k$ – волновой вектор, $\varphi$ – фаза.

Результирующее уравнение для стоячей волны $\xi(x,t)$ будет в виде суммы волн $\xi_1(x,t)$ и $\xi_2(x,t)$:

$$\xi(x,t) = \xi_1(x,t) + \xi_2(x,t) = A\cos(\omega t - kx) + A\cos(\omega t + kx + \varphi) =$$
$$= 2A\cos\left(kx + \frac{\varphi}{2}\right)\cos\left(\omega t + \frac{\varphi}{2}\right)$$

На рис.1, 2 показана структура стоячей волны для различных моментов времени.

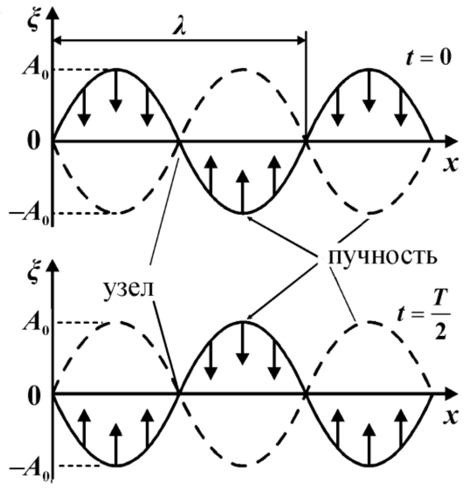


Рис.1. Структура стоячей волны для двух моментов времени через половину периода ($\varphi = \pi$)

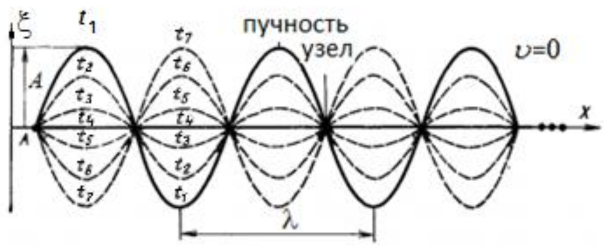


Рис.2. Изменение структуры стоячей волны в различные моменты времени через промежутки времени равные T/8

В точках $x = 0, \frac{\lambda}{2}, 2\frac{\lambda}{2}, ..., m\frac{\lambda}{2}$ амплитуда колебаний равна нулю. Эти точки получили название «узлы».

В точках $x = \frac{\lambda}{4}, 3\frac{\lambda}{4}, ..., (2m+1)\frac{\lambda}{4}$ амплитуда колебаний максимальна и равна 2А . Эти точки получили название «пучности».

Стоячие волны образуются в волноводных структурах, в областях, ограниченных различными неоднородностями структуры, отражателями и т.п. В зависимости от частоты в ограниченных областях возможно формирование стоячих волн с различным числом полуволн. На рис. 3 показано формирование в струне трех стоячих волн (с одной, двумя и с тремя полуволнами) между двух отражателей волн.

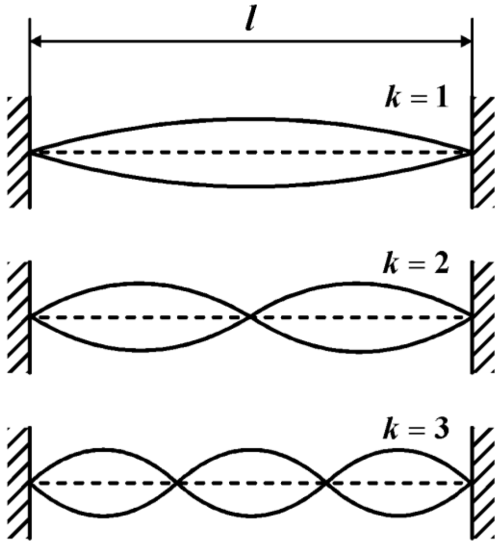


Рис.3. Структура первых трех собственных колебаний струны

Числу полуволн 2, 3, 4 … и т.д. соответствуют более высокие частоты собственных колебаний струны, называемые *обертонами*. Наблюдая форму стоячей волны на струне, можно определить длину волны и, зная частоту колебаний, определить экспериментально скорость волны в струне. По числу полуволн в направлении каждой координатной оси различают моды колебания. Если при падении волны на неоднородность структуры происходит её полное *поглощение*, то отраженная волна отсутствует, интерференции волн нет, амплитуда волнового процесса в пространстве постоянна. Такой волновой процесс называют **бегущей** волной. Бегущая волна переносит энергию.

Стоячая волна характеризуется отсутствием переноса энергии, энергия накапливается в областях пучностей стоячей волны.

Стоячие волны являются решением однородного дифференциального волнового уравнения (Даламбера):

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\xi(x,t) = 0$$

Неоднородное дифференциальное уравнение:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\xi(x,t) = f(\xi)$$

определяет стоячую волну, формируемую внешним воздействием $f(\xi)$.

***Двумерные стоячие волны.***

Стоячие волны могут существовать не только в одномерных системах типа натянутой струны. На любой упругой пластине конечных размеров (рис.4) при определенных условиях возникают стоячие волны, то есть такие колебания, при которых все точки колеблются с одной частотой и в одной фазой. Так же как и в одномерном случае точки, амплитуда колебаний которых равна нулю, называются **узлами**. Эти точки образуют непрерывные линии на поверхности пластины, называемые **узловыми линиями**. Некоторые точки пластины могут быть закреплены. В этом случае они также являются узловыми. Точки, амплитуды колебаний которых максимальны, называются **пучностями**. Типы возможных стоячих волн пластинки зависят от ее формы. Кроме того, формы стоячих волн зависят от граничных условий: края пластинки могут быть закреплены, могут быть свободны. В первом случае на границе будут располагаться узловые линии стоячей волны, во втором – пучности. Частоты этих собственных колебаний (т.е. стоячих волн) зависят не только от размеров, формы пластины, граничных условий и от скорости распространения волн по пластине.

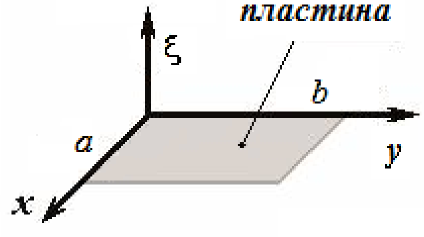


Рис.4. Пластина упругой среды

Наиболее просто описываются стоячие волны на прямоугольной пластинке с закрепленными краями. Если задать декартовую систему координат, так чтобы ее оси совпадали с краями пластинки, то функции, описывающие колебания пластинки с закрепленными краями имеют вид:

$$\xi(x, y, t) = A\sin(k_x x)\sin(k_y y)\cos(\omega t)$$

где $k_x, k_y$ - волновые числа, значения которых определяются граничными условиями. Так как края пластинки закреплены, то ее возмущения должны обращаться в нуль при $x = 0, x = a$, $y = 0, y = b$, что накладывает ограничения на возможные значения параметров: $k_x a = n_x \pi, k_y b = n_y \pi$, где $n_x = \pm1, \pm2, \pm3...,$ $n_y = \pm1, \pm2, \pm3...$

Следовательно, волновые числа $k_x, k_y$ могут принимать значения:

$$k_x = \frac{n_x \pi}{a}, k_y = \frac{n_y \pi}{b} .$$

Таким образом, форма собственных колебаний пластинки определяется двумя целыми числами $n_x, n_y$, каждое из которых равно числу пучностей волны вдоль соответствующих сторон пластинки. На рис. 5 показаны два типа (моды) стоячей волны на прямоугольной пластинке с различными значениями этих параметров.

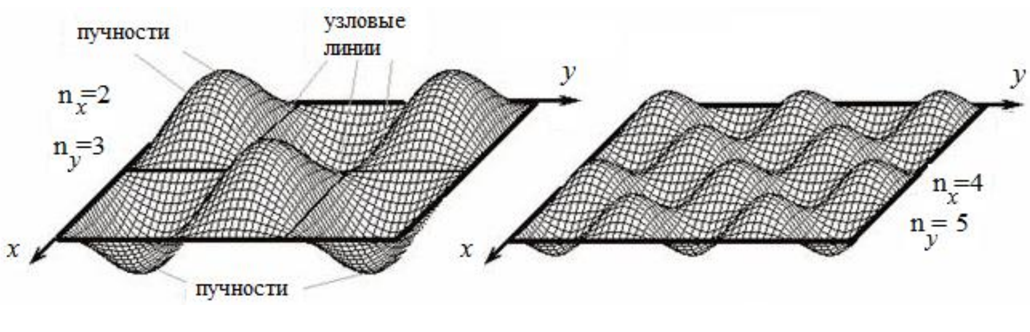


Рис.5. Различные структуры стоячей волны в пластине

Возможный набор частот собственных колебаний такой пластинки также зависит от этих двух целочисленных параметров, причем они равны:

$$\omega = c\sqrt{k_x^2 + k_y^2} = c\sqrt{\left(\frac{n_x\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n_y\pi}{b}\right)^2}$$

где $c$ – скорость распространения волн по пластинке.

Виды собственных поперечных колебаний пластинок различных форм легко наблюдать и изучать с помощью простого эксперимента. Исследуемую пластинку располагают горизонтально, закрепляют в нужных местах и посыпают тонким слоем мелкозернистого песка и возбуждают ее колебания. Проще всего это сделать, если провести по ее незакрепленному краю смычком. В ходе колебаний песок, находящийся в местах пучностей приходит в движение и скапливается в тех точках пластинки, которые неподвижны, то есть на узловых линиях. В результате на пластинке образуется хорошо видимая сетка узловых линий, «нарисованная» крупицами песка. Образованные таким способом узоры получили название фигур Хладни [1-2].

Собственными колебаниями обладают также двумерные поверхности, отличающиеся от плоских. На рис.6 показаны некоторые виды собственных колебаний сферы.

Эти собственные колебания описываются сложными функциями. Однако вид этих колебаний (и их частоты) также определяется двумя целыми числами. Так для сферы они определяют число пучностей «вдоль параллелей и меридианов». На длине экватора укладывается целое число длин стоячих волн.

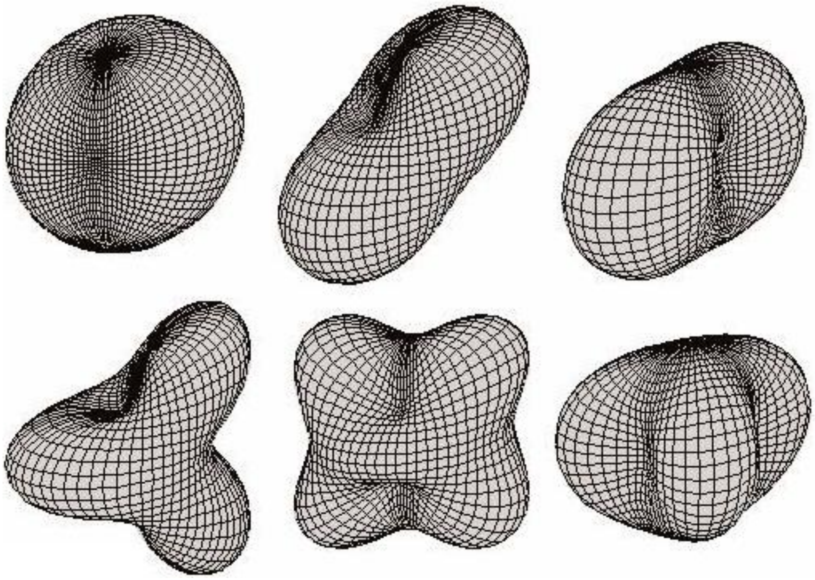

Рис.6. Структуры стоячей волны на поверхности сферы

***Трехмерные стоячие волны.***

Собственными колебаниями обладают и трехмерные тела. Формы этих колебаний могут быть весьма причудливы, зависят от формы тела, граничных условий, точек закрепления. Собственные колебания трехмерных тел определяются тремя целочисленными параметрами. Так в простейшем случае упругих колебаний сплошного параллелепипеда со сторонами $a,b,l$ и жестко закрепленными гранями, его собственные колебания описываются функциями:

$$\xi(x,y,t) = A\sin(k_x x)\sin(k_y y)\sin(k_z z)\cos(\omega t)$$

Частоты этих колебаний зависят от скорости распространения волн и определяются набором трех целых чисел $n_x, n_y, n_z$:

$$\omega = c\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} = c\sqrt{\left(\frac{n_x\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n_y\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{n_z\pi}{l}\right)^2}$$

Для тел другой формы типы собственных колебаний и их частоты описываются гораздо более сложными функциями, однако, в любом случае они определяются тремя целыми параметрами $n_x, n_y, n_z$.

Большое значение имеют собственные колебания резонаторов различных диапазонов частот высокочастотных колебаний (микроволнового, инфракрасного, оптического диапазонов), ограниченных объемов воздуха в различных музыкальных инструментах. Их полости – резонаторы имеют сложную геометрическую форму, поэтому типы возможных стоячих звуковых волн (и их частоты) весьма разнообразны. В акустике, чем более совершенный музыкальный инструмент, тем больше собственных частот возбуждается при его звучании, поэтому спектр его звучания оказывается богат различными частотами, поэтому звук имеет богатый тембр.

***Стоячие волны в невзаимных структурах.***

Физические свойства стоячих волн широко используются в резонаторах, построенных на отрезках волноводных структур. В литературе представлены только результаты анализа физических свойств стоячих волн в изотропных средах и волноводных структурах (с одинаковыми параметрами в прямом и обратном направлениях). Более общая модель резонаторов, построенных на анизотропных структурах и средах, нигде не рассматривается, хотя и представляет интерес при моделировании невзаимных устройств волновой техники, в частности, вентилей, циркуляторов и др. [4-8]. Покажем, что свойства стоячих волн в средах и волноводных структурах с невзаимными для распространяющихся волн параметрами (скоростью или волновыми числами) в прямом и обратном направлениях имеют существенные отличия от стоячих волн в изотропных (с взаимными в прямом и обратном направлениях свойствами) средах. Установлено, что на колебательный процесс стоячей волны за счет невзаимных свойств сред накладывается дополнительный волновой процесс. Колебания рядом расположенных пространственно разнесенных точек стоячей волны теряют свойство синфазности.

Стоячие волны описываются хорошо известным уравнением стоячей волны, которое может быть получено сложением уравнений двух плоских волн равной амплитуды, распространяющихся во взаимно противоположных направлениях (для простоты начальная фаза каждой из волн равна нулю, $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$):

$$\xi(x,t) = \xi_1(x,t) + \xi_2(x,t) = A\cos(\omega t - kx) + A\cos(\omega t + kx) =$$
$$= 2A\cos(kx)\cdot\cos(\omega t) = 2A\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)\cdot\cos(\omega t),$$

где $k = 2\pi/\lambda$ - волновое число, $\lambda$ - длина волны. В силу когерентности прямой и обратной волн, необходимой для возбуждения стоячих волн, частоты прямой и обратной волн равны $\omega_1 = \omega_2 = \omega$. При этом, без каких-либо оговорок, принимается, что помимо частот равны и волновые числа для прямой и обратной волн ($k_1 = k_2 = k$) [4,8]. Однако, это справедливо только в частном (хотя и весьма распространенном) случае сред и структур, обладающих взаимными свойствами. При наличии анизотропии скорость распространения волн может зависеть от направления их распространения, а среда или волноводная структура могут обладать невзаимными свойствами. Такие свойства наблюдаются в структурах и средах с электрической или магнитной гиротропией параметров [6,8]. В этом случае сохраняется временная когерентность волн, но физические свойства стоячей волны изменяются. Для невзаимных сред уравнение стоячей волны приобретает вид:

$$\xi(x,t) = \xi_1(x,t) + \xi_2(x,t) = A\cos(\omega t - k_1 x) + A\cos(\omega t + k_2 x) =$$
$$= 2A\cos\left(\frac{k_1 + k_2}{2}x\right)\cdot\cos\left(\omega t - \frac{k_1 - k_2}{2}x\right),$$

$k_1 = \omega/\upsilon_1, k_2 = \omega/\upsilon_2$, $\upsilon_1, \upsilon_2$ - скорости распространения прямой и обратной волн, может быть представлено в виде:

$$\xi(x,t) = 2A\cos(k_+x)\cdot\cos(\omega t - k_-x),$$

где $k_+ = \frac{k_1 + k_2}{2} = \frac{2\pi}{\lambda_{cm}}$ определяет длину стоячей волны $\lambda_{cm} = \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$, которая зависит от $\lambda_1, \lambda_2$ - длин прямой и обратной волн, $2A\cos(k_+x)$ – амплитуда стоячей волны зависит от координаты и параметров, характеризующих невзаимные свойства среды. Волновое число $k_- = \frac{k_1 - k_2}{2}$ характеризует скорость волнового процесса, вызванного невзаимностью параметров для прямых и обратных волн, накладывающегося на картину стоячей волны. При $k_1 = k_2 = k$ имеем обычную картину стоячих волн. Из уравнения, описывающего стоячие волны в невзаимных структурах следует, что фаза $\varphi(x,t) = \omega t - k_-x$ определяется не только временем, но и координатой. Постоянное значение фазы $\varphi(x,t) = \omega t - \frac{k_1 - k_2}{2}x = const$ смещается со скоростью $\upsilon_s = \frac{2\upsilon_1\upsilon_2}{\upsilon_1 - \upsilon_2}$.

В предельном случае среды с взаимными свойствами $k_1 \to k_2 = k$, фазовая скорость волнового процесса $\upsilon_s \to \infty$, $\varphi(x,t) \to \omega t$ и в пределе мы имеем известную картину стоячей волны. Определяемая соотношением $k_- = \frac{k_1 - k_2}{2} = \frac{2\pi}{\lambda_-}$ длина волны волнового процесса $\lambda_- \to \infty$. При этом наблюдается синфазное колебание соседних точек пространства.

Как известно, в уравнении стоячей волны в выражении для фазы не входит координата, поэтому колебательные процессы во всех точках пространства, расположенных между ближайшими узлами в областях

$$-\frac{\lambda}{4}+m\lambda < x < \frac{\lambda}{4}+m\lambda,$$

($m = 0,1,2,\ldots$ ) синфазны по отношению друг к другу. Аналогично в соседних с ними областях

$$\frac{\lambda}{4}+m\lambda < x < \frac{3\lambda}{4}+m\lambda,$$

колебания также синфазны по отношению друг к другу. Колебательные процессы для любой пары точек, принадлежащих различным областям пространства, наоборот, противофазны между собой.

Из уравнения стоячей волны в невзаимных средах следует, что исчезает свойство синфазности колебаний в соседних точках. Расстояние между ближайшими точками пространства с синфазными колебаниями теперь определяется соотношением:

$$\Delta x_s = \frac{4\pi}{k_1 - k_2} = \frac{2\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

В точках пространства, где координаты удовлетворяют условию:

$$\frac{k_1 + k_2}{2}x = \pm m\pi,$$

функция $\cos\left(\frac{k_2 + k_1}{2}x\right) = 1$ и суммарная амплитуда равна максимальному значению $2A$. В этих точках находятся пучности стоячей волны. Координаты пучностей определяются формулой: $x_{\max,m} = \pm\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}m$. В точках, координаты которых удовлетворяют условию:

$$\frac{k_1 + k_2}{2}x = \pm\left(\frac{2m+1}{2}\right)\pi,$$

функция $\cos\left(\frac{k_2 + k_1}{2}x\right) = 0$, суммарная амплитуда колебаний равна нулю, колебательный процесс отсутствует. Здесь находятся узлы стоячей волны, координаты которых определяются соотношениями:

$$x_{\min,\, m} = \pm \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}\left(m + \frac{1}{2}\right).$$

Расстояние между узлами и пучностями при росте невзаимности параметров среды уменьшается.

Таким образом, различие скоростей распространения прямых и обратных волн при их наложении друг на друга приводит: к уменьшению расстояний между пучностями и между узлами стоячей волны; к формированию дополнительного волнового процесса с фазовой скоростью $\upsilon_s = \dfrac{2\upsilon_1\upsilon_2}{\upsilon_1 - \upsilon_2}$; к нарушению синфазности колебаний в соседних точках, расположенных между ближайшими узлами. На рис.7 показан характер динамики структуры стоячей волны в пространстве. Таким образом, невзаимность параметров волноведущих структур и сред приводит к существенному изменению характера возбуждаемых стоячих волн, в частности, нарушается синфазность колебаний в разнесенных между собой точках пространства, расположенных между узлами, уменьшается расстояние между узлами и пучностями.

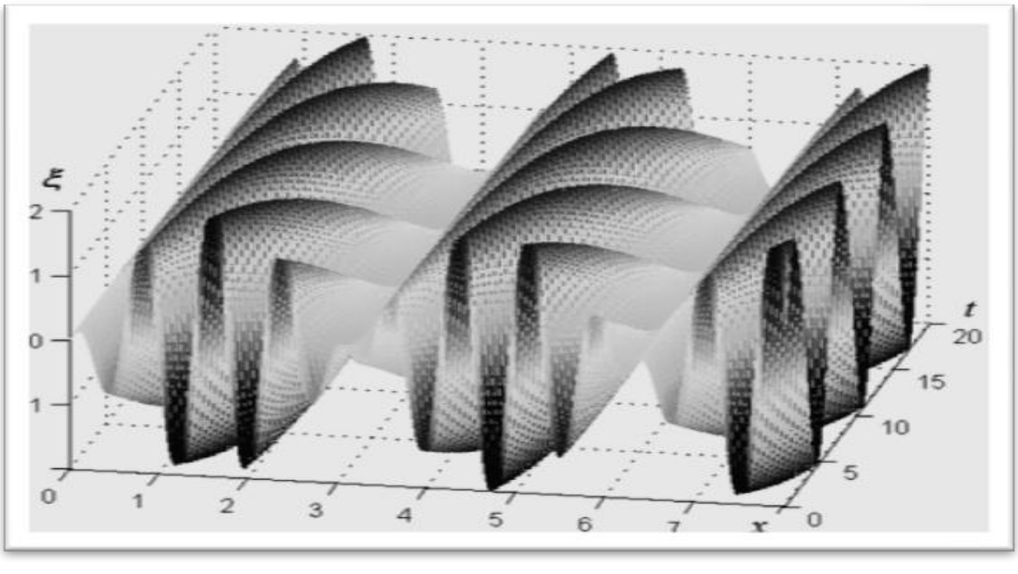


Рис.7. Структура стоячей волны в невзаимной среде

***Контрольные вопросы по теме:***

1. Что такое стоячая волна, в чем её отличие от бегущей волны.
2. Получить уравнение стоячей волны в изотропной среде.
3. Получить уравнение стоячей волны в невзаимной среде.
4. В чем основные отличия стоячих волн в изотропной и в невзаимной средах?
5. Записать уравнения стоячих волн в двух- и трехмерной структурах.
6. Резонансные частоты резонансных структур.
7. Моды резонаторов.

***Предметный указатель***



**Основная литература**

1. Савельев И.В. Курс физики. Т. 1. Механика. Молекулярная физика и термодинамика. 3-е изд., стер.– СПб.: Изд. Лань,2007.-352 с. (Учебники для вузов).
2. Савельев И.В. Курс физики. Т. 2. Электричество и магнетизм. Волны. Оптика. 3-е изд., стер.– СПб.: Изд. Лань,2007.-320 с. (Учебники для вузов).
3. Глущенко А.Г., Глущенко Е.П. Физические свойства стоячих волн в невзаимных средах и структурах. Физическое образование в вузах.– 2014.– Т.20.– N 3.– С. 54–58.
4. Глущенко А. Г., Глущенко Е.П., Казанский Н.Л., Топоркова Л.В. Стоячие волны в невзаимных гиротропных средах.- Компьютерная оптика.- 2013.- Т 37.- №4.- С. 415.