

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО СВЯЗИ  
Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования  
«ПОВОЛЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ТЕЛЕКОММУНИКАЦИЙ И ИНФОРМАТИКИ»

Кафедра физики

М.В. Головкина

**НАНОФОТОНИКА И ФИЗИКА  
НАНОСТРУКТУР**

Сборник задач

Самара - 2017

ББК 22.37  
Г24  
УДК 539.21

Рекомендовано к изданию методическим советом ПГУТИ, протокол № 43 от 10.03.2017 г.

**Головкина, М.В. Нанопотоника и физика наноструктур: сборник задач / М.В. Головкина. –Самара: ПГУТИ, 2017. -34 с.**

Сборник задач рассчитан на магистрантов первого года обучения направления 12.04.03 "Фотоника и оптоинформатика" и разработан в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования по направлению подготовки 12.04.03 Фотоника и оптоинформатика (уровень магистратуры) от 30.11.2014.

Для магистрантов, аспирантов, изучающих вопросы оптической связи, а также для инженерно-технических работников.

© Головкина М.В., 2017

## Содержание

Введение.....	4
Тема 1. Одномерные фотонные кристаллы .....	5
Тема 2. Одномерные фотонные кристаллы со слоями полупроводников и ферромагнетиков.....	14
Тема 3. Расчет запрещенных зон одномерного фотонного кристалла.....	15
Тема 4. Соотношения Крамерса-Кронига .....	19
Тема 5. Наноплазмоника.....	20
Тема 6. Теория эффективной среды. ....	23
Тема 7. Квазичастицы .....	18
Тема 8. Теория Друде. Плазмоны .....	18
Список литературы .....	22
Глоссарий.....	23

## **Введение**

Сборник задач по дисциплине «Нанофотоника и физика наноструктур», рассчитан на магистрантов, обучающихся в рамках магистерской программы по направлению «Фотоника и оптоинформатика». Задачи и упражнения по данной дисциплине помогают более полно усвоить теоретический материал, посвященный электродинамическим и спектральным свойствам наночастиц, фотонных кристаллов, нанокомпозитных сред.

Сборник задач рассчитан на читателя, владеющего математическим анализом, квантовой механикой и физикой твердого тела в объеме, изучаемом в технических университетах, а также знаниями оптической физики и основ оптоинформатики. В свою очередь, знания, полученные в рамках данного курса, используются при изучении курсов по нанооптике, фемтосекундной оптике и фемтотехнологиям, оптическим материалам фотоники и оптоинформатики.

## Тема 1. Одномерные фотонные кристаллы

Рассматриваемые вопросы. Фотонные кристаллы. Среда с периодической модуляцией диэлектрической и магнитной проницаемостей. Дисперсионная диаграмма.

### Краткая теория к теме 1

#### 1.1. Основные уравнения

Распространение электромагнитных волн описывается уравнениями Максвелла

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, \\ \operatorname{div} \mathbf{D} &= 0, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  - векторы напряженностей электрического и магнитного полей,  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{B}$  - векторы электрической и магнитной индукции,  $\mathbf{j}$  - плотность тока. Связь между напряженностями полей и индукцией устанавливается с помощью материальных уравнений, описывающих среду:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \|\varepsilon\| \varepsilon_0 \mathbf{E}, \\ \mathbf{B} &= \|\mu\| \mu_0 \mathbf{H} \end{aligned} \quad (1.2)$$

где  $\|\varepsilon\|$  и  $\|\mu\|$  - тензоры диэлектрической и магнитной проницаемости среды. Используя матричный метод описания слоистых сред, изложенный в п. 1.1.1, получим дисперсионное уравнение, описывающее свойства периодических систем, состоящих из слоев диэлектрика и сверхпроводника второго рода.

## 1.2. Волны в неоднородной среде. Классификация волн

Будем рассматривать волны, распространяющиеся в неоднородной среде, например волны, распространяющиеся вдоль идеально проводящей плоскости или волны вдоль границы раздела двух диэлектриков. Выберем направление оси  $Oz$  вдоль границы раздела и будем рассматривать распространение неоднородных волн вдоль оси  $Oz$ . Неоднородные волны в отличие от однородных волн имеют не только поперечные, но и продольные компоненты векторов напряженностей электрического и магнитного поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ . Мы будем различать следующие типы волн:

1. **H - волна.** Имеет продольную магнитную компоненту  $H_z$ .  
(Другое название: TE - волна или поперечная электрическая волна, то есть волна, у которой отсутствует продольная компонента вектора  $\mathbf{E}$ .)
2. **E - волна.** Имеет продольную электрическую компоненту  $E_z$ .  
(Другое название: TM - волна или поперечная магнитная волна, то есть волна, у которой отсутствует продольная компонента вектора  $\mathbf{H}$ .)
3. **Гибридная волна.** Представляет собой линейную комбинацию H-волны и E - волны. В зависимости от того, какая продольная компонента преобладает, обозначается как HE- волна или EH- волна.

Следует добавить, что в рамках данной классификации волна, распространяющаяся в однородном пространстве и не имеющая продольных компонент электрического и магнитного поля, называется **поперечной волной** или TEM - волной.

Можно показать, что при распространении неоднородных волн вдоль границы раздела различных сред система уравнений Максвелла (1.1 - 1.2) разделяется на две независимые системы из трех уравнений. Каждая из которых содержит компоненты только H-волны или E-волны. Поэтому мы будем рассматривать отдельно распространение H- и E-волн, то есть волн перпендикулярной и параллельной поляризации. Также будем использовать **принцип перестановочной двойственности уравнений Макс-**

**велла.** Он заключается в следующем: если рассматривать уравнения Максвелла в комплексной форме при отсутствии сторонних токов, то замена

$$\varepsilon\varepsilon_0 \rightarrow \mu\mu_0, \mu\mu_0 \rightarrow \varepsilon\varepsilon_0, \mathbf{E} \rightarrow -\mathbf{H}, \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{E} \quad (1.3)$$

сохраняет эту систему уравнений, причем первое уравнение переходит во второе, а второе - в первое. В результате использования этого принципа можно находить коэффициенты отражения и прохождения для магнитных полей, зная соответствующие коэффициенты для электрических полей, а также можно находить выражения для E-волны, зная выражения для H-волны, наоборот.

### 1.3. Одномерные фотонные кристаллы

Фотонными кристаллами принято называть среды, у которых диэлектрическая проницаемость периодически меняется в пространстве, приводя к брэгговской дифракции света. В фотонных кристаллах, благодаря периодическому изменению диэлектрической проницаемости, возникают разрешенные и запрещенные зоны для энергий фотонов, аналогичные разрешенным и запрещенным зонам для энергий носителей заряда в кристаллических металлах, полупроводниках и диэлектриках. Это значит, что если на фотонный кристалл падает фотон, обладающий энергией, соответствующей запрещенной зоне данного фотонного кристалла, то он не может распространяться в фотонном кристалле и отражается обратно. И наоборот, если на фотонный кристалл падает фотон с энергией, которая соответствует разрешенной зоне данного фотонного кристалла, то он может распространяться в фотонном кристалле. Таким образом, фотонный кристалл выполняет функцию оптического фильтра. (Федоров)

Фотонные кристаллы можно разделить на три основных класса. Одномерные фотонные кристаллы ... это такие материалы, в которых диэлектрическая проницаемость периодически изменяется в одном направлении. Такие фотонные кристаллы состоят из параллельных друг другу слоев различных материалов с разными диэлектрическими проницаемостями и проявляют

свои свойства в направлении, перпендикулярном слоям. Двухмерные фотонные кристаллы - это материалы, в которых диэлектрическая проницаемость периодически изменяется в двух направлениях. Эти изменения образуют двумерную кристаллическую решётку. Наконец, трехмерные фотонные кристаллы - это материалы, в которых диэлектрическая проницаемость периодически изменяется в трех направлениях. Их можно представить как массив объемных областей, упорядоченных в трехмерной кристаллической решётке. (Федоров)

**Фотонный кристалл** — это материал, структура которого характеризуется периодическим изменением показателя преломления в пространственных направлениях.

Расширенное определение фотонных кристаллов — «фотонными кристаллами принято называть среды, у которых диэлектрическая проницаемость периодически меняется в пространстве с периодом, допускающим брэгговскую дифракцию света».

Фотонные кристаллы по характеру изменения коэффициента преломления можно разделить на три основных класса:

1. одномерные, в которых коэффициент преломления периодически изменяется в одном пространственном направлении
2. двухмерные, в которых коэффициент преломления периодически изменяется в двух пространственных направлениях
3. трёхмерные, в которых коэффициент преломления периодически изменяется в трёх пространственных направлениях. Такие фотонные кристаллы могут проявлять свои свойства в трёх пространственных направлениях, и можно их представить как массив объёмных областей (сфер, кубов и т. д.), упорядоченных в трёхмерной кристаллической решётке.

Наиболее простой и распространенный способ получения одномерных периодических структур ... это вакуумное послойное напыление поликристаллических диэлектрических или полупроводниковых пленок. Этот метод получил большое распространение в связи с использованием периодических структур при производстве лазерных зеркал и интерференционных фильтров. В таких структурах при использовании материалов с пока-



зателями преломления, различающимися примерно в 2 раза (например, ZnSe и Na<sub>3</sub>AlF<sub>6</sub>) возможно создание полос отражения (так называемых фотонных запрещенных зон) шириной до 300 нм, перекрывающих практически всю видимую область спектра.

#### 1.4. Методы матрицы преобразования для слоисто-периодических структур

Рассмотрим бесконечную среду, представляющую собой двухслойную структуру, периодически повторяющуюся в пространстве (рис. 1.1.1).

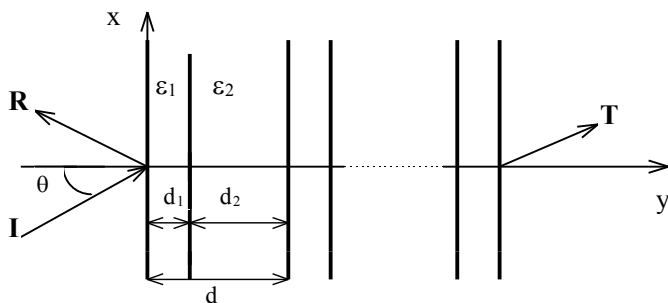


Рис. 1.1. Бесконечная многослойная структура, состоящая из различных слоев толщины  $d_1$  и  $d_2$ .  $I$  представляет собой падающую волну,  $R$ - отраженную и  $T$ - прошедшую через систему волну.

Распространение волн в каждом из слоев можно описать с помощью волнового уравнения

$$\Delta E - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0, \quad (1.4)$$

где  $E$ - компонента поля волны,  $v$ - её фазовая скорость в среде. Будем предполагать, что в плоскости слоев поля зависят только от одной координаты, и положим  $\frac{\partial}{\partial z}=0$ . Решение урав-

нения представим в виде  $E \rightarrow E(y)\exp[i(\omega t - k_x x)]$ , где  $k_x$  - проекция волнового вектора на ось  $x$ . Подставляя его в (1), получим

$$\frac{\partial^2 E(y)}{\partial y^2} - (k_x^2 - \frac{\omega^2}{v_{1,2}^2})E(y) = 0. \quad (1.5)$$

Индексы 1 и 2 обозначают принадлежность к разным слоям.

Множитель  $k_x^2 - \frac{\omega^2}{v_{1,2}^2}$  является периодической функцией ко-

ординаты  $y$  и принимает на периоде структуры два значения. Таким образом, соотношение (1.5) является уравнением второго порядка с периодическим коэффициентом (уравнением Хилла). Для ступенчатой функции его решение может быть получено следующим образом. Представим поле на интервале  $y = 0 \div d_1$  в виде

$$E_1(y) = A_1 e^{ik_{y1}y} + A_2 e^{-ik_{y1}y},$$

$$k_{y1}^2 = (\frac{\omega}{v_1})^2 - k_x^2. \quad (1.6)$$

В области второго слоя  $y = d_1 \div d_1 + d_2$

$$E_2(y) = B_1 e^{ik_{y2}y} + B_2 e^{-ik_{y2}y},$$

$$k_{y2}^2 = (\frac{\omega}{v_2})^2 - k_x^2. \quad (1.7)$$

Представим поля в начале координат через их значения в произвольной точке  $y$  слоя и запишем результат в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} E(0) \\ H(0) \end{pmatrix} = m_1(y) \begin{pmatrix} E(y) \\ H(y) \end{pmatrix}. \quad (1.1.6)$$

Матрица преобразования  $m_1(d_1)$  связывает поля в начале слоя с полями в конце этого же слоя, матрица преобразования второго слоя  $m_2(d_2)$ . На плоскости раздела должны выполняться граничные условия, состоящие в непрерывности как самого поля, так и его градиента. Так на границе  $y = d_1$  :

$$E_1(y)=E_2(y); H_1(y)=H_2(y) \quad . \quad (1.8)$$

Кроме того, решение должно удовлетворять теореме Флоке [54], то есть поля на границах периода при  $y = 0$  и  $y = d$  могут отличаться только на фазовый множитель

$$H(0)=H(d)e^{i\bar{k}d} \quad , \quad (1.9)$$

где  $\bar{k}$  - блоховское волновое число. Поэтому

$$\begin{pmatrix} E_1(0) \\ H_1(0) \end{pmatrix} = m_1 \begin{pmatrix} E_1(d_1) \\ H_1(d_1) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} E_2(d_1) \\ H_2(d_1) \end{pmatrix} = m_2 \begin{pmatrix} E_2(d_1+d_2) \\ H_2(d_1+d_2) \end{pmatrix}, \quad (1.10)$$

$$\begin{pmatrix} E(0) \\ H(0) \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} E(d) \\ H(d) \end{pmatrix}, \quad m = m_1 \cdot m_2,$$

Здесь  $m$  - матрица преобразования одного периода структуры:

$$m = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}. \quad (1.11)$$

С помощью матрицы преобразования  $m$  может быть найдено дисперсионное соотношение для безграничной структуры. Оно имеет вид :

$$\cos \bar{k}d = \frac{1}{2}(m_{11} + m_{22}) \quad . \quad (1.12)$$

Таким образом, в слоисто - периодической среде зависимость от поперечной координаты определяется не волновыми числами слоев  $k_{y1}$  и  $k_{y2}$ , а усредненным по периоду структуры поперечным волновым числом  $\bar{k}$ . Полное решение волнового уравнения записывается в виде суммы пространственных гармоник :

$$E(y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_n \exp[i(\bar{k} + \frac{2\pi n}{d})y] . \quad (1.13)$$

Значение блоховского волнового числа  $\bar{k}$  определяется из соотношения (1.13) с точностью до целого числа обратных волновых векторов  $\frac{2\pi n}{d}, n=0, \pm 1, \dots$ . Необходимо отметить, что фазовые скорости различных гармоник могут быть сколь угодно малы, а при равенстве фазовой скорости и скорости движения магнитных вихрей в сверхпроводнике возможно эффективное взаимодействие электромагнитной волны с вихревой решеткой. Это особенно существенно для создания усилителей на основе сверхпроводящих структур.

. Матрица преобразования  $m_d$ , связывающая поля в начале и в конце слоя диэлектрика, записывается следующим образом:

$$m_d = \begin{pmatrix} \cos k_y d_1 & -\frac{i\omega\mu_0}{k_y} \sin k_y d_1 \\ -\frac{ik_y}{\omega\mu_0} \sin k_y d_1 & \cos k_y d_1 \end{pmatrix}, \quad (1.14)$$

$k_y$  - проекция волнового вектора проходящей волны на ось Oy.

Для бесконечной среды, состоящей из двух чередующихся слоев, запишем матрицу преобразования одного периода структуры для TE – волны (H-волна) :

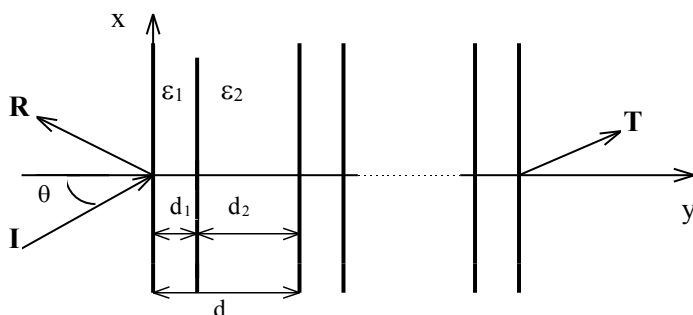
$$\begin{pmatrix} E_z(0) \\ H_x(0) \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} E_z(d) \\ H_x(d) \end{pmatrix}, \quad (1.15)$$

где  $m = m_1 \cdot m_2$ ,  $d = d_1 + d_2$ ;

Если слой является полупроводником, то матрица преобразования будет иметь (1.14). Необходимо учитывать частотную дисперсию диэлектрической проницаемости.

## Тема 1. Задачи для самостоятельного решения

**1.1.** Получить матрицу перехода для одномерного фотонного кристалла, состоящего из чередующихся тонких слоев диэлектриков с параметрами: толщина первого слоя  $d_1$ , диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon_1$ , магнитная проницаемость  $\mu_1=1$ , толщина второго слоя  $d_2$ , диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon_2$ , магнитная проницаемость  $\mu_2=1$ .



**1.2.** Получить дисперсионное соотношение перехода для одномерного фотонного кристалла из задачи 1.1.

**1.3.** Построить картину разрешенных и запрещенных зон для перехода для одномерного кристалла из задачи 1.1.

**1.4.** Получить матрицу перехода для одномерного фотонного кристалла, состоящего из чередующихся тонких слоев диэлектрика и феррита с параметрами: толщина слоя диэлектрика  $d_1$ , диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon_1$ , магнитная проницаемость  $\mu_1=1$ , толщина слоя феррита  $d_2$ , диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon_2$ , магнитная проницаемость  $\mu_2$ .

Примечание: Учесть зависимость  $\mu_2$  от частоты. Рассмотреть Н- или Е-волну .

**1.5.** Получить дисперсионное соотношение для одномерного фотонного кристалла из задачи 1.4.

**1.6.** Построить картину разрешенных и запрещенных зон для одномерного кристалла из задачи 1.4.

**1.7.** Получить матрицу перехода для одномерного фотонного кристалла, состоящего из чередующихся тонких слоев диэлектрика и полупроводника с параметрами: толщина слоя диэлектрика  $d_1$ , диэлектрическая проницаемость  $\epsilon_1$ , магнитная проницаемость  $\mu_1=1$ , толщина слоя полупроводника  $d_2$ , диэлектрическая проницаемость  $\epsilon_2$ , магнитная проницаемость  $\mu_2=1$ .

Примечание: Учесть зависимость  $\epsilon_2$  от частоты. Рассмотреть Н- или Е-волну .

**1.5.** Получить дисперсионное соотношение для одномерного фотонного кристалла из задачи 1.7.

**1.6.** Построить картину разрешенных и запрещенных зон одномерного кристалла из задачи 1.7.

## **Тема 2. Одномерные фотонные кристаллы со слоями полупроводников и ферромагнетиков**

**2.1.** Рассмотреть слой полупроводника. Учесть диэлектрическую проницаемость полупроводника в тензорном виде. Показать, что уравнения Максвелла распадаются на 2 независимые системы уравнений для Е-волны и Н-волны.

**2.2.** Выписать матрицу перехода для слоя полупроводника.

**2.3.** Рассмотреть слой феррита. Учесть магнитную проницаемость полупроводника в тензорном виде. Показать, что уравнения Максвелла распадаются на 2 независимые системы уравнений для Е-волны и Н-волны.

**2.4.** Выписать матрицу перехода для слоя феррита.

**2.5.** Получить матрицу перехода для одномерного фотонного кристалла, состоящего из чередующихся тонких слоев диэлектрика и полупроводника с параметрами: толщина слоя диэлектрика  $d_1$ , диэлектрическая проницаемость  $\epsilon_1$ , магнитная проницаемость  $\mu_1=1$ , толщина слоя полупроводника  $d_2$ , диэлектриче-

ская проницаемость  $\varepsilon_2$ , магнитная проницаемость  $\mu_2=1$ . Отдельно рассмотреть случай E и H волн.

**2.6.** Получить дисперсионное соотношение для одномерного фотонного кристалла из предыдущей задачи.

### **Тема 3. Расчет запрещенных зон одномерного фотонного кристалла**

#### **3.1.**

Графическое определение запрещенных зон для одномерного фотонного кристалла.

Рассмотреть одномерный фотонный кристалл, состоящий из чередующихся тонких слоев диэлектриков с параметрами: толщина первого слоя  $d_1$ , диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon_1$ , магнитная проницаемость  $\mu_1=1$ , толщина второго слоя  $d_2$ , диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon_2$ , магнитная проницаемость  $\mu_2=1$ . Выписать дисперсионное соотношение для рассматриваемого кристалла. (В каждом случае Вы получаете самостоятельно необходимое дисперсионное соотношение).

Пример дисперсионного соотношения

$$\cos Kd = \cos k_{z1}d_1 \cos k_{z2}d_2 + \frac{1}{2} \left( \frac{k_{z1}|\varepsilon_2|}{k_{z2}\varepsilon_1} + \frac{k_{z2}\varepsilon_1}{k_{z1}|\varepsilon_2|} \right) \sin k_{z1}d_1 \sin k_{z2}d_2$$

,

где  $K$  – блоховское волновое число.

а) Определить графически запрещенные зоны. Для этого построить график функции  $F(\omega, k_y) = \cos Kd$  для произвольно заданной частоты. Значения  $k_y$ , при которых  $|\cos Kd| > 1$ , соответствуют запрещенной зоне, в которой волны не распространяются.

Пример графического определения запрещенных зон см. на рис.3.1.

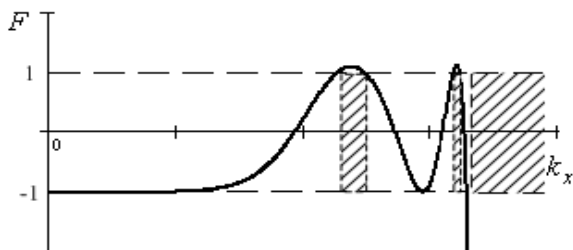


Рис. 3.1. Графическое определение запрещенных зон для одномерного фотонного кристалла. Заштрихованы запрещенные зоны.

Начальные параметры:  $\epsilon_1=2$ ,  $\epsilon_2=1$ ,  $d_1=100$  нм,  $d_2=100$  нм,  $\omega=1 \cdot 10^{16}$  рад/с.

б) Построить картину запрещенных зон для другого значения частоты. Сделать вывод.

в) Увеличить  $\epsilon_1$  в 5 раз. Построить картину запрещенных зон. Сделать вывод.

г) Увеличить толщину слоя  $d_1$  в 2 раза. Построить картину запрещенных зон. Сделать вывод.

В отчете должны присутствовать следующие элементы:

1. Титульный лист
2. Схематический рис. Одномерного фотонного кристалла.
3. Дисперсионное соотношение для рассматриваемой волны.
4. Картины запрещенных зон для случаев а), б), в), г).



### 3.2

Построение дисперсионных характеристик для одномерного фотонного кристалла.

Рассмотреть одномерный фотонный кристалл, состоящий из чередующихся тонких слоев диэлектриков с параметрами: толщина первого слоя  $d_1$ , диэлектрическая проницаемость  $\epsilon_1$ , магнитная проницаемость  $\mu_1=1$ , толщина второго слоя  $d_2$ , диэлектрическая проницаемость  $\epsilon_2$ , магнитная проницаемость  $\mu_2=1$ . Построить дисперсионную кривую для первой зоны Бриллюэна. Параметры выбрать по заданию преподавателя.

В отчете по заданию 3.2 должны присутствовать следующие элементы:

1. Дисперсионные характеристики с указанием всех параметров структуры.

### 3.3.

Построить диаграмму запрещенных зон для одномерного фотонного кристалла, состоящего из чередующихся тонких слоев диэлектриков с параметрами: толщина первого слоя  $d_1$ , диэлектрическая проницаемость  $\epsilon_1$ , магнитная проницаемость  $\mu_1=1$ , толщина второго слоя  $d_2$ , диэлектрическая проницаемость  $\epsilon_2$ , магнитная проницаемость  $\mu_2=1$ .

Пример диаграммы запрещенных зон см. на рис. 3.2.

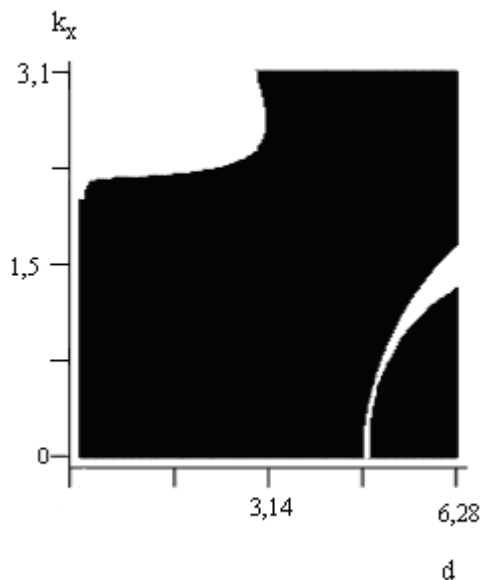


Рис.3.2. Диаграмма запрещенных зон

Методика построения. Использовать дисперсионное соотношение для рассматриваемой структуры. Задать частоту  $\omega$ . Задать шаг по оси абсцисс, задать шаг по оси ординат. Проверить для каждой точки выполнение условия  $|\cos Kd| < 1$ . Если условие выполняется, то это разрешенная зона. Закрашиваем. Если условие не выполняется, то это запрещенная зона. Оставляем белым. Прошагать и закрасить или оставить белым все поле графика.

В отчете по заданию 3.3 должны присутствовать следующие элементы:

1. Диаграммы запрещенных зон для разных параметров по заданию преподавателя.

## Тема 4. Соотношения Крамерса-Кронига

### 4.1

Дана экспериментально измеренная для некоторого вещества мнимая часть диэлектрической проницаемости в зависимости от частоты применяемой волны. Удалось аппроксимировать экспериментальную зависимость функцией вида

$$\varepsilon''(\nu) = 2e^{-4\nu} \sin(30\nu) + 1 ,$$

где частота  $\nu$  выражена в ТГц. Диапазон исследуемых частот  $0,17 \text{ ТГц} \div 0,7 \text{ ТГц}$ .

Используя соотношение Крамерса-Кронига, найти частотную зависимость показателя преломления  $n(\omega)$  и диэлектрической проницаемости  $\varepsilon(\omega)$  для рассматриваемого диапазона.

Оформить решение с необходимыми пояснениями.

#### **Используемые соотношения:**

Соотношение Крамерса-Кронига

$$\varepsilon'(\omega) - 1 = \frac{2}{\pi} P \int_0^{+\infty} \frac{x \varepsilon''(x)}{x^2 - \omega^2} dx.$$

Примечание. Необходимо взять интеграл в смысле главного значения. Для этого вручную разбить интеграл на два (см. лекцию), чтобы обойти особую точку.

Возможный алгоритм.

1. Задать пределы интегрирования (задать начальную и конечную точку) по частоте. Задать количество точек, в которых будет вычисляться функция. Вычислить шаг. (Получится массив значений  $\omega$ )
2. Задать значение функции  $\varepsilon''(\omega)$  в каждой точке через интеграл в смысле главного значения. Получится массив значений функции.
3. Построить график

## Тема 5. Наноплазмоника

### 5.1

Рассчитать частоту поверхностного плазмона, возникающего в золотых наночастицах, находящихся в стеклянной матрице. Определить длину волны, которая соответствует частоте такого поверхностного плазмона.

### 5.2.

«Явление поверхностного плазмонного резонанса круглосуточно могут наблюдать жители и гости нашей столицы, любясь рубиновой окраской звезд Кремля. Немногие знают, что «рубиновое» стекло звезд на самом деле является «золотым» и представляет собой наночастицы золота, растворенные в высококачественном стекле. Так что отчетливо различимый красноватый цвет кремлевских звезд при освещении их изнутри мощными лампами накаливания обусловлен плазмонным резонансом на поверхности наночастиц золота. Максимум поглощения для плазмонного резонанса наночастиц золота находится вблизи 520 нм (зеленый цвет), а прошедший от ламп накаливания свет, после «вычитания» зеленого, имеет красноватую окраску. Таким образом, изменив размер золотых наночастиц, можно было бы поменять цвет Кремлевских звезд (рис. 5.1).»

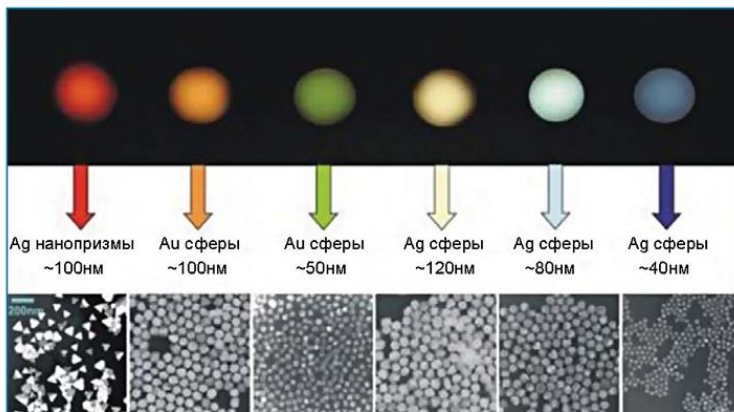


Рис. 2. Влияние природы, размера и формы нанокристаллов золота на их оптические (рэлеевское рассеяние света) свойства. Масштаб на всех снимках одинаков.

**Вопрос:** совпадает ли рассчитанная вами в задаче 5.1 длина волны поверхностного плазмона максимуму поглощения для плазмонного резонанса наночастиц золота (520 нм)?

Почему? Выдвиньте конкретные предположения (не менее двух).

### 5.3

Что произойдет с потерями в металлических наночастицах, если уменьшать их размеры? (увеличатся или уменьшатся? А почему?)

### 5.4.

Рассмотрите на графике зависимость коэффициента отражения от угла падения на золотую наночастицу (облучение велось красным светом от гелий-неонового лазера).

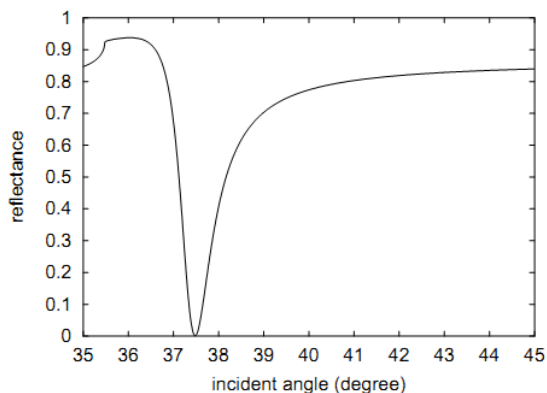


Figure 13: SPR curve for SF10( $n = 1.723$ )|gold(50nm,  $\tilde{n}_1 = 0.1726 + i3.4218$ ) |air( $n = 1.0$ ) for He-Ne laser light (633 nm).

**Вопрос:** чем объясняется возникновение минимума на графике? (Учесть, что частота света не меняется).

### 5.5.

До каких минимальных размеров металлических наночастиц для их описания можно применять теорию Друде? Ответ обоснуйте.

### 5.6.

Вычислить длину свободного пробега электронов в меди (алюминии) при  $T = 300\text{K}$ , если удельное сопротивление меди при этой температуре равно  $0.017 \text{ мкОм}\cdot\text{м}$  (для алюминия  $0.027 \text{ мкОм}\cdot\text{м}$ ).

### 5.7.

Рассчитать толщину скин-слоя для золота и серебра для микроволнового излучения, для оптических частот и для УФ-лучей.

## **Тема 6. Теория эффективной среды.**

### **6.1**

Построить график зависимости эффективной диэлектрической проницаемости композитной среды от объемной фракции включений  $f$ . Включения сферической формы. Материал включений - диэлектрик (диэлектрическая проницаемость включений считается постоянной). Расчет эффективной диэлектрической проницаемости провести по формуле Максвелла Гарнетта. Построить на одном рисунке графики для разных значений диэлектрической проницаемости включений.

- а) расчет без учета потерь в среде,
- б) расчет с учетом потерь.

### **6.2.**

Построить график зависимости эффективной диэлектрической проницаемости композитной среды от объемной фракции включений  $f$ . Включения – иглы с произвольной ориентацией. Материал включений - диэлектрик (диэлектрическая проницаемость включений считается постоянной). Расчет эффективной диэлектрической проницаемости провести по формуле Максвелла Гарнетта. Построить на одном рисунке графики для разных значений диэлектрической проницаемости включений.

- а) расчет без учета потерь в среде,
- б) расчет с учетом потерь.

### **6.3**

Провести сравнение расчетных формул Максвелла Гарнетта и Бруггемана. Построить график зависимости эффективной диэлектрической проницаемости композитной среды от объемной фракции включений  $f$ . Построить на одном рисунке графики эффективной диэлектрической проницаемости, рассчитанной по формулам Максвелла Гарнетта и Бруггемана.

- а) расчет для включений сферической формы,
- б) расчет для включений в виде игл с произвольной ориентацией.

#### 6.4

Рассмотреть двухфазную композитную среду. Включения сферической формы. Материал включений - металл (диэлектрическая проницаемость описывается теорией Друде). Расчет эффективной диэлектрической проницаемости провести по формуле Максвелла Гарнетта. Построить на одном рисунке графики для разных значений диэлектрической проницаемости включений.

а) Построить график зависимости эффективной диэлектрической проницаемости композитной среды от объемной фракции включений  $f$  для фиксированной частоты.

б) Построить график зависимости эффективной диэлектрической проницаемости композитной среды от частоты.



## Список литературы

1. Головкина, М.В. Физические основы нанотехнологий, фотоники и оптоинформатики: сборник задач / М.В. Головкина. –Самара: ПГУТИ, 2017. -140 с.
2. Басс Ф.Г., Булгаков А.А., Тетервов А.П. Высокочастотные свойства полупроводников со сверхрешетками. М.: Наука. 1989. 288 с.
3. Барыбин А. А. Электродинамика волноведущих структур. М.: Физматлит. 2007. 512 с.
4. Белов П. А., Беспалов В. Г., Васильев В. Н., Козлов С. А., Павлов А. В., Симовский К. Р., Шполянский Ю. А. Оптические процессоры: достижения и новые идеи. В кн.: Проблемы когерентной и нелинейной оптики. СПб. 2006. С. 6 - 36.
5. Борздов В.М., Жевняк О.Г., Комаров Ф.Ф., Галенчик В.О. Моделирование методом Монте-Карло приборных структур интегральной электроники. Минск: БГУ. 2007. 17 с.
6. Кардона М. Основы физики полупроводников. М.: Физматлит. 2002. 560 с.
7. Карпов С.В. Фононы в нанокристаллах. СПб.: Из-во СПбГУ. 2011. 48 С.
8. Майер С. А. Плазмоника: Теория и приложения. М.-Ижевск: РХД. 2011. 296 с.

## Глоссарий

**Блоховская волна** - волновая функция частицы (обычно электрона), находящейся в периодическом потенциале. Названа в честь Феликса Блоха. Блоховская волна состоит из произведения плоской волны  $e^{i \mathbf{k} \mathbf{r}}$  на некоторую периодическую функцию (блоховская функция)  $u_k(\mathbf{r})$ , имеющую ту же периодичность, что и потенциал:

$$\psi_k(\mathbf{r}) = e^{i \mathbf{k} \mathbf{r}} \cdot u_k(\mathbf{r}).$$

**Гетероструктура** - выращенная на подложке слоистая структура из различных полупроводников, в общем случае отличающихся шириной запрещённой зоны. Между двумя различными материалами формируется *гетеропереход*, на котором возможно формирование вырожденного двумерного электронного газа.

**Гетеропереход** - контакт двух различных по химическому составу полупроводников. На границе гетероперехода происходит изменение свойств полупроводникового материала: структуры энергетических зон, ширины запрещённой зоны, эффективных масс носителей заряда, их подвижности и т. д. Для получения идеальных монокристаллических гетеропереходов (без дефектов решётки и поверхностных состояний на границе раздела) необходимо, чтобы у полупроводников совпадали типы кристаллических решёток, их периоды (изопериодичность) и коэффициенты термического расширения.

**Дисперсионное уравнение** - соотношение, связывающее циклическую частоту  $\omega$  и волновые векторы  $\mathbf{k}$  собственных гармонических волн в линейных однородных системах: непрерывных средах, волноводах, передающих линиях и др.

**Квазичастица** - понятие в квантовой механике, введение которого позволяет существенно упростить описание сложных квантовых систем со взаимодействием, таких как твердые тела и

квантовые жидкости. *Квазичастица* - квант коллективного колебания или возмущения многочастичной системы, обладающий определённой энергией и, как правило, импульсом. К квазичастицам относятся электроны в кристалле, дырки, фононы, экситоны, плазмоны, поляритоны.

**Квантовая нить** - структура в которой движение носителей ограничено по двум направлениям. Квантовая нить может быть выполнена из металла или полупроводника в виде нити или длинного стержня, поперечные размеры которого настолько малы, чтобы квантовые эффекты были существенными (поперечные размеры должны быть сравнимы с длиной волны де-Бройля для электронов (дырок)).

**Квантовая точка** (англ. quantum dot)- частица материала с малыми размерами (обычно 1–10 нм), в которой движение электрона ограничено во всех трех измерениях. Квантовой точкой может служить любой достаточно маленький кусочек металла или полупроводника. Размер квантовой точки должен быть настолько мал, чтобы квантовые эффекты были существенными.

**Квантовая яма** — это одномерная потенциальная яма, которая ограничивает подвижность частиц в одном измерении. Квантовой ямой может служить тонкий слой материала. Толщина квантовой ямы должна быть настолько мала, чтобы квантовые эффекты были существенными. Проявление квантовых эффектов становится существенным, если толщина квантовой ямы сравнима с длиной волны де-Бройля электронов (дырок).

**Квантовый конфайнмент** – ограничение элементарных возбуждений в квантово-размерных структурах (квантовых ямах, квантовых нитях, квантовых точках).

**Литография** - технология переноса рисунка с шаблона на конкретную поверхность (полимерную пластину, полупроводниковую подложку и т.д.) с помощью светового излучения (фотоли-

тография), рентгеновского излучения (рентгенолитография), потока электронов/ионов (электронно-лучевая/ионно-лучевая литография), а также непосредственно методами сканирующей зондовой микроскопии, атомной силовой микроскопии или контактной печати.

**Метаматериал** - искусственный композитный структурированный материал, электромагнитные свойства которого существенно отличаются от свойств компонентов, входящих в его состав, и определяются особым упорядочением и структурой компонентов (кольцеподобной, рулонной, проводной и т. д.).

**Метод осаждения металлоорганических соединений из газообразной фазы MOCVD (Metalorganic Chemical Vapour Deposition)** – эпитаксиальный рост материалов путем осаждения на подложку продуктов термического разложения (пиролиз) молекул органических газов, содержащих необходимые химические элементы.

**Молекулярно-лучевая эпитаксия** - эпитаксиальный рост в условиях сверхвысокого вакуума - наращивание на подложке монокристаллических слоев полупроводниковых веществ, заключающееся в осаждении испаренных компонентов на нагреваемую монокристаллическую подложку с одновременным взаимодействием между ними. Позволяет выращивать гетероструктуры заданной толщины с моноатомно гладкими гетерограницами и с заданным профилем легирования.

**Наноструктура** - совокупность наноразмерных объектов искусственного или естественного происхождения, свойства которой определяются не только размером структурных элементов, но и их взаимным расположением в пространстве.

**Нанотрубка, углеродная** - полая цилиндрическая структура диаметром от десятых до нескольких десятков нм и длиной от

одного до нескольких сотен микрометров и более, образованная атомами углерода и представляющая собой свернутую в цилиндр графеновую плоскость. Нанотрубки обладают уникальными электрическими, магнитными, оптическими и механическими свойствами. В частности, УНТ на порядок прочнее стали. На основе нанотрубок создаются диоды и полевые транзисторы, сверхпрочные и сверхлегкие композиционные материалы. Нанотрубки используются в качестве игл в сканирующей туннельной и атомно-силовой микроскопии, а также для создания полупроводниковых гетероструктур.

**Наночастица** - один из наиболее общих терминов для обозначения изолированных ультрадисперсных объектов, во многом дублирующий ранее известные термины (коллоидные частицы), но отличающийся от них чётко определёнными размерными границами. Размеры наночастицы составляют от 1 до 100 нм. Твёрдые наночастицы размером менее 1 нм обычно относят к кластерам, более 100 нм — к субмикронным частицам.

**Плазменная частота** - частота собственных продольных колебаний пространственного заряда в однородной плазме (в электронном газе) в отсутствие магнитного поля. Плазменная частота электронного газа в пренебрежении движением ионов равна

$$\omega_p = \sqrt{\frac{n e^2}{\epsilon_0 m^*}}.$$

Здесь  $n$  - концентрация электронов,  $e$  - заряд,  $m^*$  - эффективная масса электронов. Выражение записано в системе СИ.

**Плазмон** - квазичастица, квант плазменных колебаний, которые представляют собой коллективные колебания свободного электронного газа. Плазмоны играют большую роль в оптических свойствах металлов. В большинстве металлов плазменная частота находится в ультрафиолетовой области спектра, делая их блестящими в видимом диапазоне. В легированных полупроводни-

ках плазменная частота находится обычно в ультрафиолетовой области.

**Плазмонный резонанс** - возбуждение поверхностного плазмона внешней электромагнитной волной при совпадении частоты волны с резонансной частотой для поверхностного плазмона. Резонансная частота поверхностного плазмона зависит как от свойств

**Поляритон** - квазичастица, возникающая при взаимодействии фотонов и элементарных возбуждений среды. Взаимодействие электромагнитных волн с возбуждениями среды, приводящее к их связи, становится особенно сильным, когда одновременно их частоты и волновые векторы  $k$  совпадают (резонанс). В этой области образуются связанные волны, то есть поляритоны.

Поляритоны, образующиеся в результате взаимодействия фотонов с различными возбуждениями среды — оптическими фононами, экситонами, плазмонами и так далее, называют фоннными поляритонами, экситонными поляритонами, плазмон-поляритонами.

**Поверхностный плазмон** – квант плазменных колебаний электронной подсистемы. Возникает на границе раздела двух сред в том случае, когда диэлектрическая проницаемость одной из сред меняет свой знак ( например, на границе раздела металла и воздуха).

В случае взаимодействия поверхностного плазмона и фотона образуется составная квазичастица – поверхностный поляритон или плазмон-поляритон.

**Фонон** – квазичастица, представляющая собой квант колебательного движения атомов кристалла. Введен советским учёным Игорем Таммом.

**Фотонная запрещенная зона** (полная фотонная запрещенная зона). Из-за того, что показатель преломления периодически изменяется, в фотонном кристалле возникают разрешённые и за-

прещённые зоны для энергий фотонов (аналогично запрещенным и разрешенным зонам для полупроводников). Существование излучения с энергией фотонов, принадлежащей ФЗЗ в таких кристаллах, невозможно. В частности, излучение, спектр которого принадлежит ФЗЗ, извне в ФК не проникает, существовать в нем не может и полностью отражается от границы.

**Фотонный кристалл** - это материал, в котором показатель преломления периодически изменяется в одном, двух или трех пространственных направлениях. Соответственно различают одномерные, двумерные и трехмерные фотонные кристаллы.

Фотонные кристаллы демонстрируют наличие *фотонной запрещенной зоны*.

**Фотонно-кристаллическое волокно** - это оптическое волокно, оболочка которого имеет структуру двумерного фотонного кристалла. По физическому механизму удержания света в сердцевине волокна ФКВ можно разделить на два класса.

Первый класс образуют ФКВ, локализация света в сердцевине которых происходит благодаря зеркальному отражению от оболочки, обладающей фотонными запрещенными зонами (ФЗЗ). Особенно важно, что сердцевина ФКВ с ФЗЗ может быть полой, что позволяет на несколько порядков увеличить мощность вводимого в них излучения, уменьшить потери и нелинейные эффекты.

Механизм удержания света в ФКВ второго класса вполне традиционен для оптического волокна — полное внутреннее отражение. Однако в них используется новый принцип управления показателем преломления оболочки, основанный на его зависимости от структуры оболочки. Возможность управления показателем преломления оболочки позволяет создавать так называемые неограниченно одномодовые волокна. В них на любой длине волны распространяется только одна мода. Еще одна особенность ФКВ — существование одномодового режима в волокнах с большим диаметром сердцевины.

**Фоторезист** - свето- или рентгеночувствительный материал на полимерной основе, используемый для нанесения пленочного покрытия на подложку в литографическом процессе путем его облучения (экспонирования) через маску с проекциями элементов электронной схемы и последующего проявления (травления в растворителе) так, что изображение схемы переносится на подложку.

**Экситон** - квазичастица, состоящая из электрона и дырки. Экситон представляет собой электронное возбуждение в диэлектрике или полупроводнике, мигрирующее по кристаллу и не связанное с переносом электрического заряда и массы. Экситон можно считать элементарной квазичастицей в тех явлениях, в которых он выступает как целое образование, не подвергающееся воздействиям, способным его разрушить.

**Эпитаксия** - это ориентированный рост одного кристалла на поверхности другого (подложки). Различают гетероэпитаксию, когда вещества подложки и нарастающего кристалла различны (процесс возможен только для химически не взаимодействующих веществ, например так изготавливают интегральные преобразователи со структурой кремний на сапфире), и гомоэпитаксию, когда они одинаковы. Эпитаксия особенно легко осуществляется, если различие постоянных решёток не превышает 10 %.

**Эффективная масса** - динамическая масса частицы, которая появляется при движении частицы в периодическом потенциале кристалла. Можно показать, что электроны и дырки в кристалле двигаются в электрическом поле кристалла так, как если бы они свободно двигались в вакууме, но с некой эффективной массой. Эффективная масса находится по формуле,

$$m^* = \hbar^2 \cdot \left[ \frac{d^2 \varepsilon}{dk^2} \right]^{-1}$$



где  $\varepsilon$  - энергия частицы,  $k$  – волновое число. Эффективную массу часто выражают единицах массы покоя электрона  $m_e$