

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО СВЯЗИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«ПОВОЛЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ТЕЛЕКОММУНИКАЦИЙ И ИНФОРМАТИКИ»

Кафедра теоретических основ радиотехники и связи

О.В. Горячкин

Статистическая теория радиотехнических систем

Учебное пособие

Самара 2017

УДК 621.391
ББК 3.32.81
Г20

Рекомендовано к изданию методическим советом ПГУТИ, протокол № 10 ,
от 27.10.2017 г.

Рецензенты:

Заведующий кафедрой систем связи ПГУТИ,
д.т.н., профессор, Васин Н.Н.

Горячкин, О. В.

Г20 **Статистическая теория радиотехнических систем:** учебное
пособие /О.В. Горячкин. – Самара: ПГУТИ, 2017. –92 с.

Учебное пособие «Статистическая теория радиотехнических систем» в форме лекций содержит основы статистической теории радиотехнических систем, разработано в соответствии с ФГОС ВО по направлению подготовки бакалавров 11.03.01-Радиотехника и предназначено для студентов, обучающихся на 4-м курсе для самостоятельной подготовки к практическим и лабораторным занятиям, зачету по курсу. Целью преподавания дисциплины является познакомить студента с теоретическими основами инженерной деятельности в области синтеза радиотехнических систем. При этом главное внимание уделяется методам решения основной задачи решаемой инженером при создании любой современной РТС – извлечению информации из наблюдаемых в шумах и искаженных в процессе передачи сигналов.

ISBN
©, Горячкин О.В., 2017

СОДЕРЖАНИЕ

| | |
|--|----|
| Введение | 5 |
| Лекция №1. | 6 |
| 1. Основные понятия..... | 6 |
| Лекция №2. | 10 |
| 2. Основы теории обнаружения и различения сигналов | 10 |
| 2.1. Теория обнаружения сигналов | 10 |
| Лекция №3. | 18 |
| 2.2. Теория различения сигналов | 18 |
| Лекция №4. | 25 |
| 2.3. Алгоритмы и устройства оптимального обнаружения и различения сигналов | 25 |
| 2.3.1. Обнаружение детерминированного сигнала | 25 |
| Лекция №5. | 32 |
| 2.3.2. Обнаружение сигнала со случайной фазой | 32 |
| Лекция №6. | 39 |
| 3. Основы теории оценивания и фильтрации параметров сигналов | 39 |
| 3.1. Теория оценивания параметров сигналов | 39 |
| 3.1.1. Байесовские оценки случайных параметров | 39 |
| Лекция №7. | 46 |
| 3.1.2. Элементы теории точечного оценивания | 46 |
| 3.2. Оценки параметров сигнала, наблюдаемого на фоне аддитивного белого гауссовского шума | 50 |
| 3.2.1. Оценка амплитуды детерминированного сигнала | 55 |
| Лекция №8. | 57 |
| 3.2.2. Оценки амплитуды и фазы детерминированного сигнала | 57 |
| 3.2.3. Оценка времени запаздывания детерминированного сигнала | 59 |
| 3.2.4. Оценка времени запаздывания сигнала со случайной начальной фазой | 60 |
| 3.2.5. Оценка частотного сдвига сигнала со случайной начальной фазой | 62 |
| 3.2.6. Совместное оценивание временной задержки и частотного сдвига сигнала со случайной начальной фазой | 64 |
| Лекция №9. | 69 |
| 4. Разрешение сигналов. | 69 |
| 4.1. Разрешение сигналов | 69 |
| 4.1.1. Понятие разрешающей способности в РТС | 69 |
| 4.1.2. Разрешение сигналов в координатах время-частота | 70 |
| Лекция №10. | 75 |
| 4.2. Каталог сигналов | 75 |
| 4.2.1. Сигналы с гребневидной функцией неопределенности | 76 |
| Лекция №11. | 82 |

| | |
|---|----|
| 4.2.2. Сигналы с многолепестковой функцией неопределенности | 82 |
| 4.2.3. Сигналы с кнопочной функцией неопределенности | 83 |
| Список литературы | 92 |

ВВЕДЕНИЕ

Для современного специалиста в области создания радиотехнических систем (РТС) различного назначения, в том числе систем радиосвязи, курс статистической теории радиотехнических систем (СТРТС) является ключевым, для освоения специальности.

Задача курса познакомить студента с теоретическими основами инженерной деятельности в области синтеза РТС. При этом главное внимание уделяется методам решения основной задачи решаемой инженером при создании любой современной РТС – извлечению информации из наблюдаемых в шумах и искаженных в процессе передачи сигналов.

Курс содержит описание основных методов СТРТС, в том числе методов обнаружения, различения, разрешения, измерения параметров и фильтрации сигналов.

ЛЕКЦИЯ №1. Основные понятия теории радиотехнических систем. Классификация РТС. Используемые частотные диапазоны. Регламент радиосвязи. Общая модель радиотехнической системы. Представление сигналов в РТС. Интегральные преобразования в РТС.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

В курсе рассматриваются теоретические основы анализа и синтеза радиотехнических систем (РТС) различного назначения. Под **РТС** понимают информационные системы, осуществляющие извлечение, разрушение и передачу информации с помощью радиоволн. Характерным признаком РТС является использование радиосигналов. **Радиосигналом** называется радиоволна, несущая информацию. В свою очередь **радиоволнами** называют электромагнитные колебания, частота которых меньше 3000 ГГц, распространяющиеся в пространстве без искусственного волновода.

Назначение информации – один из признаков классификации РТС. Так к системам передачи информации относят системы радиосвязи, радио- и телевидения, радиоуправления. К системам извлечения информации относятся радиолокационные (РЛС) и радионавигационные системы, системы радиоастрономии, радиоразведки.

Системы разрушения информации это средства радиоэлектронной борьбы (противодействия), основное назначение которых обеспечение невозможности работы радиотехнических систем противника.

По принципу построения иногда разделяют аналоговые и цифровые РТС, по типу используемого сигнала различают непрерывные и импульсные.

РТС различного назначения могут быть описаны в терминах информационных систем и представлены в виде обобщенной структурной схемы, показанной на Рис.1.1.

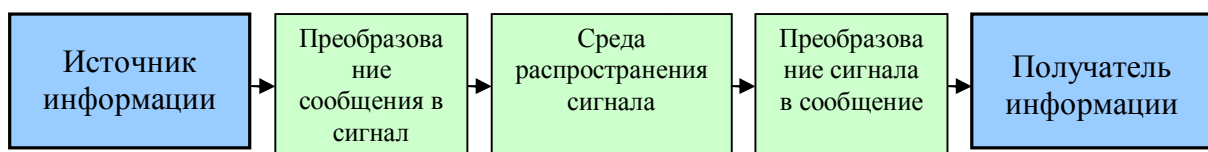


Рис. 1.1. Обобщенная структурная схема РТС.

Для систем передачи информации подобная схема имеет очевидные аналогии с физическими блоками устройства связи. Источник информации в этом случае это человек или компьютер. Процесс преобразования информации в сигнал это процесс модуляции несущего сигнала информационным сообщением и последующее излучение модулированного радиосигнала в пространство. Для систем извлечения информации роль источника выполняет исследуемый объект, параметры

которого, модулируют облучающее его излучение. В обоих случаях модулированный радиосигнал распространяется в открытом пространстве и принимается приемником РТС, задача которого преобразовать (демодулировать или детектировать) принятый сигнал в сообщение.

В теории РТС **канал распространения сигнала** (или просто канал) это не только физическая среда распространения сигнала, но и антенно-фидерное устройство, входные цепи приемника, выходные цепи и антенно-фидерное устройство передатчика. Как правило, канал начинается там, где происходит формирование сигнала и заканчивается в месте, где начинается процесс извлечения информации из сигнала в аналоговом или цифровом устройстве обработки сигнала.

В большинстве случаев основным фактором, ограничивающим тактико-технические характеристики РТС, является наличие в канале искажений сигнала и помех различного происхождения.

Помехой называют любое случайное воздействие на сигнал, которое ухудшает потребительские характеристики РТС. Под **искажением сигнала** подразумевают, как правило, детерминированное, нежелательное изменение формы сигнала в процессе передачи, распространения или приема.

По характеру взаимодействия помех с полезным сигналом различают аддитивные (складывающиеся с информационным сигналом) и мультипликативные (умножающиеся на информационный сигнал) помехи.

По происхождению помехи делятся на естественные и искусственные, внешние (атмосферные, промышленные, межсистемные, преднамеренные, космические) и внутренние (тепловой шум, наводки, шумы дискретизации и квантования).

По виду помехи различают: импульсные, сосредоточенные по частоте и флуктуационные помехи. **Импульсные помехи** это мешающие сигналы, имеющие короткую длительность и, как правило, значительную амплитуду (по сравнению с полезным сигналом). Источниками таких помех обычно являются электрические разряды различного происхождения.

Сосредоточенные по частоте помехи это обычно квазигармонические сигналы других РТС, наводки от других блоков системы и т.п. По форме эти помехи характеризуются большой длительностью и наличием выраженной средней частоты в спектре.

Наиболее разрушительным для РТС действием обладают **флуктуационные помехи**. Особенность этих помех их одновременная протяженность во временной и частотной областях. Основными источниками помех такого типа являются входные цепи радиоприемников (тепловой шум), собственное радиоизлучение космических объектов, постановщики преднамеренных помех.

Наличие искажений и помех разрушает передаваемую в тракте РТС информацию. Поэтому основная проблематика теории РТС это извлечение

переданной информации из искаженного в канале распространения сигнала наилучшим для данной системы образом и соответственно оптимальный выбор несущих сигналов и их параметров.

Способность РТС выполнять свои функции с заданным качеством в условиях искажений и помех называют **помехоустойчивостью** РТС.

В зависимости от назначения РТС основные задачи, решаемые при разработке способа (алгоритма) извлечения информации в РТС это обнаружение, различение, оценка параметров, фильтрация и разрешение искаженных сигналов на фоне помех.

Обнаружение сигнала это принятие решения о наличии или отсутствии, как правило, известного заранее сигнала в принятом колебании в условиях искажений и на фоне помех в канале.

Различение сигналов это принятие решения о наличии в принятом колебании одного из нескольких, как правило, заранее известных сигналов в условиях искажений и на фоне помех в канале. Обнаружение сигнала это частный случай различения 2-х сигналов.

Оценка параметров сигналов это принятие решения о значении одного или нескольких параметров переданного сигнала по принятому колебанию в условиях искажений и на фоне помех в канале.

Фильтрация это оценка одного или нескольких параметров сигнала, зависящих от времени в условиях искажений и на фоне помех в канале.

Разрешение сигналов это отдельное извлечение информации из наблюдаемых одновременно в принятом колебании однотипных сигналов в условиях искажений и на фоне помех в канале.

Восстановление сигналов это частный случай задачи фильтрации сигнала, искаженного в линейном канале распространения, на фоне помех.

При этом как информационные сигналы, так и помехи являются случайными явлениями, природа и свойства которых изучаются в теории вероятностей и математической статистике. Именно поэтому изучаемая дисциплина называется **статистической теорией РТС (СТРТС)**.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В курсе рассматриваются теоретические основы анализа и синтеза радиотехнических систем различного назначения. Под **РТС** понимают информационные системы, осуществляющие извлечение, разрушение и передачу информации с помощью радиоволн. Сигналы и помехи в РТС являются функциями пространства и времени. В теории РТС сигналы различных типов описывают элементами множеств или точками пространств. При этом наиболее часто используются евклидовы и гильбертовы пространства, а также спектральные представления сигналов в виде ряда или интеграла Фурье.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что понимают под радиотехническими системами?
2. Что понимают в СТРТС под радиосигналом?
3. Как радиотехнические системы классифицируются по назначению, по построению и типу используемого сигнала?
4. Как описывается процесс прохождения информации в РТС различного назначения?
5. Что понимается под помехами и искажениями в РТС?
6. Как классифицируются основные виды помех и искажений по происхождению, виду, характеру взаимодействия с полезным сигналом?
7. Что понимают в СТРТС под помехоустойчивостью системы?
8. В чем суть основных шести задач СТРТС: обнаружения, различения, оценки параметров, фильтрации, разрешения и восстановления сигналов?
9. Какие основные типы сигналов используются в РТС?
10. Какие типы множеств используются в СТРТС для описания свойств совокупностей сигналов?

ЛЕКЦИЯ №2. Вероятностная модель задачи обнаружения сигналов РТС. Проверка гипотез. Отношение правдоподобия.

2. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ОБНАРУЖЕНИЯ И РАЗЛИЧЕНИЯ СИГНАЛОВ

2.1. ТЕОРИЯ ОБНАРУЖЕНИЯ СИГНАЛОВ

Под обнаружением сигнала в СТРС понимается задача анализа принятого колебания с целью установить, присутствует ли в этом колебании сигнал или нет на фоне помех.

Задача обнаружения ставится корректно, когда об ожидаемом сигнале имеется достаточный объем априорной информации, т.е. известен вид или форма сигнала, при этом допускается, что часть параметров сигнала неизвестна, но имеются их статистические характеристики. Допускается даже, что и форма сигнала может быть неизвестна, но в этом случае должны быть, по крайней мере, известны статистические характеристики значений сигнала, причем они должны отличаться от статистических характеристик шума. В противном случае задача обнаружения может напоминать пожелание «найти то ни знаю что».

В отличие от обнаружения, различение сигналов – это принятие решения, какой из M сигнал находится в принятом колебании. С этой точки зрения обнаружение сигнала это различение двух сигналов, один из которых нулевой.

Оптимальные алгоритмы принятия решений при обнаружении или различении сигналов в условиях случайных воздействий помех и шумов должны обеспечивать заданное качество в большинстве случаев, т.е. критерии качества должны быть статистическими. Поэтому алгоритмы обнаружения и различения основаны на методах теории проверки статистических гипотез, являющейся частью математической статистики. Основные идеи этой теории мы рассмотрим на примере решения задачи обнаружения сигналов.

Представим задачу обнаружения сигнала в виде схемы на Рис.2.1.

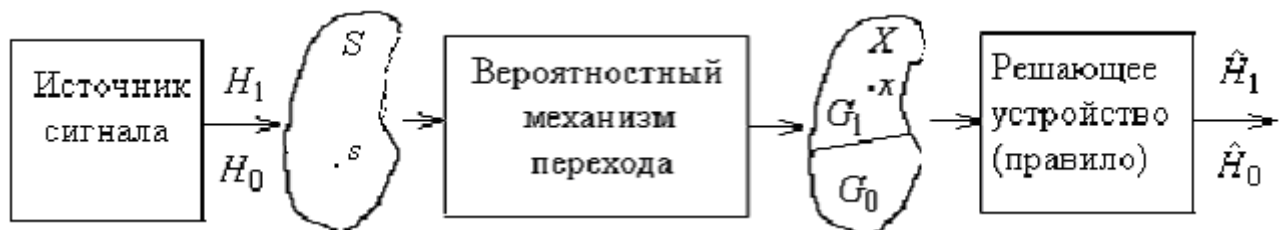


Рис.2.1. Задача обнаружения сигнала.

Источник сигнала порождает точку s в пространстве передаваемых сигналов S . Наблюдаемый на входе обнаружителя сигнал x принадлежит пространству наблюдаемых (входных) сигналов X . Пространства

наблюдаемых и передаваемых сигналов удобно считать однотипными.

В зависимости от вида пространства наблюдаемых сигналов принятый сигнал x и передаваемый s могут быть:

1. Числом, если пространства \mathbf{X} и \mathbf{S} являются множествами вещественных \mathbf{R} или комплексных чисел \mathbf{C} ;
2. Вектором отсчетов $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ или $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_n)$, если пространства \mathbf{X} и \mathbf{S} являются n -мерными пространствами \mathbf{R}^n или \mathbf{C}^n ;
3. Функциями времени, если пространства \mathbf{X} и \mathbf{S} являются функциональными пространствами \mathbf{L} .

Случай 1 и 2 описывают ситуацию, которая возникает в цифровых обнаружителях. Здесь принятый сигнал x представляет собой последовательность отсчетов сигнала $x(t)$ на выходе аналогового цифрового преобразователя (АЦП). Если для дальнейшей обработки используется один из отсчетов сигнала, то это 1-й случай, если используется большее число отсчетов то 2-й. Случай 3 возникает, когда обнаружитель аналоговый, и решение принимается в результате анализа непрерывного по времени сигнала.

В рассматриваемой задаче сложность обнаружения заключается в том, что передаваемый сигнал s отображается в пространство принимаемых сигналов случайным образом в результате действия вероятностного механизма перехода $\mathbf{S} \rightarrow \mathbf{X}$. Для описания процесса отображения $\mathbf{S} \rightarrow \mathbf{X}$ введем следующие вероятностные характеристики задачи:

H_1 - гипотеза о наличии сигнала в принятом сигнале x , $s \neq 0$;

H_0 - гипотеза об отсутствии в принятом сигнале x сигнала, $s = 0$;

$p(x|H_0)$ - плотность вероятности наблюдаемого сигнала x при условии, что справедлива гипотеза H_0 ;

$p(x|H_1)$ - плотность вероятности наблюдаемого сигнала x при условии, что справедлива гипотеза H_1 ;

$\mathbf{P}\{H_1\}, \mathbf{P}\{H_0\}$ - априорные вероятности наличия или отсутствия сигнала на выходе источника.

\hat{H}_1 и \hat{H}_0 - принятые обнаружителем решения. Правило принятия решений сводится к проверке условия: если x попадает в область G_1 , то принимается решение \hat{H}_1 , если x попадает в область G_0 , то принимается решение \hat{H}_0 . Области G_1 и G_0 таковы, что $G_1 \cup G_0 = \mathbf{X}$, $G_1 \cap G_0 = \emptyset$.

В результате работы обнаружителя происходят следующие события:

- 1) $A_{00} \rightarrow H_0 \rightarrow \hat{H}_0$ - справедлива гипотеза H_0 , принято решение \hat{H}_0 ;
- 2) $A_{01} \rightarrow H_0 \rightarrow \hat{H}_1$ - справедлива гипотеза H_0 , принято решение \hat{H}_1 ;
- 3) $A_{10} \rightarrow H_1 \rightarrow \hat{H}_0$ - справедлива гипотеза H_1 , принято решение \hat{H}_0 ;

4) $A_{11} \rightarrow H_1 \rightarrow \hat{H}_1$ - справедлива гипотеза H_1 , принято решение \hat{H}_1 . Эти события происходят с вероятностями $\mathbf{P}\{A_{00}\}$, $\mathbf{P}\{A_{01}\}$, $\mathbf{P}\{A_{10}\}$, $\mathbf{P}\{A_{11}\}$, из которых $\mathbf{P}\{A_{00}\}$ и $\mathbf{P}\{A_{11}\}$ описывают вероятности правильных решений, которые хотелось бы увеличить, и $\mathbf{P}\{A_{01}\}$, $\mathbf{P}\{A_{10}\}$ описывают вероятности ошибочных решений, которые хотелось бы уменьшить. Т.о. качество работы обнаружителя описывается четырьмя параметрами, оптимизировать которые одновременно невозможно. Для получения оптимального алгоритма обнаружения необходимо перейти к единственному критерию качества.

Наиболее часто в теории РТС для построения оптимального решающего правила используется байесовская схема принятия решений. В результате применения этой схемы можно получить несколько критериев качества. Самый общий из них это **критерий байесовского риска**.

Сопоставим каждому событию $A_{i,j}$ в соответствии некие числа $R_{i,j}$ следующим образом: $A_{00} \rightarrow R_{00}$, $A_{01} \rightarrow R_{01}$, $A_{10} \rightarrow R_{10}$, $A_{11} \rightarrow R_{11}$. Эти числа в теории проверки статистических гипотез называются рисками (стоимостями, штрафами). При этом полагают, что риск, связанный с неверным принятием решения больше, чем риск, связанный с принятием правильного решения, т.е. $R_{01} > R_{00}$, $R_{10} > R_{11}$.

Поскольку события $A_{00}, A_{01}, A_{10}, A_{11}$ происходят с вероятностями $\mathbf{P}\{A_{00}\}$, $\mathbf{P}\{A_{01}\}$, $\mathbf{P}\{A_{10}\}$, $\mathbf{P}\{A_{11}\}$, то риски $R_{00}, R_{01}, R_{10}, R_{11}$ можно считать значениями дискретной случайной величины. В качестве критерия оптимизации в байесовской схеме используется средний риск \bar{R} , который является ничем иным как математическим ожиданием этой случайной величины и может быть получен в соответствии со следующим выражением

$$\bar{R} = R_{00}\mathbf{P}\{A_{00}\} + R_{01}\mathbf{P}\{A_{01}\} + R_{10}\mathbf{P}\{A_{10}\} + R_{11}\mathbf{P}\{A_{11}\}. \quad (2.1)$$

Используя статистическое описание механизма перехода выражение (2.1) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \bar{R} = & R_{00}\mathbf{P}\{H_0\} \int_{G_0} p(x|H_0)dx + R_{01}\mathbf{P}\{H_0\} \int_{G_1} p(x|H_0)dx + \\ & + R_{10}\mathbf{P}\{H_1\} \int_{G_0} p(x|H_1)dx + R_{11}\mathbf{P}\{H_1\} \int_{G_1} p(x|H_1)dx \end{aligned} \quad (2.2)$$

Оптимальный по критерию байесовского риска алгоритм обнаружения получается в результате минимизации среднего байесовского риска по всем всевозможным разбиениям пространства X на два непересекающихся подмножества G_0 и G_1 .

Найдем искомое разбиение минимизируя выражение для \bar{R} , и учитывая, что $X = G_0 \cup G_1$ или $G_1 = X \setminus G_0$. Для этого перепишем (2.2.) в виде:

$$\begin{aligned}
\bar{R} &= R_{00} \mathbf{P}\{H_0\} \int_{G_0} p(x|H_0) dx + R_{01} \left[\mathbf{P}\{H_0\} \int_X p(x|H_0) dx - \mathbf{P}\{H_0\} \int_{G_0} p(x|H_0) dx \right] + \\
&+ R_{10} \mathbf{P}\{H_1\} \int_{G_0} p(x|H_1) dx + R_{11} \left[\mathbf{P}\{H_1\} \int_X p(x|H_1) dx - \mathbf{P}\{H_1\} \int_{G_0} p(x|H_1) dx \right] = \\
&= R_{01} \mathbf{P}\{H_0\} + R_{11} \mathbf{P}\{H_1\} + \\
&+ \int_{G_0} [R_{00} p(x|H_0) \mathbf{P}\{H_0\} - R_{01} p(x|H_0) \mathbf{P}\{H_0\} + R_{10} p(x|H_1) \mathbf{P}\{H_1\} - R_{11} p(x|H_1) \mathbf{P}\{H_1\}] dx = \\
&= R_{01} \mathbf{P}\{H_0\} + R_{11} \mathbf{P}\{H_1\} + \int_{G_0} [(R_{10} - R_{11}) p(x|H_1) \mathbf{P}\{H_1\} - (R_{01} - R_{00}) p(x|H_0) \mathbf{P}\{H_0\}] dx
\end{aligned}$$

Рассмотрим множество G_0 . Для того чтобы средний риск уменьшался при формировании элементов множества G_0 необходимо, чтобы это множество состояло из таких $x \in X$, для которых выражение под интегралом в последнем выражении было отрицательно, т.е. выполнялось следующее неравенство:

$$(R_{10} - R_{11}) p(x|H_1) \mathbf{P}\{H_1\} < (R_{01} - R_{00}) p(x|H_0) \mathbf{P}\{H_0\}.$$

Другими словами множество G_0 соответствующее оптимальному алгоритму приема можно определить как множество таких x , для которых выполняется следующее неравенство:

$$\frac{p(x|H_1)}{p(x|H_0)} < \frac{(R_{01} - R_{00}) \mathbf{P}\{H_0\}}{(R_{10} - R_{11}) \mathbf{P}\{H_1\}}. \quad (2.3)$$

Таким образом, для того, чтобы проверить попадает ли сигнал x в область G_0 достаточно проверить выполнение данного неравенства. Очевидно, что если для принятого сигнала x это неравенство не выполняется, то $x \in G_1$ и следует принять решение в пользу обнаружения сигнала.

Оптимальный алгоритм обнаружения можно записать в виде

$$\Lambda(x) \stackrel{H_1}{\geq} \eta, \quad (2.4)$$

где, $\eta = \frac{(R_{01} - R_{00}) \mathbf{P}\{H_0\}}{(R_{10} - R_{11}) \mathbf{P}\{H_1\}}$ называется порогом обнаружителя;

$\Lambda(x) = \frac{p(x|H_1)}{p(x|H_0)}$ называется **отношением правдоподобия**.

Задавая различные значения коэффициентам риска можно получить различные критерии качества работы обнаружителя и соответственно

различные оптимальные алгоритмы.

Критерий идеального наблюдателя возникает как частный случай критерия среднего риска в предположении, что $R_{00} = R_{11} = 0$, $R_{10} = R_{01} = 1$. В результате алгоритм обнаружения имеет вид

$$\Lambda(x) \stackrel{H_1}{\geq} \eta = \frac{\mathbf{P}\{H_0\}}{\mathbf{P}\{H_1\}}. \quad (2.5)$$

Средний риск в соответствии с (2.1) $\bar{R} = \mathbf{P}\{A_{01}\} + \mathbf{P}\{A_{10}\}$ равен полной вероятности ошибки. Т.е. критерий идеального наблюдателя приводит к алгоритму, обеспечивающему минимальное значение полной вероятности ошибки. В отечественной литературе критерий идеального наблюдателя называют **критерием Котельникова**.

В РТС передачи двоичных сообщений часто $\mathbf{P}\{H_1\} = \mathbf{P}\{H_0\} = \frac{1}{2}$.

Решающее правило в этом случае имеет вид

$$\Lambda(x) \stackrel{H_1}{\geq} \eta = 1. \quad (2.6)$$

Все выше рассмотренные критерии и соответствующие решающие правила учитывали априорную статистическую информацию о наличии или отсутствии цели, т.е. порог обнаружителя задавался с учетом вероятностей $\mathbf{P}\{H_1\}, \mathbf{P}\{H_0\}$.

На практике часто эти вероятности недоступны. Одним из эффективных способов преодоления этой проблемы является использование **критерия Неймана – Пирсона**. При работе обнаружителя в реальных условиях его качество работы описывается вероятностями событий $A_{00}, A_{01}, A_{10}, A_{11}$.

В радиолокации при описании работы РЛС обнаружения целей для каждой вероятности этих событий используются следующие термины: $p_{no} = \mathbf{P}\{A_{11}\}$ - вероятность правильного обнаружения цели; $p_{лт} = \mathbf{P}\{A_{01}\}$ - вероятность ложной тревоги; $p_{нц} = \mathbf{P}\{A_{10}\}$ - вероятность пропуска цели; $p_{нн} = \mathbf{P}\{A_{00}\}$ - вероятность правильного необнаружения цели. При этом, очевидно, что $p_{no} + p_{нц} = 1$, $p_{нн} + p_{лт} = 1$. Т.о. качество работы обнаружителя полностью характеризуется двумя вероятностями, например $p_{нц}$ и $p_{лт}$.

В соответствии с критерием Неймана – Пирсона необходимо искать минимум $p_{нц}$ при фиксированном значении $p_{лт}$, т.е.

$$\text{алгоритм обнаружения} = \min_{G_0} p_{нц}, \text{ при } p_{лт} = \alpha$$

Эта задача является задачей на условный экстремум. Она решается с помощью множителей Лагранжа, которые позволяют перейти к задаче на безусловный экстремум вида

$$\text{алгоритм обнаружения} = \min_{G_0} (p_{\text{ни}} + \lambda \cdot p_{\text{лт}}),$$

где λ - множитель Лагранжа, который определяется по уравнению условия

$$\int_{G_0(\lambda)} p(x|H_0) dx = \alpha.$$

Тогда

$$\min_{G_0} \left[1 - \int_{G_0} p(x|H_1) dx + \lambda \int_{G_0} p(x|H_0) dx \right] = \min_{G_0} \left[1 - \int_{G_0} [\lambda \cdot p(x|H_0) - p(x|H_1)] dx \right].$$

Из последнего выражения очевидно, что оптимальная область G_0 определяется условием на $x \in G_0$ в виде неравенства $\lambda \cdot p(x|H_0) > p(x|H_1)$. Следовательно, алгоритм обнаружения по критерию Неймана – Пирсона является частным случаем байесовского алгоритма (2.4) при $\eta = \lambda$. Значение множителя Лагранжа определяется из условия на вероятность ложных тревог в виде

$$\int_{\lambda}^{+\infty} p(\Lambda|H_0) d\Lambda = \alpha, \quad (2.7)$$

где Λ - случайное значение отношения правдоподобия, $p(\Lambda|H_0) d\Lambda$ - плотность вероятности отношения правдоподобия при условии справедливости гипотезы H_0 .

Пример 2.1.

Рассмотрим пример нахождения оптимального байесовского решающего правила обнаружения дискретного сигнала, прошедшего канал с аддитивным гауссовым шумом.

На входе канала присутствует сигнал вида

$$s(t) = \begin{cases} A, & t \in [0, T] \\ 0, & t \notin [0, T] \end{cases}$$

На выходе канала наблюдается сигнал

$$x(t) = \theta \cdot s(t) + n(t).$$

Здесь $\theta = 1$, если справедлива гипотеза H_1 и $\theta = 0$ если справедлива гипотеза H_0 , $n(t)$ - реализация квазибелого гауссовского шума.

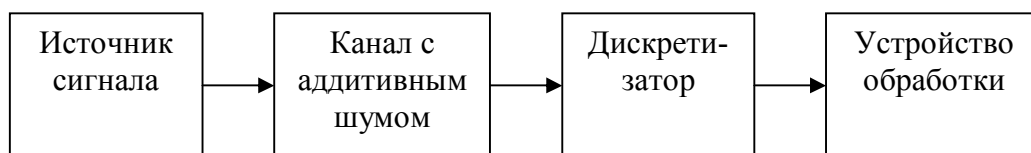


Рис.2.2. Схема процесса обнаружения

На выходе дискретизатора наблюдаются отсчеты сигнала $x(t)$ $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$, каждый из которых

$$x_i = \theta \cdot s(\Delta t \cdot i) + n(\Delta t \cdot i) = \theta \cdot A + n_i,$$

где $\Delta t = \frac{1}{2F}$ - интервал дискретизации, F - максимальная частота энергетического спектра квазибелого шума, n_i - отсчеты шума, $i = 1, \dots, n$.

Т.к. в рассматриваемом случае отсчеты шума дискретизированы с частотой Котельникова, то они некоррелированы и вследствие гауссовости независимы, имеют нулевое математическое ожидание и дисперсию σ^2 . Функции плотности вероятности $p(\mathbf{x}|H_1)$ и $p(\mathbf{x}|H_0)$ могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}|H_1) &= \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{i=n} (x_i - A)^2\right), \\ p(\mathbf{x}|H_0) &= \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{i=n} (x_i)^2\right). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Т.о. отношение правдоподобия

$$\Lambda(\mathbf{x}) = \exp\left(\frac{1}{2\sigma^2} \left(2A \sum_{i=1}^{i=n} x_i - nA^2\right)\right).$$

Неравенство (2.4) можно записать в виде

$$z = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} x_i \stackrel{H_1}{\geq} \frac{\sigma^2 \ln(\eta)}{An} + \frac{A}{2} = z_0. \quad (2.9)$$

Величина в левой части неравенства является выборочным средним наблюдаемых отсчетов сигнала и является достаточной статистикой. Значение порога η зависит от выбранного критерия. Устройство обработки для обнаружения сигнала должно вычислить выборочное среднее наблюдаемых отсчетов сигнала и сравнить его с величиной в правой части неравенства (2.9).

Определим теперь характеристика качества полученного обнаружителя. Для этого достаточно вычислить p_{nu} и p_{lm} .

$$p_{nu} = \int_{-\infty}^{z_0} p(z|H_1) dz, \quad p_{lm} = \int_{z_0}^{-\infty} p(z|H_0) dz \quad (2.10)$$

В соответствии с (2.9) z является суммой гауссовых случайных величин.

В случае, когда справедлива гипотеза H_0 $\mathbf{M}\{z\} = 0$, $\mathbf{D}\{z\} = \frac{\sigma^2}{n}$, функция плотности вероятности имеет вид

$$p(z|H_0) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{n}{2\sigma^2} z^2\right).$$

Если справедлива гипотеза H_1 $\mathbf{M}\{z\} = \frac{A}{n}$, $\mathbf{D}\{z\} = \frac{\sigma^2}{n}$, функция плотности вероятности

$$p(z|H_1) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{n}{2\sigma^2} \left(z - \frac{A}{n}\right)^2\right).$$

Подставляя полученные выражения в (2.10) получим:

$$p_{nc} = \text{erf}\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma} \left(z_0 - \frac{A}{n}\right)\right), \quad (2.11)$$

$$p_{lm} = 1 - \text{erf}\left(\frac{\sqrt{n}z_0}{\sigma}\right), \quad (2.12)$$

где $\text{erf}(x)$ - функция ошибок, определенная в виде

$$\text{erf}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{v^2}{2}\right) dv. \quad (2.13)$$

Зависимость p_{nc} или p_{no} от вероятности p_{lm} называется рабочей характеристикой обнаружителя. Пример рабочей характеристики показан на Рис.2.3 для случая, когда $\frac{A\sqrt{n}}{2\sigma} = 1.5$, $z_0 \in (-\infty, +\infty)$.

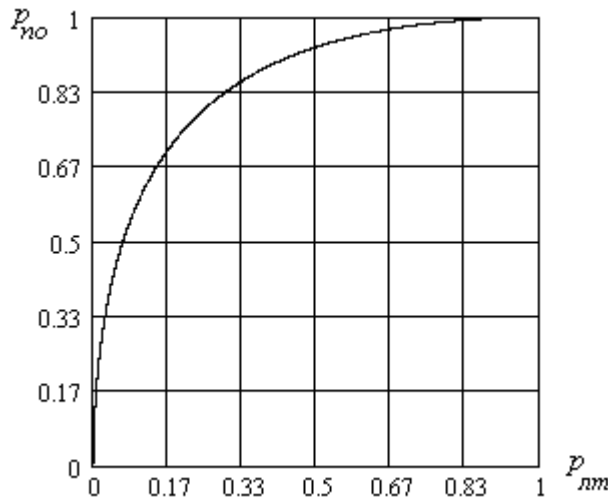


Рис.2.3. Пример рабочей характеристики обнаружителя.

Рабочие параметры обнаружителя задаются точкой на рабочей характеристике, соответствующей фиксированному значению порога. Вид **рабочей характеристики** определяется моделью взаимодействия сигнала с помехами, уровнем помех, выбранной схемой обнаружителя, наличием, у обнаруживаемого сигнала мешающих случайных параметров.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, оптимальный по критерию байесовского среднего риска алгоритм обнаружения сводится к вычислению по принятому сигналу x отношения правдоподобия $\Lambda(x)$ и сравнению полученного числа с порогом η . Если число больше порога η , то справедлива гипотеза H_1 , в противном случае справедлива гипотеза H_0 . Значение порога в данном обнаружителе выбирается исходя из априорных вероятностей и заданных заранее значений риска. В СТРС встречаются в основном три разновидности случайных объектов. Задавая различные значения коэффициентам байесовского риска можно получить различные оптимальные алгоритмы обнаружения. При этом некоторые из них не требуют априорного знания вероятности наличия или отсутствия сигнала в наблюдаемой смеси. Рабочая характеристика обнаружителя позволяет определить вероятности правильного обнаружения и ложной тревоги в зависимости от выбранного критерия оптимальности обнаружителя.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что в СТРС понимают под задачей обнаружения сигнала и как эта задача связана с задачей различения сигналов?
2. Как формулируется задача обнаружения сигналов в терминах задачи проверки статистических гипотез?
3. В чем суть байесовского подхода к проверке гипотез в задаче обнаружения сигнала?
4. Объясните, из каких соображений нужно выбирать значения коэффициентов риска при синтезе алгоритма обнаружения сигнала.
5. Что такое отношение правдоподобия и как оно используется в алгоритмах обнаружения сигналов?
6. К минимизации какой характеристики обнаружителя приводит критерий идеального наблюдателя?
7. В чем суть критерия Неймана-Пирсона?
8. Что такое рабочая характеристика обнаружителя и как по ней определяются вероятности правильного обнаружения и ложной тревоги конкретного обнаружителя?
9. Какой вид имеет рабочая характеристика «идеального» обнаружителя?

ЛЕКЦИЯ №3. Теория различения сигналов. Оптимальное байесовское правило различения сигналов. Правило максимума апостериорной вероятности. Правило максимума правдоподобия. Различение сигналов со случайными параметрами.

2.2. ТЕОРИЯ РАЗЛИЧЕНИЯ СИГНАЛОВ

Задача различения M сигналов – это задача нахождения алгоритма или правила оптимального принятия решения о наличии одного из M возможных сигналов в принятом колебании. Задача обнаружения относится к частному случаю задачи различения, когда $M=2$, а один из различаемых сигналов равен нулю.

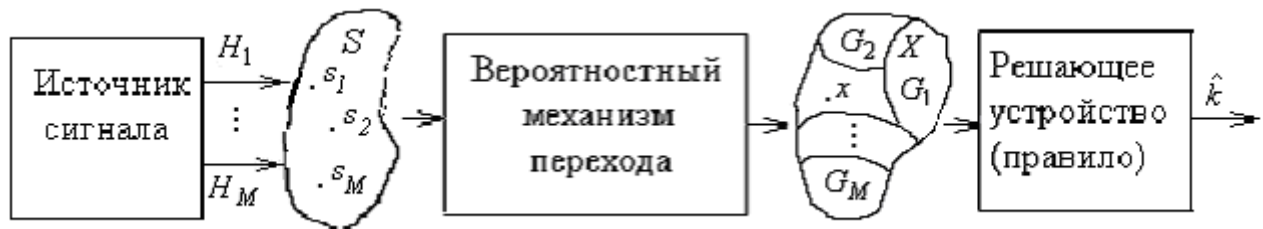


Рис.2.4. Задача различения сигналов.

Источник сигнала порождает одну из точек s_1, s_2, \dots, s_M в пространстве передаваемых сигналов S . Наблюдаемый на входе обнаружителя сигнал x принадлежит пространству наблюдаемых (входных) сигналов X .

В зависимости от вида пространства наблюдаемых сигналов принятый сигнал x и передаваемый s могут быть элементами множества вещественных \mathbf{R} или комплексных чисел \mathbf{C} , n -мерных пространств \mathbf{R}^n или \mathbf{C}^n , функционального пространства \mathbf{L} .

Для описания процесса отображения $S \rightarrow X$ используются следующие вероятностные характеристики задачи:

H_i - гипотеза о наличии сигнала s_i в принятом сигнале x ;

$p(x|H_i)$ - функционал плотности вероятности наблюдаемого сигнала x при условии, что справедлива гипотеза H_i ;

$\mathbf{P}\{H_i\}$ - априорная вероятность наличия сигнала s_i на выходе источника.

\hat{H}_k - принятое решающим устройством решение.

Пространство наблюдаемых сигналов X разбито на M непересекающихся подмножеств G_1, \dots, G_M . Алгоритм принятия решений определяет номер подмножества, в котором оказался принятый сигнал x . Этот номер далее отождествляется с номером переданного сигнала. С этой точки зрения оптимальный алгоритм различения это разбиение пространства X на подмножества G_1, \dots, G_M , при котором

обеспечивается оптимум заданного критерия качества.

Обобщая рассуждения об оптимальном алгоритме принятия решений в задаче обнаружения, рассмотрим M событий $\{A_{ij}\}_{i=1\dots M, j=1\dots M}$ возникающих при работе различителя. Для каждого из события $\{A_{ij}\}$ задается соответствующий ему риск R_{ij} . В качестве критерия оптимальности в байесовских процедурах рассматривается средний риск, который определяется по формуле

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M R_{ij} \mathbf{P}\{A_{ij}\} = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M R_{ij} \mathbf{P}\{H_i\} \int_{G_j} p(x|H_i) dx. \quad (2.14)$$

Найдем оптимальный алгоритм различения M сигналов, перебирая все возможные разбиения G_1, \dots, G_M и выбирая то из них, которое дает минимальное значение среднего риска \bar{R} . Для этого перепишем выражение (2.14) в виде

$$\begin{aligned} \bar{R} = & \int_{G_1} \sum_{i=1}^M R_{i1} \mathbf{P}\{H_i\} p(x|H_i) dx + \int_{G_2} \sum_{i=1}^M R_{i2} \mathbf{P}\{H_i\} p(x|H_i) dx + \\ & + \dots + \int_{G_M} \sum_{i=1}^M R_{iM} \mathbf{P}\{H_i\} p(x|H_i) dx. \end{aligned} \quad (2.15)$$

При выборе оптимального разбиения необходимо обеспечить минимальное значение положительного приращения соответствующего интеграла в (2.15). Таким образом, подмножество G_1 , например, будет состоять из таких x , для которых выполняется следующее неравенство

$$\sum_{i=1}^M R_{i1} p(x|H_i) \mathbf{P}\{H_i\} < \sum_{i=1}^M R_{il} p(x|H_i) \mathbf{P}\{H_i\}, \quad l = 2, 3, \dots, M. \quad (2.16)$$

Множество G_k соответственно состоит из таких x , для которых выполняется неравенство

$$\sum_{i=1}^M R_{ik} p(x|H_i) \mathbf{P}\{H_i\} \leq \sum_{i=1}^M R_{il} p(x|H_i) \mathbf{P}\{H_i\}, \quad l = 1 \dots M. \quad (2.17)$$

Так как алгоритм приема сводится к определению такого множества G_k , в которое попал принятый сигнал x , то алгоритм различения сигналов оптимальный по критерию минимума среднего байесовского риска можно записать в виде

$$\hat{k} = \arg \min_l \sum_{i=1}^M R_{il} \mathbf{P}\{H_i\} p(x|H_i). \quad (2.18)$$

Алгоритм различения M сигналов оптимальный по критерию идеального наблюдателя (критерий Котельникова) является частным случаем (2.18) при функции риска вида:

$$R_{ij} = \begin{cases} 0, & i = l, \\ 1, & i \neq l. \end{cases} \quad (2.19)$$

Подставляя (2.19) в (2.18) получим

$$\begin{aligned} \hat{k} &= \arg \min_l \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^M \mathbf{P}\{H_i\} p(x|H_i) = \arg \min_l \sum_{i=1}^M [\mathbf{P}\{H_i\} p(x|H_i) - \mathbf{P}\{H_l\} p(x|H_l)] = \\ &= \arg \min_l [P(x) - \mathbf{P}\{H_l\} p(x|H_l)] = \arg \max_l \mathbf{P}\{H_l\} p(x|H_l) = \arg \max_l P(x) p(H_l|x). \\ \hat{k} &= \arg \max_l p(H_l|x) \end{aligned} \quad (2.20)$$

Алгоритм (2.20) называется **алгоритмом максимума апостериорной вероятности** (МАН). Полученный алгоритм выбирает такую гипотезу H_l , которая имеет максимальную вероятность при условии, что принят сигнал $x \in X$. Средний риск в данном случае тождественно равен полной вероятности ошибки.

$$\bar{R} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^M \sum_{j=1}^M \mathbf{P}\{A_{ij}\} = P_{ош}$$

Если дополнительно к условию (2.19) априорные вероятности появления сигналов на выходе источника равны, т.е. $\mathbf{P}\{H_l\} = \frac{1}{M}$ то получим алгоритм различения в виде

$$\hat{k} = \arg \max_l \mathbf{P}\{H_l\} p(x|H_l) = \arg \max_l p(x|H_l). \quad (2.20)$$

$p(x|H_l)$ - плотность вероятности наблюдаемого сигнала x , при условии справедливости гипотезы H_l . Эту плотность часто называют функцией или **функционалом правдоподобия**, а алгоритм (2.20) **алгоритмом максимального правдоподобия** (МП). Алгоритм МП выбирает ту гипотезу о переданном сигнале, которая обеспечивает максимум вероятности наблюдаемой реализации.

Все рассмотренные выше алгоритмы приема требуют для своей реализации знания априорного распределения, т.е. $\{\mathbf{P}\{H_i\}\}_{i=1...M}$. Как и в задаче обнаружения, отсутствие информации об априорном распределении приводит к ситуации, которая называется априорной проблемой. В задаче обнаружения эта проблема решалась с помощью критерия Неймана – Пирсона. К сожалению, обобщение критерия Неймана – Пирсона для задачи различения невозможно. Поэтому при решении задачи различения иногда используют критерий, который называют **критерием минимакса**. В рамках этого критерия алгоритм различения строится как минимум байесовского риска в худшем случае относительно априорного распределения, т.е.

$$\hat{k} = \arg \min_l \max_{\{P\{H_k\}\}} \sum_{i=1}^M R_{ij} P\{H_i\} p(x|H_i). \quad (2.21)$$

Рассмотрим случай, когда различаемые сигналы имеют несколько неизвестных на приемной стороне параметров, являющихся случайными величинами $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$. В этом случае сигнал на выходе источника можно записать в виде

$$s_i = s_i(t, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n).$$

В этом случае функционалы правдоподобия и апостериорной вероятности будут иметь неопределенные параметры $p(H_i|x, \lambda)$ $p(x|H_i, \lambda)$. Если имеется информация о вероятностных распределениях неопределенных параметров, то соответствующие функционалы правдоподобия и апостериорной вероятности для построения оптимального алгоритма могут быть получены в следующем виде:

$$\begin{aligned} p(H_i|x) &= \int_{\lambda} p(H_i|x, \lambda) \mathbf{P}\{\lambda\} d\lambda, \\ p(x|H_i) &= \int_{\tilde{\lambda}} p(x|H_i, \lambda) \mathbf{P}\{\lambda\} d\lambda, \end{aligned} \quad (2.22)$$

где $\mathbf{P}\{\lambda\}$ - функционал плотности вероятности вектора неопределенных параметров. В качестве неопределенных параметров в реальных радиотехнических системах часто фигурируют начальная фаза сигнала, амплитудный коэффициент, частотный сдвиг, временная задержка сигнала и т.д.

Пример 2.2.

Рассмотрим пример нахождения оптимального алгоритма различения дискретного сигнала, прошедшего канал с аддитивным гауссовым шумом. На входе канала присутствуют сигналы вида

$$s_1(t) = \begin{cases} A, & t \in [0, T] \\ 0, & t \notin [0, T] \end{cases}, \quad s_2(t) = \begin{cases} -A, & t \in [0, T] \\ 0, & t \notin [0, T] \end{cases}.$$

На выходе канала наблюдается сигнал

$$x(t) = \theta \cdot s_1(t) + (1 - \theta) s_2(t) + n(t).$$

где $\theta = 1$, если справедлива гипотеза H_1 и $\theta = 0$ если справедлива гипотеза H_2 , $n(t)$ - реализация квазиглобального гауссовского шума.

На выходе дискретизатора (Рис.2.2.) наблюдаются отсчеты сигнала $x(t)$ $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$, каждый из которых

$$x_i = \theta \cdot s(\Delta t \cdot i) + (1 - \theta) s_2(\Delta t \cdot i) + n(\Delta t \cdot i) = \theta \cdot A + (\theta - 1)A + n_i,$$

где $\Delta t = \frac{1}{2F}$ - интервал дискретизации, F - максимальная частота пропускания канала, n_i - отсчеты шума, $i = 1, \dots, n$. В рассматриваемом

случае отсчеты шума независимы, имеют нулевое математическое ожидание и дисперсию σ^2 . Функции плотности вероятности $p(\mathbf{x}|H_1)$ и $p(\mathbf{x}|H_2)$ могут быть представлены в виде

$$p(\mathbf{x}|H_1) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{i=n} (x_i - A)^2\right),$$

$$p(\mathbf{x}|H_2) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{i=n} (x_i + A)^2\right).$$

Алгоритм принятия решений, оптимальный по критерию Котельникова имеет вид

$$p(\mathbf{x}|H_1) \geq p(\mathbf{x}|H_2),$$

$$s = \sum_{i=1}^{i=n} x_i \geq 0.$$

Устройство обработки для различения сигналов должно вычислить знак суммы наблюдаемых отсчетов сигнала.

Определим теперь характеристики качества полученного различителя, для случая равновероятных сигналов. Для этого вычислим $p_{ош}$ в виде

$$p_{ош} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 p(s|H_1) ds + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} p(s|H_2) ds.$$

В соответствии с алгоритмом различения s является суммой гауссовых случайных величин. В случае, когда справедлива гипотеза H_1 $\mathbf{M}\{s\} = nA$, $\mathbf{D}\{s\} = n\sigma^2$, функция плотности вероятности имеет вид

$$p(s|H_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2n\sigma^2} (s - nA)^2\right).$$

Если справедлива гипотеза H_2 $\mathbf{M}\{s\} = -nA$, $\mathbf{D}\{s\} = n\sigma^2$, функция плотности вероятности

$$p(s|H_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2n\sigma^2} (s + nA)^2\right).$$

Подставляя полученные выражения в выражение для вероятности ошибки, получим

$$p_{ош} = \text{erf}\left(-\sqrt{n} \frac{A}{\sigma}\right).$$

Зависимость полной вероятности ошибки от отношения сигнал-шум различителя показана на Рис.2.5.

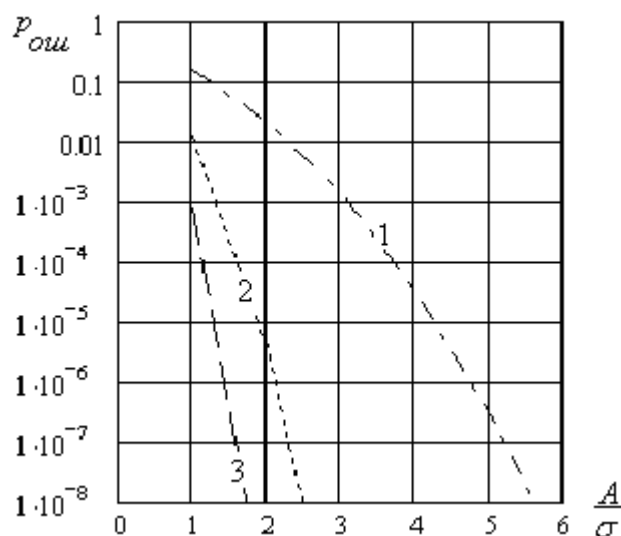


Рис.2.5. Зависимость $P_{ош}$ от отношения сигнал-шум, при 1) $n = 1$, 2) $n = 5$, 3) $n = 10$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Оптимальное байесовское правило различения сигналов на приеме сводится к выбору гипотезы, минимизирующей функционал среднего риска. Правило максимума апостериорной вероятности является частным случаем байесовского правила различения при одинаковых значениях риска для неправильных решений и нулевых для правильных. Правило максимума правдоподобия дополнительно предполагает априорную равновероятность различаемых сигналов.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что в СТРТС понимают под задачей различения сигналов?
2. Как формулируется задача различения сигналов в терминах задачи проверки статистических гипотез?
3. В чем суть алгоритма максимума апостериорной вероятности в задаче различения сигналов?
4. В каком случае алгоритм максимума апостериорной вероятности сводится к алгоритму максимального правдоподобия?
5. В каких случаях при решении задачи различения применяется алгоритм, основанный на критерии минимакса?
6. Что делать, если у различаемых сигналов некоторые параметры неизвестны?

ЛЕКЦИЯ №4. Алгоритмы и устройства оптимального обнаружения и различения сигналов на фоне БГШ. Оптимальный прием детерминированного сигнала. Структурная схема когерентного обнаружителя и различителя. Коррелятор и согласованный фильтр. Потенциальная помехоустойчивость когерентного обнаружителя.

2.3. АЛГОРИТМЫ И УСТРОЙСТВА ОПТИМАЛЬНОГО ОБНАРУЖЕНИЯ И РАЗЛИЧЕНИЯ СИГНАЛОВ

2.3.1. Обнаружение детерминированного сигнала

Рассмотрим задачу обнаружения полностью известного сигнала $s(t)$ на фоне аддитивного белого гауссовского шума. Эту задачу называют также **задачей когерентного приема**. В этом случае наблюдаемый сигнал можно записать в виде

$$x(t) = \theta \cdot s(t) + n(t),$$

где $\theta = 1$, если справедлива гипотеза H_1 и $\theta = 0$ если справедлива гипотеза H_0 , $n(t)$ - реализация белого гауссовского шума. H_1 - гипотеза о наличии сигнала, H_0 - гипотеза об отсутствии сигнала.

В соответствии с общим методом (2.4) для нахождения алгоритма обнаружения необходимо найти отношение правдоподобия $\Lambda(x)$.

Найдем функционал плотности вероятности $p(x|H_0)$, $x \in L_2[0, T]$. В этом случае $x(t) = n(t)$. Тогда

$$p(x|H_0) = c \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{N_0} \int_0^T x^2(t) dt \right\}, \quad (2.23)$$

где c - константа, а x - функция времени.

Найдем функционал плотности вероятности $p(x|H_1)$, $x \in L_2[0, T]$. В этом случае $x(t) = s(t) + n(t)$. Тогда

$$p(x|H_1) = c \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{N_0} \int_0^T (x(t) - s(t))^2 dt \right\}. \quad (2.24)$$

Отношение правдоподобия запишется в виде:

$$\begin{aligned} \Lambda(x) &= \frac{p(x|H_1)}{p(x|H_0)} = \exp \left\{ -\frac{1}{N_0} \int_0^T (x^2(t) - 2x(t)s(t) + s^2(t)) dt + \frac{1}{N_0} \int_0^T x^2(t) dt \right\} = \\ &= \exp \left\{ \frac{2}{N_0} \int_0^T x(t)s(t) dt - \frac{1}{N_0} \int_0^T s^2(t) dt \right\} \end{aligned}$$

Введем обозначения:

$$E_s = \int_0^T s^2(t) dt - \text{энергия сигнала};$$

$$Z = \int_0^T x(t)s(t) dt - \text{скалярное произведение сигналов в } L_2[0, T], \text{ которое}$$

будем называть также **корреляционным интегралом**.

Алгоритм обнаружения примет вид

$$\Lambda(x) = \exp\left\{\frac{2Z - E_s}{N_0}\right\}^{H_1} \geq \eta, \quad (2.25)$$

где η - порог, зависящий от выбранного критерия (2.4).

Так как функция $\exp(\bullet)$ - монотонная, то (2.25) можно записать в виде

$$Z \geq \frac{N_0}{2} \ln(\eta) + \frac{E_s}{2} = Z_0, \quad (2.26)$$

Структурная схема аналогового приемника, соответствующего правилу (2.26) представлена на Рис.2.5. Поскольку приемник в процессе принятия решений вычисляет корреляционный интеграл, то он называется **корреляционным приемником**. Часть схемы до устройства сравнения, вычисляющая значение корреляционного интеграла называют также **коррелятором**.

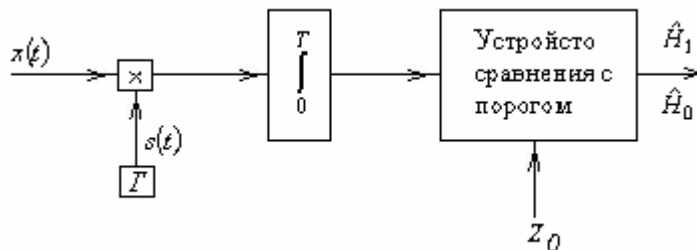


Рис.2.6. Структурная схема корреляционного приемника.

При реализации корреляционного приемника в виде аналогового устройства часто применяют другую схемную реализацию, в основе которой пассивная электрическая цепь – фильтр. Любой фильтр, у которой на входе сигнал $x(t)$, а на выходе сигнал $y(t)$ может быть описан интегралом свертки

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t - \tau) d\tau \quad (2.27)$$

где $h(t)$ - импульсная характеристика фильтра.

Значение корреляционного интеграла Z можно сформировать как отсчет в момент времени $t = T$ на выходе фильтра, импульсная характеристика которого $h(t) = s(T - t)$. Такой фильтр в радиотехнике

называют **согласованным фильтром (СФ)**.

Структурная схема обнаружителя на основе согласованного фильтра показана на следующем рисунке.

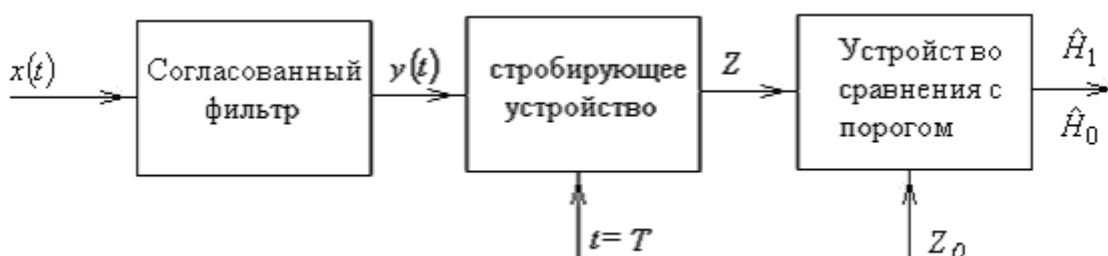


Рис.2.7. Структурная схема приемника.

Преимущества данной схемы заключается в том, что она не содержит активных элементов, а это преимущество при реализации в аналоговом виде.

С другой стороны недостаток данной схемы заключается в том, что при перестройке обнаружителя к другому виду сигнала необходим другой СФ. При реализации оптимального обнаружителя в виде цифрового устройства схема с согласованным фильтром полностью эквивалентна схеме с СФ.

СФ – устройство, часто применяемое в радиотехнике. Рассмотрим некоторые полезные свойства СФ:

1. Отношение сигнал-шум на выходе согласованного фильтра для сигнала, с которым он согласован максимально возможное среди всех линейных фильтров.

Действительно пусть на входе фильтра наблюдается сигнал вида

$$x(t) = \begin{cases} s(t) + n(t), & t \in [0, T] \\ 0, & t \notin [0, T] \end{cases}.$$

Мгновенная мощность сигнала на выходе СФ в момент времени $t = T$

$$P_s = |y_s(T)|^2 = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)h(T-t)dt \right|^2.$$

Найдем среднюю мгновенную мощность шума на выходе СФ

$$\begin{aligned}
P_n &= \mathbf{M}\left\{y_n(T)\right\}^2 = \mathbf{M}\left\{\left|\int_{-\infty}^{+\infty} n(t)h(T-t)dt\right|^2\right\} = \\
&= \mathbf{M}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} n(t_1)h(T-t_1)n^*(t_2)h^*(T-t_2)dt_1dt_2\right\} = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{M}\{n(t_1)n^*(t_2)\}h(T-t_1)h^*(T-t_2)dt_1dt_2 = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{N_0}{2}\delta(t_2-t_1)h(T-t_1)h^*(T-t_2)dt_1dt_2 = \\
&= \frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}|h(T-t)|^2 dt.
\end{aligned}$$

Отношение сигнал-шум на выходе СФ

$$\frac{P_s}{P_n} = \frac{\left|\int_{-\infty}^{+\infty} s(t)h(T-t)dt\right|^2}{\frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}|h(T-t)|^2 dt}. \quad (2.28)$$

Используя известное неравенство Буняковского-Шварца $|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle|^2 \leq \|\mathbf{x}\|^2 \|\mathbf{y}\|^2$, получим

$$\frac{P_s}{P_n} \leq \frac{\int_{-\infty}^{+\infty}|h(T-t)|^2 dt \int_{-\infty}^{+\infty}|s(t)|^2 dt}{\frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}|h(T-t)|^2 dt} = \frac{2E_s}{N_0}. \quad (2.29)$$

Максимальное значение отношения сигнал-шум на выходе СФ достигается только если $h(t) = qs(T-t)$, где q – константа.

2. Выигрыш в отношении сигнал-шум согласованного фильтра равен базе сигнала.

В соответствии с (2.29) отношение сигнал-шум на выходе СФ в случае, когда на входе сигнал с которым фильтр согласован

$$\left[\frac{P_s}{P_n}\right]_{\text{был}} = \frac{2E_s}{N_0}.$$

На входе СФ отношение сигнал-шум

$$\left[\frac{P_s}{P_n} \right]_{\text{вх}} = \frac{E_s}{T} \frac{1}{N_0 F}.$$

Выигрыш в отношении сигнал-шум согласованного фильтра

$$g = \frac{\left[\frac{P_s}{P_n} \right]_{\text{ввых}}}{\left[\frac{P_s}{P_n} \right]_{\text{вх}}} = 2FT. \quad (2.30)$$

3. Если на входе согласованного фильтра сигнал, с которым он согласован, то на его выходе наблюдается автокорреляционная функция этого сигнала. Действительно

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) s(T + \tau - t) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} s(\tau) s(T + \tau - t) d\tau.$$

4. Передаточная функция согласованного фильтра имеет вид

$$\begin{aligned} K(j\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) \exp(-j\omega t) dt = q \int_{-\infty}^{+\infty} s(T - t) \exp(-j\omega t) dt = \\ &= qs^*(j\omega) \exp(-j\omega T). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Рассмотрим теперь вопрос о потенциальной помехоустойчивости когерентного обнаружителя. Определим рабочую характеристику когерентного обнаружителя. Пусть справедлива гипотеза H_0 . В этом случае значение корреляционного интеграла определяется в виде

$$Z = \int_0^T n(t) s(t) dt,$$

где $n(t)$ - это реализация белого гауссовского шума. Это означает, что Z -гауссовская случайная величина, для описания которой необходимо знать только ее математическое ожидание и дисперсию. Найдем эти характеристики:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\{Z\} &= \int_0^T \mathbf{M}\{n(t)\} s(t) dt = 0, \\ \mathbf{D}\{Z\} &= \mathbf{M}\{(Z - \mathbf{M}\{Z\})^2\} = \mathbf{M}\left\{ \int_0^T \int_0^T n(t_1) n(t_2) s(t_1) s(t_2) dt_1 dt_2 \right\} = \\ &= \int_0^T \frac{N_0}{2} s^2(t) dt = \frac{N_0 E_s}{2}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Т.о.

$$p(Z|H_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\left(\frac{N_0E_s}{2}\right)}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{Z^2}{\left(\frac{N_0E_s}{2}\right)}\right\}.$$

Вероятность ложной тревоги определим как

$$p_{\text{лт}} = \int_{Z_0}^{+\infty} p(Z|H_0) dz = \int_{\frac{\sqrt{2Z_0}}{\sqrt{N_0E_s}}}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{Z_0}{\sqrt{\frac{N_0E_s}{2}}}\right) = 1 - \operatorname{erf}(h),$$

(2.33)

где $h = \frac{Z_0}{\sqrt{\frac{N_0E_s}{2}}}$ - модифицированный порог.

Пусть теперь справедлива гипотеза H_1 . Тогда

$$Z = \int_0^T (s(t) + n(t)) \cdot s(t) dt.$$

Т.к. $s(t)$ - детерминированный сигнал, то Z - гауссовская случайная величина, для которой

$$\mathbf{M}\{Z\} = \int_0^T s^2(t) dt = E_s,$$

$$\mathbf{D}\{Z\} = \frac{N_0E_s}{2}.$$

$$p(Z|H_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\left(\frac{N_0E_s}{2}\right)}} e^{-\frac{(Z-E_s)^2}{2\left(\frac{N_0E_s}{2}\right)}}.$$

Вероятность пропуска цели

$$p_{\text{пц}} = \int_{-\infty}^{Z_0} p(Z|H_1) dz = \int_{-\infty}^{\frac{Z_0-E_s}{\sqrt{\frac{N_0E_s}{2}}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \operatorname{erf}\left(h - \sqrt{\frac{2E_s}{N_0}}\right) = \operatorname{erf}(h - q),$$

(2.34)

где $q = \sqrt{\frac{2E_s}{N_0}}$ - коэффициент различимости.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Оптимальный прием детерминированного сигнала на фоне БГШ сводится к сравнению с порогом корреляционного интеграла, вычисляемого коррелятором. Коррелятор может быть реализован пассивной цепью в виде согласованного фильтра. Потенциальная помехоустойчивость когерентного обнаружителя определяется отношением сигнал-шум и порогом.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. В чем отличие задачи когерентного от задачи некогерентного приема?
2. Что такое корреляционный приемник?
3. Что такое согласованный фильтр и как он применяется при построении схемы обнаружителя детерминированного сигнала?
4. Что такое база сигнала?
5. Перечислите основные свойства согласованного фильтра.
6. Опишите основные области применения согласованных фильтров в РТС?

ЛЕКЦИЯ №5. Обнаружение сигналов со случайной фазой. Структурная схема некогерентного обнаружителя. Потенциальная помехоустойчивость.

2.3.2. Обнаружение сигнала со случайной фазой

Рассмотрим случай, когда принимаемый радиосигнал имеет набег фазы, который не известен на приемной стороне. Т.е. ожидаемый сигнал имеет один мешающий параметр. В случае, когда один или несколько параметров сигнала неизвестны, говорят о **некогерентном приеме**.

Модель сигнала со случайной фазой принимаемого на фоне аддитивного белого шума можно записать в виде

$$x(t) = \theta \cdot s(t, \varphi) + n(t) = \theta \cdot \operatorname{Re}[\dot{S}(t)e^{j\omega_0 t + \varphi}] + n(t), \quad (2.35)$$

где $\theta = 1$, если верна гипотеза H_1 и $\theta = 0$ если справедлива гипотеза H_0 , $n(t)$ - реализация белого гауссовского шума, $\dot{S}(t)$ - комплексная огибающая сигнала, φ - случайная фаза, имеющая равномерное распределение вероятностей на интервале $(-\pi; \pi)$.

Случайная фаза возникает в тех случаях, когда имеет место нестабильность или несинхронизированность опорных генераторов в РТС, имеются изменения протяженности канала распространения сигнала или флуктуации свойств среды.

Оптимальный обнаружитель сравнивает отношение правдоподобия с порогом. Т.к. сигнал имеет неопределенный случайный параметр, то в соответствии с (2.22)

$$p(x|H_1) = \int_{\varphi} p(x|H_1, \varphi) p(\varphi) d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} p(x|H_1, \varphi) d\varphi, \quad (2.36)$$

где φ - равномерно распределенная случайная величина, а $p(x|H_0)$ не зависит от $s(t, \varphi)$. Тогда отношение правдоподобия

$$\Lambda(x) = \frac{1}{p(x|H_0)} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} p(x|H_1, \varphi) d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \Lambda(x, \varphi) d\varphi. \quad (2.37)$$

Учитывая модель аддитивного шума по аналогии с (2.24) получим

$$\Lambda(x, \varphi) = c \cdot \exp\left\{\frac{2Z(\varphi) - E_s(\varphi)}{N_0}\right\}, \quad (2.38)$$

где $Z(\varphi) = \int_0^T (s(t, \varphi)x(t)) dt$ - зависящий от параметра корреляционный

интеграл и $E_s(\varphi) = \int_0^T s^2(t, \varphi) dt$ - зависящая от неизвестного параметра энергия сигнала. Вычислим энергию сигнала, подставив модель сигнала

$s(t, \varphi)$.

$$\begin{aligned} E_s(\varphi) &= \frac{1}{2} \int_0^T (s^2(t, \varphi) + s_{\perp}^2(t, \varphi)) dt = \frac{1}{2} \int_0^T (s^2(t, \varphi) + s_{\perp}^2(t, \varphi)) dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^T |\dot{s}(t, \varphi)| dt = \frac{1}{2} \int_0^T |\dot{S}(t) e^{j\omega_0 t + \varphi}|^2 dt = \frac{1}{2} \int_0^T |\dot{S}(t)|^2 dt = E_s. \end{aligned}$$

Т.о. энергия сигнала не зависит от начальной фазы. При выводе этого выражения мы использовали обозначение $\dot{s}(t) = s(t) + js_{\perp}(t)$ для аналитического сигнала и равенство Парсеваля для преобразования Гилберта

$$\int_0^T |s(t)|^2 dt = \int_0^T |s_{\perp}(t)|^2 dt. \quad (2.39)$$

Рассмотрим более подробно корреляционный интеграл

$$Z(\varphi) = \frac{1}{2} \int_0^T (s(t, \varphi)x(t) + s(t, \varphi)x_{\perp}(t)) dt = \frac{1}{2} \int_0^T (s(t, \varphi)x(t) + s_{\perp}(t, \varphi)x_{\perp}(t)) dt.$$

Далее в этом выражении мы можем использовать обобщенное равенство Рэлея для преобразования Гильберта

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x_{\perp}(t)y_{\perp}(t) dt. \quad (2.40)$$

Тогда

$$\begin{aligned} Z(\varphi) &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\int_0^T \dot{S}(t) e^{j\omega_0 t + \varphi} X^*(t) e^{-j\omega_0 t} dt \right] = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\int_0^T \dot{S}(t) X^*(t) dt \cdot e^{j\varphi} \right] = \\ &= \operatorname{Re} \left[\dot{Z} e^{j\varphi} \right] = |\dot{Z}| \cos(\arg \dot{Z} + \varphi), \end{aligned} \quad (2.41)$$

где $\dot{x}(t) = \dot{X}(t) \cdot e^{j\omega_0 t}$ - аналитический сигнал, соответствующий сигналу $x(t)$, \dot{Z} - комплексный корреляционный интеграл, определенный в виде

$$\dot{Z} = \frac{1}{2} \int_0^T \dot{S}(t) X^*(t) dt. \quad (2.42)$$

В соответствии с (2.37) отношение правдоподобия примет вид

$$\begin{aligned} \Lambda(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{\frac{2|\dot{Z}| \cos(\arg \dot{Z} + \varphi) - E_s}{N_0}} d\varphi = \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{E_s}{N_0}} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{\frac{2|\dot{Z}| \cos(\arg \dot{Z} + \varphi)}{N_0}} d\varphi = e^{-\frac{E_s}{N_0}} I_0 \left(\frac{2|\dot{Z}|}{N_0} \right), \end{aligned} \quad (2.43)$$

где $I_0(x)$ - модифицированная функция Бесселя нулевого порядка.

$$\ln \left(I_0 \left(\frac{2|\dot{Z}|}{N_0} \right) \right)^{H_1} \geq \ln(\eta) + \frac{E_s}{N_0}, \quad (2.44)$$

Т.к. $\ln(x)$ - монотонно возрастающая функция, $I_0(x)$ - монотонно возрастающая положительная функция для $x > 0$, следовательно $\ln(I_0(x))$ - имеет обратную функцию, которую мы обозначим $\text{lf}(x)$. Используя эту функцию решающее правило (2.44) примет вид

$$Z = |\dot{Z}| = \sqrt{Z_1^2 + Z_2^2} \geq \frac{N_0}{2} \text{lf} \left(\ln(\eta) + \frac{E_s}{N_0} \right) = Z_n. \quad (2.45)$$

Т.о. для принятия решения о наличии или отсутствии сигнала необходимо вычислить модуль комплексного корреляционного интеграла

$$|\dot{Z}| = \frac{1}{2} \left| \int_0^T X^*(t) e^{-j\omega_0 t} \dot{S}(t) e^{j\omega_0 t} dt \right|.$$

Реальная часть комплексного корреляционного интеграла может быть вычислена следующим образом:

$$\begin{aligned} Z_1 = \text{Re } \dot{Z} &= \frac{1}{2} \int_0^T (x(t)s(t) + x_{\perp}(t)s_{\perp}(t)) dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^T [x(t)|\dot{S}(t)| \cos(\gamma(t) + \omega_0 t) + x_{\perp}(t)|\dot{S}(t)| (\sin(\gamma(t) + \omega_0 t))] dt, \end{aligned}$$

где $\gamma(t) = \arg \dot{S}(t)$. Воспользовавшись обобщенным равенством Рэлея для преобразования Гильберта, получим

$$\begin{aligned} Z_1 &= \int_0^T x(t)|\dot{S}(t)| \cos(\omega_0 t + \gamma(t)) dt, \\ Z_2 &= \int_0^T x(t)|\dot{S}(t)| \sin(\omega_0 t + \gamma(t)) dt. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Структурная схема оптимального обнаружителя сигнала со случайной фазой имеет вид, показанный на Рис.2.7. Приемник, построенный по данной схеме, называют **квадратурным приемником**. При реализации корреляторы в квадратурных каналах могут быть заменены на соответствующие согласованные фильтры.

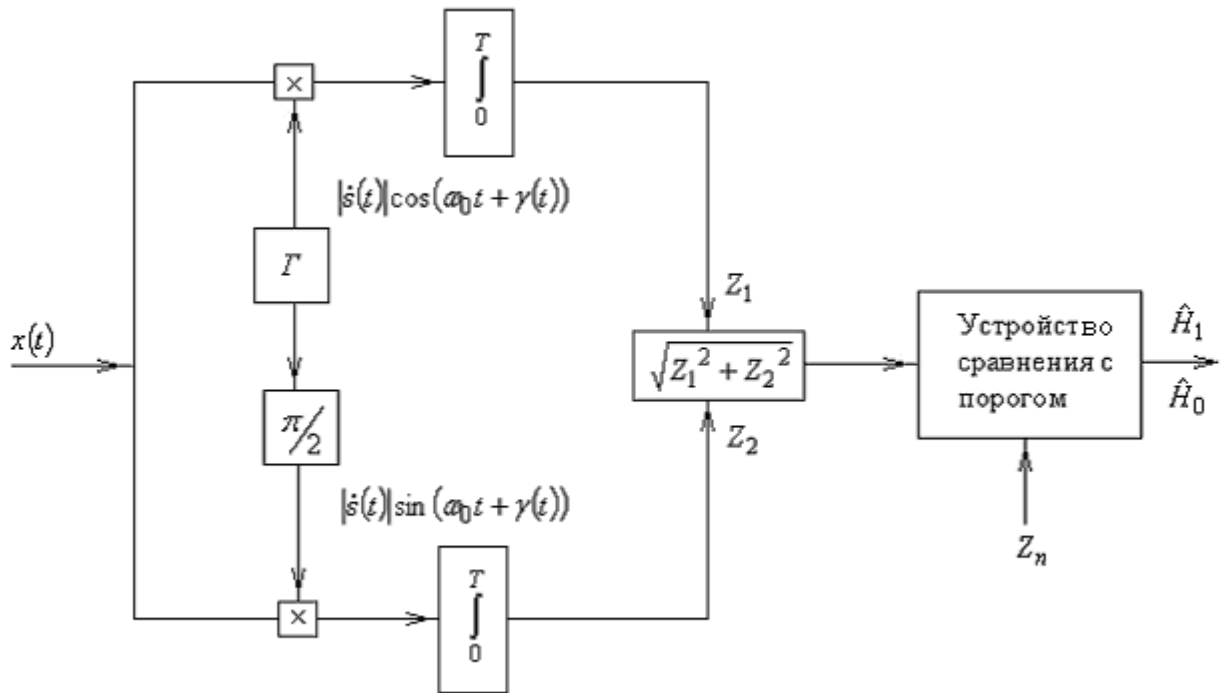


Рис.2.8. Структурная схема квадратурного приемника.

Проанализируем далее помехоустойчивость оптимального обнаружителя сигнала со случайной фазой. Реальная и мнимая части комплексного корреляционного интеграла могут быть записаны в виде

$$Z_1 = \int_0^T x(t)s(t,0)dt, \quad Z_2 = \int_0^T x(t)s_{\perp}(t,0)dt.$$

Статистические характеристики Z_1 и Z_2 в случае справедливости гипотезы H_0 фактически были получены нами ранее при анализе когерентного приемника (2.32). Так $p(Z_1|H_0)$ - распределение гауссовской случайной величины с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $\frac{N_0 E_s}{2}$. $p(Z_2|H_0)$ - распределение гауссовской случайной величины с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $\frac{N_0 E_s}{2}$. Z_1 и Z_2 статистически независимые случайные величины. Действительно в соответствии с (1.33)

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\{Z_1 Z_2\} &= \mathbf{M}\left\{ \int_0^T n(t_2)s(t_2,0)dt_2 \int_0^T n(t_1)s_{\perp}(t_1,0)dt_1 \right\} = \\ &= \int_0^T \int_0^T \mathbf{M}\{n(t_1)n(t_2)\} s_{\perp}(t_1,0)s(t_2,0)dt_2 dt_1 = \frac{N_0}{2} \int_0^T s_{\perp}(t,0)s(t,0)dt = 0. \end{aligned}$$

Так как Z_1 и Z_2 некоррелированы и гауссовы, то они независимы. Тогда совместное распределение случайных величин Z_1 и Z_2 при условии справедливости гипотезы H_0 можно представить в виде

$$p(Z_1, Z_2 | H_0) = p(Z_1 | H_0) p(Z_2 | H_0). \quad (2.47)$$

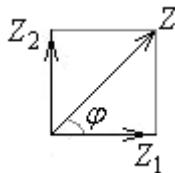
Если справедлива гипотеза H_1 , то $p(Z_1 | H_1)$ - распределение гауссовской случайной величины с математическим ожиданием E_s и дисперсией $\frac{N_0 E_s}{2}$. $p(Z_2 | H_1)$ - распределение гауссовской случайной

величины с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $\frac{N_0 E_s}{2}$. Z_1 и Z_2 статистически независимые случайные величины и их совместное распределение

$$p(Z_1, Z_2 | H_1) = p(Z_1 | H_1) p(Z_2 | H_1). \quad (2.48)$$

Определение $p(Z | H_0)$ и $p(Z | H_1)$ - это задача нахождения распределения модуля вектора, у которого координаты гауссовские случайные величины. Координаты случайного вектора на плоскости можно связать с полярными координатами вектора следующими выражениями

$$\begin{cases} z_1(Z, \varphi) = Z \cos \varphi \\ z_2(Z, \varphi) = Z \sin \varphi \end{cases} \quad (2.49)$$



Тогда искомые распределения модуля случайного вектора имеют вид

$$p(Z | H_0) = \int_{-\pi}^{+\pi} p(Z, \varphi | H_0) d\varphi, \quad (2.50)$$

$$p(Z | H_1) = \int_{-\pi}^{+\pi} p(Z, \varphi | H_1) d\varphi. \quad (2.51)$$

Т.к. между переменными Z_1 , Z_2 и переменными Z, φ имеется взаимнооднозначное соответствие (2.49), то соответствующие плотности вероятности с учетом (2.47), (2.48) имеет вид:

$$p(Z, \varphi | H_0) = p(z_1(Z, \varphi) | H_0) p(z_2(Z, \varphi) | H_0) J(Z, \varphi), \quad (2.52)$$

$$p(Z, \varphi | H_1) = p(z_1(Z, \varphi) | H_1) p(z_2(Z, \varphi) | H_1) J(Z, \varphi), \quad (2.53)$$

где $J(Z, \varphi)$ якобиан преобразования (2.49), который определяется следующим образом

$$J(Z, \varphi) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial Z_1(Z, \varphi)}{\partial Z} & \frac{\partial Z_1(Z, \varphi)}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial Z_2(Z, \varphi)}{\partial Z} & \frac{\partial Z_2(Z, \varphi)}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \quad (2.54)$$

$$= \det \begin{pmatrix} \cos \varphi & -Z \sin \varphi \\ \sin \varphi & Z \cos \varphi \end{pmatrix} = Z(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = Z$$

Подставляя полученные соотношения в (2.52), получим

$$p(Z, \varphi | H_0) = \frac{Z}{\left(\frac{N_0 E_s}{2}\right)} \exp \left\{ -\frac{Z^2}{2\left(\frac{N_0 E_s}{2}\right)} \right\}, \quad (2.55)$$

распределение Релея.

Подставляя соотношения (2.49) и (2.54) в (2.53), получим

$$p(Z, \varphi | H_1) = \frac{Z}{\pi N_0 E_s} \exp \left\{ -\frac{1}{N_0 E_s} \left[(Z \cos \varphi - E_s)^2 + (Z \sin \varphi)^2 \right] \right\} =$$

$$= \frac{Z}{\pi N_0 E_s} \exp \left\{ -\frac{1}{N_0 E_s} \left[Z^2 - 2Z E_s \cos \varphi + E_s^2 \right] \right\} =$$

$$= \frac{Z}{\pi N_0 E_s} \exp \left\{ -\frac{Z^2 + E_s^2}{N_0 E_s} \right\} \exp \left\{ \frac{2Z \cos \varphi}{N_0} \right\}. \quad (2.56)$$

В соответствии с (2.51)

$$p(Z | H_1) = \frac{2Z}{(N_0 E_s)} \exp \left\{ -\frac{Z^2 + E_s^2}{N_0 E_s} \right\} \cdot \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1}{2\pi} \exp \left\{ \frac{2Z}{N_0} \cos(\varphi) \right\} d\varphi =$$

$$= \frac{2Z}{(N_0 E_s)} \exp \left\{ -\frac{Z^2 + E_s^2}{N_0 E_s} \right\} I_0 \left(\frac{2Z}{N_0} \right). \quad (2.57)$$

Полученное распределение известно как обобщенное распределение Рэлея или распределение Райса.

Найдем вероятность ложной тревоги:

$$p_{лм} = \int_{Z_n}^{+\infty} p(Z | H_0) dZ = \int_{Z_n}^{+\infty} \frac{2Z}{N_0 E_s} e^{-\frac{Z^2}{N_0 E_s}} dZ = e^{-\frac{h^2}{2}}, \quad (2.58)$$

где $h = \frac{Z_n}{\sqrt{\frac{N_0 E_s}{2}}}$ - модифицированный порог.

Теперь найдем вероятность пропуска цели:

$$p_{nu} = \int_{-\infty}^{Z_n} p(Z|H_1) dz = \int_{-\infty}^{Z_n} \frac{2Z}{N_0 E_s} \exp\left\{-\frac{Z^2 + E_s^2}{N_0 E_s}\right\} I_0\left(\frac{2Z}{N_0}\right) dZ = Q(h, q), \quad (2.59)$$

где $q = \sqrt{\frac{2E_s}{N_0}}$ - коэффициент различимости, h - модифицированный порог, $Q(h, q)$ - Q -функция Маркума или интегральное распределение Релея–Райса, заданное выражением

$$Q(h, q) = \int_0^h t \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}(t^2 + q^2)\right\} I_0(tq) dt. \quad (2.60)$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Обнаружение сигналов со случайной фазой сводится к вычислению модуля комплексного корреляционного интеграла и сравнению полученной величины с порогом. Структурная схема некогерентного обнаружителя предполагает наличие 2-х квадратурных каналов обработки, корреляторов в каждом из них, устройств вычисления модуля и принятия решений.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что такое квадратурный приемник и где он применяется?
2. Чем определяется помехоустойчивость обнаружителя сигнала с неопределенной фазой на фоне аддитивного белого гауссовского шума?
3. Каковы причины возникновения неопределенности фазы сигнала в РТС?
4. Как влияют на помехоустойчивость обнаружителя наличие у обнаруживаемого сигнала неопределенного параметра?
5. Какова схема приемника, оптимального для обнаружения сигнала с неопределенной фазой?

ЛЕКЦИЯ №6. Постановка задачи оценивания параметров сигналов. Байесовские оценки случайных параметров сигналов при различных функциях потерь.

3. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ОЦЕНИВАНИЯ И ФИЛЬТРАЦИИ ПАРАМЕТРОВ СИГНАЛОВ

3.1. ТЕОРИЯ ОЦЕНИВАНИЯ ПАРАМЕТРОВ СИГНАЛОВ

Задача оценки параметров сигнала – это задача принятия оптимального решения о значении одного или нескольких параметров сигнала известной формы, имеющего также один или несколько неизвестных (“мешающих”) параметров на фоне помех.

Наблюдаемый сигнал можно описать следующим образом

$$x(t) = \Phi(s(t, \lambda, \theta), n(t)), \quad (3.1)$$

где $n(t)$ - помеха, $s(t, \lambda, \theta)$ - информационный сигнал известной формы, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)^T$ - вектор информационных параметров, $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_m)^T$ - вектор мешающих параметров, $\Phi(\bullet, \bullet)$ - механизм взаимодействия информационного сигнала с помехой.

В частном случае, когда механизм взаимодействия сигнала и помехи аддитивный, модель наблюдаемого сигнала можно записать:

$$x(t) = s(t, \lambda, \theta) + n(t). \quad (3.2)$$

Задача оценки параметров предполагает, что как вектор λ , так и θ не меняется на интервале наблюдения $[0, T]$, т.е. являются постоянными, но неизвестными на приемной стороне параметрами.

В случае, когда вектор λ зависит от времени на интервале наблюдения, то задача оценивания таких параметров называется задачей фильтрации.

3.1.1. Байесовские оценки случайных параметров

В рамках байесовского подхода предполагается, что подлежащие оценке информационные и мешающие параметры сигнала являются случайными величинами.

Рассмотрим вначале задачу оценки одного параметра сигнала известной формы $s(t, \lambda)$. Наблюдаемый сигнал $x(t) = \Phi(s(t, \lambda), n(t))$, обозначаемый также как $x \in \mathbf{X}$, где \mathbf{X} - пространство наблюдаемых сигналов. Параметр сигнала λ является случайной величиной, характеризуемой плотностью распределения $p(\lambda)$.

Также как и ранее будем полагать, что в зависимости от вида пространства наблюдаемых сигналов принятый сигнал x и передаваемый s могут быть элементами n -мерных пространств \mathbf{R}^n или \mathbf{C}^n или

функционального пространства \mathbf{L} .

Пусть оцениваемый параметр λ принимает N дискретных значений $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ равномерно с шагом $\Delta\lambda$. Тогда задача оценки этих параметров является эквивалентом задачи различения N сигналов вида:

$$\begin{aligned} s_1(t) &= s(t, \lambda), \\ s_2(t) &= s(t, \lambda_2), \\ &\dots \\ s_N(t) &= s(t, \lambda_N). \end{aligned} \quad (3.3)$$

В этом случае, очевидно, что в соответствии с (2.18)

$$\Delta\lambda \hat{k} = \hat{\lambda}_k = \arg \min_l \sum_{i=1}^N R_{il} \mathbf{P}\{H_i\} p(x|H_i), \quad (3.4)$$

где H_i - гипотеза о наличии в наблюдаемой смеси сигнала $s_i(t) = s(t, \lambda_i)$, $\mathbf{P}\{H_i\} \approx p(\lambda_i) \Delta\lambda$ - априорная вероятность справедливости гипотезы H_i , $p(x|H_i)$ - условная плотность вероятности наблюдаемого сигнала $x \in \mathbf{X}$.

Проведем следующие формальные преобразования в (3.4)

$$\hat{\lambda}_k = \arg \min_j \sum_{i=1}^N R_{ij} p(x, H_i) = \arg \min_j \sum_{i=1}^N r(\Delta\lambda \cdot i, \Delta\lambda \cdot j) p(x, \Delta\lambda \cdot i). \quad (3.5)$$

где $r(\bullet, \bullet)$ - непрерывная функция риска 2-х переменных, такая что $r(\Delta\lambda \cdot i, \Delta\lambda \cdot j) = R_{ij}$, $p(x, H_i)$ - совместная плотность вероятности наблюдаемого сигнала и гипотезы H_i и соответствующая ей форма записи $p(x, \Delta\lambda \cdot i)$.

Т.к. $\lambda_i = \Delta\lambda \cdot i$, получим

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}_k &= \arg \min_{\lambda_j} \sum_{i=1}^N r(\lambda_i, \lambda_j) p(\lambda_i|x) p(x) \frac{1}{\Delta\lambda} \Delta\lambda = \\ &= \arg \min_{\lambda_j} \sum_{i=1}^N r(\lambda_i, \lambda_j) p(\lambda_i|x) \Delta\lambda. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Рассмотрим теперь случай параметра, принимающего значения на множестве \mathbf{R} , для этого перейдем к пределу в (3.6) при $N \rightarrow \infty$ и $\Delta\lambda \rightarrow 0$. Будем рассматривать случай, когда интегральная сумма

$\sum_{i=1}^N r(\lambda_i, \lambda_j) p(\lambda_i|x) \Delta\lambda$ сходится к интегралу по λ . Тогда (3.6) примет вид

$$\hat{\lambda} = \arg \min_{\lambda_0} \int_{D_\lambda} r(\lambda, \lambda_0) p(\lambda|x) d\lambda, \quad (3.7)$$

где D_λ - область определения параметра параметра λ , $p(\lambda|x)$ - апостериорная функция плотности вероятности измеряемого параметра λ

при условии, что принят сигнал x , $r(\lambda, \lambda_0)$ - функция риска (штрафа, стоимости). Эта функция показывает степень увеличения риска или штрафа между перебираемым в алгоритме (3.7) и истинным значением параметра. Алгоритм (3.7) называют иногда **алгоритмом минимума условного среднего риска**.

Выражение (3.7) описывает алгоритм вычисления оптимальной оценки параметра по наблюдаемому сигналу. Этот алгоритм эквивалентен алгоритму различения сигналов оптимальному по критерию минимуму апостериорного байесовского риска.

Апостериорная функция плотности вероятности измеряемого параметра характеризует вероятность конкретного значения случайного параметра λ для имеющейся реализации наблюдаемого сигнала x . Фактически апостериорная функция плотности характеризует информацию о параметре λ , содержащуюся в x .

Соотношения между апостериорной функцией плотности вероятности измеряемого параметра $p(\lambda|x)$ и априорной функцией плотности вероятности $p(\lambda)$ характеризуют эволюцию знаний об измеряемом параметре сигнала в процессе измерения (эксперимента).

При этом возможны два крайних случая: оправданный и неоправданный эксперимент. В последнем случае невозможно измерить параметр точнее чем это было известно до эксперимента, в случае оправданного эксперимента информация об измеряемом параметре в процессе измерения уточняется. Этот факт иллюстрирует следующий рисунок.

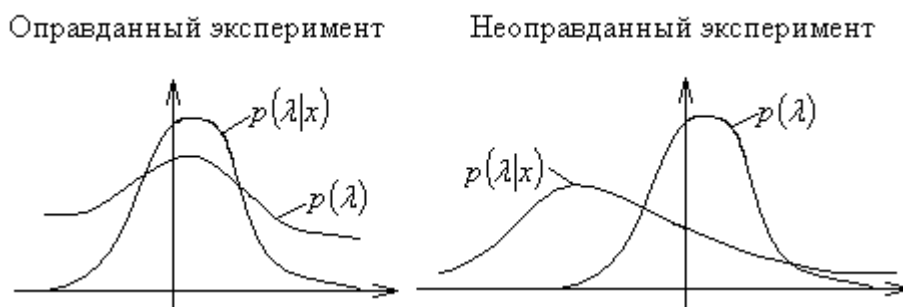


Рис.3.1. Соотношения между апостериорной и априорной функцией плотности вероятности измеряемого параметра.

Рассмотрим теперь алгоритмы оценки параметра сигнала, вытекающие из различных подходов к оценке качества измерения.

а) Квадратичная функция риска.

В этом случае $r(\lambda, \lambda_0) = (\lambda - \lambda_0)^2$.

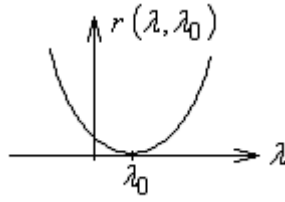


Рис.3.2. Вид квадратичной функции риска.

Алгоритм оценивания (3.7) примет вид

$$\hat{\lambda} = \arg \min_{\lambda_0} I(\lambda_0), \quad (3.8)$$

где

$$I(\lambda_0) = \int_{D_\lambda} (\lambda - \lambda_0)^2 p(\lambda|x) d\lambda.$$

Решение задачи (3.8) возможно в явном виде

$$\begin{aligned} \frac{dI(\lambda_0)}{d\lambda_0} &= - \int_{D_\lambda} 2(\lambda - \lambda_0) p(\lambda|x) d\lambda = 0, \\ -2 \int_{D_\lambda} \lambda \cdot p(\lambda|x) d\lambda + 2\lambda_0 \int_{D_\lambda} p(\lambda|x) d\lambda &= 0. \end{aligned}$$

Учитывая, что $\int_{D_\lambda} p(\lambda|x) d\lambda = 1$, λ_0 , при котором достигается минимум в

(3.8) может быть найдено в виде

$$\hat{\lambda} = \int_{D_\lambda} \lambda p(\lambda|x) d\lambda = \mathbf{M}\{(\lambda|x)\}. \quad (3.9)$$

Т.о. при использовании квадратичной функции потерь оптимальными свойствами обладает оценка равная апостериорному математическому ожиданию или математическому ожиданию случайного параметра λ после приема сигнала x .

б) Простая функция риска.

В этом случае $r(\lambda, \lambda_0) = 1 - \delta(\lambda - \lambda_0)$.

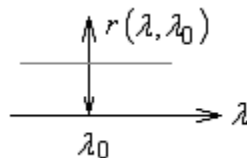


Рис.3.3. Вид простой функции риска.

Подставляя эту функцию в (3.7) получим

$$\hat{\lambda} = \arg \min_{\lambda_0} \left[1 - \int_{D_\lambda} \delta(\lambda - \lambda_0) p(\lambda|x) d\lambda \right], \quad (3.10)$$

$$\hat{\lambda} = \arg \max_{\lambda_0} p(\lambda_0|x). \quad (3.11)$$

Полученный алгоритм совпадает с алгоритмом максимума апостериорной вероятности (МАВ), который был получен ранее при решении задачи различения по критерию идеального наблюдателя. Из этого можно сделать вывод, что простая функция потерь является аналогом критерия идеального наблюдателя при решении задачи оценивания.

Т.о. для решения задачи оценивания параметра необходимо определить апостериорное распределение $p(\lambda|x)$. Обычно из условий задачи мы имеем статистическую модель взаимодействия сигнала и помехи. Из этой модели легко получить функционал плотности вероятности наблюдаемого сигнала x при условии фиксированного значения измеряемого параметра $p(\lambda|x)$, тогда

$$p(\lambda|x) = \frac{p(x|\lambda)p(\lambda)}{p(x)}. \quad (3.12)$$

Поскольку в (3.7) вычисляется аргумент минимума, то $p(x)$ не влияет на результат оценивания, тогда (3.12) можно записать в виде

$$p(\lambda|x) = \frac{1}{p(x)} p(x|\lambda)p(\lambda) = c \cdot p(x|\lambda)p(\lambda), \quad (3.13)$$

где $p(x|\lambda)$ - функционал правдоподобия, а $p(\lambda)$ - априорное распределение.

Таким образом, апостериорное распределение можно получить из функционала правдоподобия и априорного распределения. Т.е. байесовское оценивание приводит нас к необходимости знания априорного распределения для построения оптимальных оценок. Если априорное распределение неизвестно, то возникает так называемая **априорная неопределенность** байесовского оценивания.

В большинстве практических приложений мы сталкиваемся с неопределенностью относительно априорного распределения. Из этого положения можно выйти следующими способами: 1) допущение оправданного эксперимента; 2) минимаксный подход; 3) точечное оценивание.

В рамках оправданного эксперимента априорная плотность значительно шире апостериорного распределения. Это случай характерен для РТС имеющих обычно высокую точность измерения параметров. В этом случае в области максимума апостериорного распределения априорное распределение можно считать константой. Тогда алгоритм МАВ, например, эквивалентен алгоритму максимума правдоподобия (МП), действительно

$$\hat{\lambda} = \arg \max_{\lambda_0} p(\lambda_0|x) = \arg \max_{\lambda_0} [p(x|\lambda) \cdot const] = \max_{\lambda_0} p(x|\lambda_0). \quad (3.14)$$

Алгоритм минимума условного среднего риска соответственно имеет вид

$$\hat{\lambda} = \int_{D_{\lambda}} p(x|\lambda) d\lambda. \quad (3.15)$$

В рамках минимаксного подхода оптимальная оценка определяется в виде

$$\hat{\lambda} = \arg \min_{\lambda_0} \max_{p(\lambda)} \int_{D_{\lambda}} r(\lambda, \lambda_0) p(x|\lambda) p(\lambda) d\lambda. \quad (3.16)$$

В рамках теории точечного оценивания изначально отказываются от случайности измеряемых параметров. Случайными являются наблюдаемые сигналы, получаемые оценки, но не истинные значения измеряемых величин. При таком подходе априорная проблема не возникает по определению.

Обобщим теперь полученные байесовские алгоритмы на случай наличия нескольких измеряемых и мешающих параметров. Алгоритм минимума условного риска (3.7) имеет вид

$$\hat{\lambda} = \arg \min_{\lambda_0} \int_{D_{\lambda}} \int_{D_{\theta}} r(\lambda, \lambda_0) p(\lambda, \theta|x) d\lambda d\theta \quad (3.17)$$

где D_{λ} и D_{θ} – области определения информационных и мешающих параметров соответственно.

Алгоритмы МАВ и МП соответственно

$$\hat{\lambda} = \arg \max_{\lambda_0} \int_{D_{\theta}} p(\lambda_0, \theta|x) d\theta, \quad (3.18)$$

$$\hat{\lambda} = \arg \max_{\lambda_0} \int_{D_{\theta}} p(x, \theta|\lambda_0) d\theta. \quad (3.19)$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Задача оценивания параметров сигналов предполагает принятие оптимального решения о значении одного или нескольких параметров сигнала известной формы, имеющего также один или несколько неизвестных (“мешающих”) параметров на фоне помех. Байесовские оценки случайных параметров сигналов при различных функциях потерь предполагают вычисление параметров апостериорной плотности измеряемого параметра.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что в СТРС понимают под задачей оценки параметров сигнала?
2. В чем суть байесовского подхода к оцениванию параметров?
3. Что характеризует отличие апостериорной функции плотности

- вероятности измеряемого параметра от его априорной плотности?
4. Какой алгоритм оценивания оптимален при квадратичной функции стоимости?
 5. Какова функция стоимости в алгоритме максимума апостериорной вероятности?
 6. Объясните суть «априорной проблемы» в байесовском оценивании параметров сигналов?

ЛЕКЦИЯ №7. Теория несмещенных оценок. Граница Рао-Крамера. Информационная матрица Фишера. Свойства оценок максимального правдоподобия. Определение погрешности оценивания параметров на фоне БГШ. Функция неопределенности сигнала.

3.1.2. Элементы теории точечного оценивания

В рамках байесовской теории к оптимальным оценкам предъявляется требование минимума среднего риска. В теории точечного оценивания к оценкам предъявляются два требования: несмещенность и минимум условной дисперсии оценки.

Рассмотрим случай оценки одного вещественного параметра λ . При измерении какого либо параметра естественно требовать минимального значения систематической погрешности, это требование эквивалентно свойству **несмещенности оценки**, которое означает:

$$\mathbf{M}\{\hat{\lambda}(x)\} = \lambda, \quad (3.20)$$

где λ - истинное значение параметра, $\hat{\lambda}(x)$ - оценка, как функция наблюдаемого сигнала. То есть несмещенность, это когда математическое ожидание оценки совпадает с истинным значением параметра.

Очевидно, что только свойства несмещенности недостаточно для построения хороших оценок. При измерении какого-либо параметра естественно минимизировать флуктуационную составляющую погрешности, т.е. разброс оценок относительно истинного значения. Это требование называют **эффективностью оценки**

$$\mathbf{D}\{\hat{\lambda}|\lambda\} = \min_{\hat{\lambda}(x)} \int_x (\hat{\lambda}(x) - \mathbf{M}\{\hat{\lambda}(x)\})^2 p(x|\lambda) dx. \quad (3.21)$$

Другими словами условная дисперсия эффективной оценки должна быть минимально возможной среди всех оценок.

В принципе для построения оценок требований эффективности и несмещенности достаточно. Иногда требования к хорошей оценке можно ужесточить, потребовав стремления погрешности оценки к нулю при неограниченном увеличении времени измерений, количества экспериментов, отношения сигнал-помеха и т.п.

Для фиксированных объема выборки, уровня шума, количества реализаций, погрешность оценивания, очевидно, не может быть равна нулю. В этом случае важно оценить значение минимально достижимой погрешности. Ответ на этот вопрос дает **неравенство (граница) Рао – Крамера**.

Получим это неравенство, проведя следующие рассуждения. Следствием несмещенности оценки является соотношение

$$\mathbf{M}\{\hat{\lambda} - \lambda\} = \int_x (\hat{\lambda}(x) - \lambda) p(x|\lambda) dx = 0. \quad (3.22)$$

Продифференцируем это выражение по λ , получим

$$\int_{\mathbf{X}} (-1)p(x|\lambda)dx + \int_{\mathbf{X}} (\hat{\lambda}(x) - \lambda) \frac{d}{d\lambda} p(x|\lambda)dx = 0, \quad (3.23)$$

$$\int_{\mathbf{X}} (\hat{\lambda}(x) - \lambda) \frac{d}{d\lambda} p(x|\lambda)dx = 1. \quad (3.24)$$

Заметим, что

$$\frac{d}{d\lambda} p(x|\lambda) = \frac{d}{d\lambda} \ln(p(x|\lambda)) \cdot p(x|\lambda), \quad (3.25)$$

тогда

$$\int_{\mathbf{X}} (\hat{\lambda}(x) - \lambda) \left(\frac{d}{d\lambda} \ln p(x|\lambda) \right) p(x|\lambda) dx = 1. \quad (3.26)$$

Введем обозначения $\xi = (\hat{\lambda}(x) - \lambda)$, $\eta = \frac{d}{dx} \ln p(x|\lambda)$ - случайные величины, тогда

$$\mathbf{M}\{\xi \cdot \eta\} = 1. \quad (3.27)$$

Воспользуемся неравенством для ковариации двух случайных величин

$$|\mathbf{M}\{\xi \cdot \eta\}|^2 \leq \mathbf{M}\{\xi^2\} \mathbf{M}\{\eta^2\}, \quad (3.28)$$

тогда

$$\mathbf{D}\{\hat{\lambda}|\lambda\} = \mathbf{D}\{(\hat{\lambda}(x) - \lambda)\} \geq \frac{1}{\mathbf{M}\left\{\left(\frac{d}{d\lambda} \ln(p(x|\lambda))\right)^2\right\}}. \quad (3.29)$$

Полученное неравенство называют границей Рао–Крамера. Граница Рао – Крамера дает минимальное значение возможной погрешности для любых несмещенных оценок измеряемого параметра. Для эффективной оценки в соответствии с определением неравенство Рао – Крамера превращается в равенство.

Неравенство Рао–Крамера можно записать несколько в иной форме. Для этого выражение $\int_{\mathbf{X}} p(x|\lambda)dx = 1$ продифференцируем по λ , с учетом

(3.25) получим

$$\int_{\mathbf{X}} \left(\frac{d}{d\lambda} p(x|\lambda) \right) dx = \int_{\mathbf{X}} \left(\frac{d}{d\lambda} \ln p(x|\lambda) \right) p(x|\lambda) dx = 0. \quad (3.30)$$

Продифференцируем последнее выражение по λ :

$$\int_{\mathbf{X}} \left(\frac{d^2}{d\lambda^2} \ln p(x|\lambda) \right) p(x|\lambda) dx + \int_{\mathbf{X}} \left(\frac{d}{d\lambda} \ln p(x|\lambda) \right) \frac{d}{d\lambda} p(x|\lambda) dx = 0, \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\left\{\frac{d^2}{d\lambda^2}\ln p(x|\lambda)\right\} &= -\int_{\mathbf{x}}\left(\frac{d}{d\lambda}\ln p(x|\lambda)\right)\left(\frac{d}{d\lambda}\ln(p(x|\lambda))\right)p(x|\lambda)dx = \\ &= -\mathbf{M}\left\{\left(\frac{d}{d\lambda}\ln p(x|\lambda)\right)^2\right\}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Тогда

$$\mathbf{D}\{\hat{\lambda}|\lambda\} \geq \frac{1}{-\mathbf{M}\left\{\frac{d^2}{d\lambda^2}\ln(p(x|\lambda))\right\}}. \quad (3.33)$$

Величину в знаменателе правой части неравенства (3.33) и (3.29) называют **информацией Фишера**, и обозначают $\Phi(\lambda)$. Т.о. смысл границы Рао – Крамера заключается в том, что не существует несмещенной оценки, погрешность которой меньше величины, обратной информации Фишера.

Для случая векторного измеряемого параметра $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)^T$ требования несмещенности и эффективности имеют вид

$$\mathbf{M}\{\hat{\lambda}(x)\} = \lambda, \quad (3.34)$$

$$\mathbf{D}\{\hat{\lambda}_i(x)|\lambda\} = \min_{\hat{\lambda}(x)} \int_{\mathbf{x}} (\hat{\lambda}(x) - \mathbf{M}\{\hat{\lambda}(x)\})^2 p(x|\lambda) dx, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.35)$$

Для погрешностей оценок справедливы неравенства Рао-Крамера в виде

$$\mathbf{D}\{\hat{\lambda}_i(x)|\lambda\} \geq \Phi_{ii}^{-1}(\lambda), \quad (3.36)$$

где $\Phi_{ii}^{-1}(\lambda)$ - элементы матрицы, обратной **информационной матрице Фишера** $\Phi(\lambda)$, коэффициенты которой $\Phi_{ij}(\lambda)$ определяются в виде

$$\begin{aligned} \Phi_{ij}(\lambda) &= \mathbf{M}\left\{\frac{\partial}{\partial\lambda_i}\ln(p(x|\lambda))\frac{\partial}{\partial\lambda_j}\ln(p(x|\lambda))\right\} = \\ &= -\mathbf{M}\left\{\frac{\partial^2}{\partial\lambda_i\partial\lambda_j}(\ln(p(x|\lambda)))\right\} \end{aligned} \quad (3.37)$$

Докажем справедливость неравенства (3.36). Для этого заметим, что из (3.34) следует следующее выражение

$$\int_{\mathbf{x}} \hat{\lambda}_i(x) p(x|\lambda) dx = \lambda_i. \quad (3.38)$$

Дифференцируя выражение (3.38) по λ_j и используя (3.25), получим

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{x}} \hat{\lambda}_i(x) \frac{\partial}{\partial \lambda_j} p(x|\boldsymbol{\lambda}) dx &= \delta_{ij}, \\
\int_{\mathbf{x}} \hat{\lambda}_i(x) \frac{\partial}{\partial \lambda_j} \ln(p(x|\boldsymbol{\lambda})) p(x|\boldsymbol{\lambda}) dx &= \delta_{ij}, \\
\mathbf{M} \left\{ \hat{\lambda}_i(x) \frac{\partial}{\partial \lambda_j} \ln(p(x|\boldsymbol{\lambda})) \right\} &= \delta_{ij}, \\
\delta_{ij} &= \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}.
\end{aligned} \tag{3.39}$$

Определим случайный вектор

$$\mathbf{V} = \left(\hat{\lambda}_i(x) \quad \frac{\partial}{\partial \lambda_1} \ln(p(x|\boldsymbol{\lambda})) \quad \dots \quad \frac{\partial}{\partial \lambda_n} \ln(p(x|\boldsymbol{\lambda})) \right)^T. \tag{3.40}$$

Тогда ковариационная матрица вектора \mathbf{V} имеет вид

$$\mathbf{R} = \mathbf{M} \{ \mathbf{V} \mathbf{V}^T \} = \begin{pmatrix} \mathbf{D} \{ \hat{\lambda}_i(x) | \boldsymbol{\lambda} \} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \Phi_{11}(\boldsymbol{\lambda}) & \dots & \Phi_{1n}(\boldsymbol{\lambda}) \\ 0 & \Phi_{21}(\boldsymbol{\lambda}) & \dots & \Phi_{2n}(\boldsymbol{\lambda}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \Phi_{n1}(\boldsymbol{\lambda}) & \dots & \Phi_{nn}(\boldsymbol{\lambda}) \end{pmatrix}. \tag{3.41}$$

Матрица \mathbf{R} , как и любая ковариационная матрица, неотрицательно определена. Это означает, что

$$\det(\mathbf{R}) \geq 0. \tag{3.42}$$

Вычислим определитель матрицы \mathbf{R} , воспользовавшись свойством разложения определителя по элементам первой строки, получим

$$\det(\mathbf{R}) = \mathbf{D} \{ \hat{\lambda}_i(x) | \boldsymbol{\lambda} \} \det(\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\lambda})) - \det(\boldsymbol{\Phi}_{11}(\boldsymbol{\lambda})) \geq 0, \tag{3.43}$$

где $\boldsymbol{\Phi}_{11}(\boldsymbol{\lambda})$ - алгебраическое дополнение элемента $\Phi_{11}(\boldsymbol{\lambda})$. Тогда из (3.43) непосредственно следует

$$\mathbf{D} \{ \hat{\lambda}_i(x) | \boldsymbol{\lambda} \} \geq \frac{\det(\boldsymbol{\Phi}_{11}(\boldsymbol{\lambda}))}{\det(\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\lambda}))} = \Phi_{11}^{-1}(\boldsymbol{\lambda}). \tag{3.44}$$

Очевидно, что подобные рассуждения можно повторить для любого i . Т.о. неравенство (3.36) доказано.

К сожалению, теория точечного оценивания не дает простых способов синтеза оптимальных алгоритмов оценивания. В этом случае пользуются квазиоптимальными схемами оценивания, контролируя их погрешность в разумных пределах, обусловленных спецификой задачи. При этом требования несмещенности и эффективности рассматриваются как некое предельное состояние.

Данным свойствам удовлетворяют оценки максимального правдоподобия (3.14). В теории точечного оценивания доказано, что если функция правдоподобия дифференцируема по измеряемым параметрам, то оценки максимального правдоподобия асимптотические несмещенные, эффективные и байесовские. Эти свойства обуславливают широкие применения МП оценок в СТРС.

При наличии у сигнала мешающих параметров оценки максимального правдоподобия можно получить различными способами.

Если мешающие параметры сигнала являются случайными величинами то в соответствии с (3.19) оценка МП имеет вид

$$\hat{\lambda} = \arg \max_{\lambda_0} \int_{D_{\theta}} p(x|\theta, \lambda_0) p(\theta) d\theta. \quad (3.45)$$

Исходя из условий задачи (конкретного вида модели взаимодействия сигнала и шума) часто легко записать функционал правдоподобия $p(x|\lambda, \theta)$. Это означает, что можно одновременно получить МП оценки информационных и мешающих параметров, а затем данные о значении мешающих параметров не использовать, тогда алгоритм оценки можно записать в виде

$$\hat{\lambda} = \arg \max_{\lambda, \theta} p(x|\lambda, \theta). \quad (3.46)$$

Если возможно, каким либо способом получить МП оценки мешающих параметров, то используют так называемую схему адаптивного байесовского оценивания в виде

$$\hat{\lambda} = \arg \max_{\lambda} p(x|\lambda, \hat{\theta}). \quad (3.47)$$

3.2. ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ СИГНАЛА, НАБЛЮДАЕМОГО НА ФОНЕ АДДИТИВНОГО БЕЛОГО ГАУССОВСКОГО ШУМА

Рассмотрим случай, когда наблюдаемый сигнал имеет вид

$$x(t) = s(t, \lambda) + n(t), \quad (3.53)$$

где λ - неизвестный параметр, $n(t)$ - белый гауссовский шум.

Оценка МП имеет вид

$$\hat{\lambda} = \arg \max_{\lambda_0} p(x|\lambda_0), \quad x \in \mathbf{X} = \mathbf{L}_2 \quad (3.54)$$

Используя (2.24) получим функционал правдоподобия в виде

$$p(x|\lambda) = c \cdot \exp \left(-\frac{1}{N_0} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} (x(t) - s(t, \lambda))^2 dt \right] \right), \quad (3.55)$$

$$p(x|\lambda) = c \cdot \exp \left(-\frac{1}{N_0} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)^2 dt - 2 \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) s(t, \lambda) dt + \int_{-\infty}^{+\infty} s^2(t, \lambda) dt \right] \right). \quad (3.56)$$

Используя обозначения

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)^2 dt, \quad Z(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)s(t, \lambda) dt, \quad (3.57)$$

$$E(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} s^2(t, \lambda) dt,$$

алгоритм максимального правдоподобия можно записать в виде

$$\hat{\lambda} = \arg \max_{\lambda_0} \left[-\frac{E_x}{N_0} + \frac{2}{N_0} Z(\lambda_0) - \frac{E(\lambda_0)}{N_0} \right] =$$

$$= \arg \max_{\lambda_0} \left[\frac{2}{N_0} Z(\lambda_0) - \frac{E(\lambda_0)}{N_0} \right]. \quad (3.58)$$

Параметр λ называется **энергетическим**, если энергия сигнала является функцией информационного параметра λ , в остальных случаях параметр λ называют неэнергетическим.

Энергетическими параметрами являются амплитуда сигнала, длительность сигнала, полоса частот. Неэнергетические – это средняя частота сигнала, начальная фаза сигнала, временная задержка.

Для неэнергетического параметра алгоритм оценки максимального правдоподобия сводится в соответствии с (3.58) к максимизации значения корреляционного интеграла, т.е.

$$\hat{\lambda} = \arg \max_{\lambda_0} Z(\lambda_0). \quad (3.59)$$

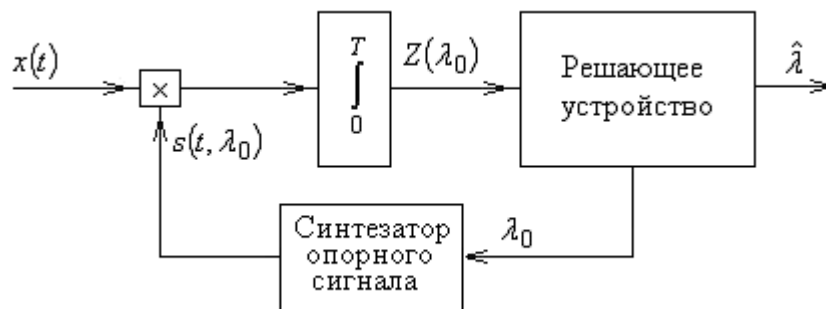


Рис.3.4. Структурная схема устройства оценки неэнергетического параметра сигнала на фоне белого шума.

На Рис.3.4 показана структурная схема устройства оценки неэнергетического параметра сигнала на фоне белого шума.

Решающее устройство на схеме вычисляет опорное значение параметра для работы коррелятора и принимает решение о значении опорного параметра, при котором достигается максимум корреляционного интеграла.

Рассмотрим случай наличия мешающего параметра. Пусть мешающий параметр φ - начальная фаза сигнала, тогда

$$x(t) = s(t, \lambda, \varphi) + n(t), \quad (3.60)$$

где $s(t, \lambda, \varphi) = \text{Re}[\dot{S}(t, \lambda) \cdot e^{j\omega_0 t + \varphi}]$, $\dot{S}(t, \lambda)$ - комплексная огибающая сигнала $s(t, \lambda, \varphi)$, φ - случайная фаза, равномерно распределенная на интервале $(-\pi; \pi)$.

Тогда функционал правдоподобия

$$p(x|\lambda, \varphi) = c \cdot \exp\left\{-\frac{1}{N_0} [E_x - 2Z(\lambda, \varphi) + E(\lambda)]\right\} = c \cdot e^{-\frac{E_x}{N_0}} e^{\frac{2}{N_0} \left(Z(\lambda, \varphi) - \frac{E(\lambda)}{2}\right)}. \quad (3.61)$$

Интегрируя по мешающему параметру, получим

$$\begin{aligned} p(x|\lambda) &= c \cdot e^{-\frac{E_x}{N_0}} \cdot e^{-\frac{E(\lambda)}{N_0}} \cdot \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1}{2\pi} e^{\frac{2}{N_0} Z(\lambda, \varphi)} d\varphi = \\ &= c \cdot e^{-\frac{E_x - E(\lambda)}{N_0}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{\frac{2}{N_0} |\dot{Z}(\lambda) \cos(\arg \dot{Z}(\lambda) - \varphi)|} d\varphi. \end{aligned} \quad (3.62)$$

Алгоритм оценивания в случае случайной начальной фазы имеет вид

$$\hat{\lambda} = \arg \max_{\lambda_0} p(x|\lambda_0) = \arg \max_{\lambda_0} I_0 \left(\frac{2|\dot{Z}(\lambda)|}{N_0} \right) \cdot \exp\left\{-\frac{E(\lambda)}{N_0}\right\}, \quad (3.63)$$

где $\dot{Z}(\lambda) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} X^*(t) \dot{S}(t, \lambda) dt$, $\dot{X}(t)$ - комплексная огибающая наблюдаемого сигнала.

Для случая неэнергетического информационного параметра алгоритм приема сводится к виду

$$\hat{\lambda} = \arg \max_{\lambda_0} |\dot{Z}(\lambda_0)|. \quad (3.64)$$

Для вычисления комплексного корреляционного интеграла требуется квадратурный приемник.

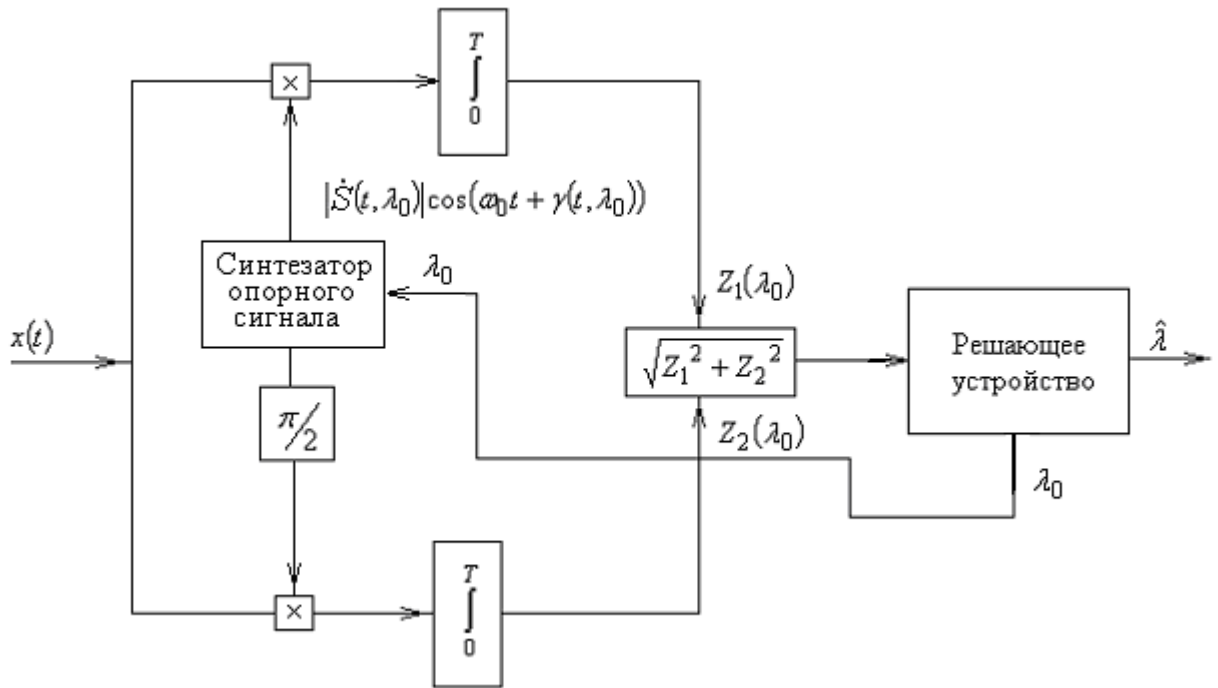


Рис.3.5. Структурная схема устройства оценки неэнергетического параметра сигнала со случайной фазой на фоне белого шума.

Рассмотрим теперь способы вычисления погрешности алгоритмов оценки параметров сигналов, наблюдаемых на фоне белого гауссовского шума. В СТРС обычно качество оценивания определяют, используя границу Рао – Крамера. Получаемые таким образом значения погрешности для оценок максимального правдоподобия являются потенциальными (асимптотическими), т.е. реальная погрешность алгоритма оценивания может быть только хуже. Для эффективных оценок погрешности, вычисленные по границе Рао – Крамера совпадают с реальной погрешностью.

Рассмотрим случай оценки векторного параметра $\lambda = (\lambda_1 \dots \lambda_n)^T$ сигнала $s(t, \lambda)$, наблюдаемого на фоне аддитивного белого гауссовского шума. В этом случае наблюдаемый сигнал имеет вид

$$x(t) = s(t, \lambda) + n(t). \quad (3.65)$$

Функционал правдоподобия можно записать в виде

$$p(x|\lambda) = c \cdot \exp \left\{ -\frac{E_x}{N_0} + \frac{2Z(\lambda)}{N_0} - \frac{E(\lambda)}{N_0} \right\}. \quad (3.66)$$

Алгоритм вычисления МП оценки имеет вид

$$\hat{\lambda} = \arg \max_{\lambda} p(x|\lambda) = \arg \max_{\lambda} \ln(p(x|\lambda)). \quad (3.67)$$

Вычислим значения информационной матрицы Фишера, подставляя (3.66) в (3.37) обозначая λ_0 - истинное значение вектора параметров

$$\Phi_{ij}(\lambda_0) = -\mathbf{M} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j} \ln(p(x|\lambda)) \right\} = -\mathbf{M} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j} \left[\frac{2Z(\lambda)}{N_0} - \frac{E(\lambda)}{N_0} \right] \right\}. \quad (3.68)$$

В случае неэнергетических параметров, у которых $E(\lambda) = E$, получим

$$\begin{aligned} \Phi_{ij}(\lambda_0) &= -\mathbf{M} \left\{ \frac{2}{N_0} \frac{\partial^2}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j} Z(\lambda) \right\} = -\frac{2}{N_0} \frac{\partial^2}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j} \mathbf{M} \{ Z(\lambda) \} = \\ &= -\frac{2}{N_0} \frac{\partial^2}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{M} \{ x(t) \} s(t, \lambda) dt = -\frac{2}{N_0} \frac{\partial^2}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} s(t, \lambda_0) s(t, \lambda) dt \right) \Bigg|_{\lambda=\lambda_0} = \\ &= -\frac{2E}{N_0} \frac{\partial^2}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j} \frac{1}{E} \int_{-\infty}^{+\infty} s(t, \lambda_0) s(t, \lambda) dt \Bigg|_{\lambda=\lambda_0} = -q^2 \frac{\partial^2}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j} \Psi(\lambda, \lambda_0) \Big|_{\lambda=\lambda_0} \end{aligned} \quad (3.69)$$

где $q = \sqrt{\frac{2E}{N_0}}$, $\Psi(\lambda, \lambda_0)$ - функция неопределенности сигнала $s(t, \lambda)$.

$$\Psi(\lambda, \lambda_0) = \frac{1}{E} \int_{-\infty}^{+\infty} s(t, \lambda_0) s(t, \lambda) dt, \quad (3.70)$$

Часто бывает, что функция неопределенности $\Psi(\lambda, \lambda_0)$ зависит только от разности $(\lambda - \lambda_0)$, в этом случае $\Phi(\lambda_0) = -q^2 \Psi''(0)$.

В случае оценивания одного параметра погрешность оценки λ определяется в виде

$$\mathbf{D} \{ \hat{\lambda} \} = \frac{1}{\Phi(\lambda_0)} = -\frac{1}{q^2 \Psi''(0)}. \quad (3.71)$$

Функция неопределенности определяется только свойствами сигнала и не зависит от шума и его характеристик. Поэтому функция неопределенности используется для классификации, изучения свойств сигналов, используемых для построения РТС.

В соответствии с (3.71) нижняя граница потенциальной погрешности алгоритма оценивания определяется двумя факторами отношением сигнал/шум и степенью остроты пика функции неопределенности в нуле.

Если анализировать реальную погрешность устройств, схемы которых показаны на Рис.3.5, Рис.3.4 и алгоритмов оценки (3.59) и (3.64) соответственно следует учитывать, что помимо ошибок, связанных с влиянием шума на оценку в области истинного значения параметра, на практике возможны ошибки, вызванные появлением на входе решающего устройства нескольких локальных максимумов корреляционного интеграла, вызванных выбросами шума. При этом решающее устройство будет совершать так называемые **аномальные ошибки**. Т.е. решающее устройство будет принимать решения в пользу совершенно далекого от истинного значения измеряемой величины.

Эта ситуация возможна только при относительно низком отношении сигнал-помеха. В этом случае формулы, основанные на границе Рао-Крамера, будут существенно занижать истинное значение погрешности.

Т.о. формула (3.71), как и другие формулы, основанные на границе Рао-Крамера, характеризуют погрешность МП оценок параметров сигналов на фоне аддитивных шумов только при достаточно высоких отношениях сигнал-шум или при наличии в решающем устройстве достаточно подробной информации об измеряемой величине, т.е. когда вариация измеряемого параметра в устройстве обработки не выходит за ширину главного лепестка функции неопределенности сигнала. Как правило, для реальных РТС эти условия выполняются.

3.2.1. Оценка амплитуды детерминированного сигнала

Рассмотрим пример оценки амплитуды детерминированного сигнала $s(t)$. В этом случае наблюдаемый сигнал

$$x(t) = a \cdot s(t) + n(t), \quad (3.72)$$

Энергия сигнала $E(a) = a^2 E_s$, корреляционный интеграл $Z(a) = aZ$, тогда оценка МП имеет вид

$$\hat{a} = \arg \max_a \left[\exp \left\{ \frac{2aZ - a^2 E_s}{N_0} \right\} \right]. \quad (3.73)$$

Решая уравнение для максимума функции правдоподобия $\frac{\partial}{\partial a} \ln(p(x|a)) = 0$, получим

$$\frac{2Z}{N_0} - 2a \frac{E_s}{N_0} = 0,$$

отсюда

$$\hat{a} = \frac{Z}{E_s} = \frac{1}{E_s} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)s(t)dt. \quad (3.74)$$

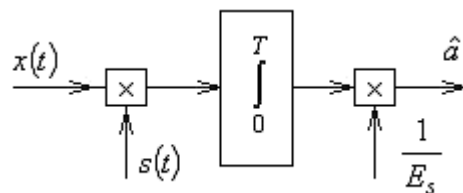


Рис.3.6. Структурная схема устройства оценки амплитуда сигнала на фоне белого шума.

Дисперсию оценки легко вычислить в виде

$$D\{\hat{a}|a\} = \frac{1}{E_s} \mathbf{M}\{(Z - M\{Z\})^2\} = \frac{1}{E_s^2} \frac{N_0 E_s}{2} = \frac{N_0}{2E_s} = \frac{1}{q^2}. \quad (3.75)$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Теория несмещенных оценок предполагает использование критериев несмещенности и эффективности для вычисляемых значений измеряемых параметров. Граница Рао-Крамера позволяет оценить потенциальную погрешность несмещенных оценок.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какие критерии для отбора оптимальных оценок используются в теории точечного оценивания?
2. Что такое граница Рао-Крамера?
3. Как с помощью информационной матрицы Фишера определить границу для погрешности одновременной оценки нескольких параметров сигнала?
4. Какими асимптотическими свойствами обладают оценки максимального правдоподобия?
5. Какие параметры сигнала называют энергетическими, а какие неэнергетическими?
6. Какие параметры сигнала называют мешающими?
7. Каков алгоритм оценки МП неэнергетического параметра сигнала, наблюдаемого на фоне БГШ.
8. Какова структурная схема алгоритма оценки МП неэнергетического параметра сигнала, наблюдаемого на фоне БГШ и имеющего неопределенную начальную фазу.
9. Как в СТРТС рассчитывают погрешность оценивания параметров?
10. Чем определяется потенциальная погрешность оценки параметров сигнала, наблюдаемого на фоне аддитивного БГШ?
11. Что такое функция неопределенности сигнала по параметру?
12. Чем определяется потенциальная погрешность оценки параметров сигнала со случайной фазой, наблюдаемого на фоне аддитивного БГШ?
13. Каков оптимальный алгоритм совместной оценки амплитуды и фазы сигнала на фоне БГШ.
14. Что такое аномальные ошибки в теории оценивания?

ЛЕКЦИЯ №8. Оценка комплексной амплитуды сигнала. Оценка времени запаздывания сигнала. Оценка частоты сигнала со случайной фазой. Совместная оценка времени запаздывания и частоты сигнала со случайной фазой. Расчет погрешности оценок.

3.2.2. Оценки амплитуды и фазы детерминированного сигнала

Рассмотрим пример совместной оценки амплитуды и фазы детерминированного сигнала $s(t)$. В этом случае наблюдаемый сигнал имеет вид

$$x(t) = s(t, a, \varphi) + n(t), \quad (3.76)$$

где $s(t, a, \varphi) = \operatorname{Re}[a\dot{S}(t) \cdot e^{j\omega_0 t + \varphi}]$, $\dot{S}(t)$ - комплексная огибающая сигнала, φ - начальная фаза, a - амплитуда сигнала.

Функционал правдоподобия имеет вид

$$p(x|a, \varphi) = c \cdot \exp\left\{-\frac{1}{N_0} [E_x - 2aZ(\varphi) + a^2 E_s]\right\}. \quad (3.77)$$

Используя ранее полученное соотношение $Z(\varphi) = |\dot{Z}| \cos(\varphi - \arg(\dot{Z}))$, получим алгоритм оценивания в виде

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{\varphi} \end{pmatrix} &= \arg \max_{a, \varphi} \left(c \cdot \exp\left\{-\frac{1}{N_0} [E_x - 2aZ(\varphi) + a^2 E_s]\right\} \right) = \\ &= \arg \max_{a, \varphi} \left(\exp\left\{-\frac{1}{N_0} [E_x - 2a|\dot{Z}| \cos(\varphi - \arg(\dot{Z})) + a^2 E_s]\right\} \right) = \\ &= \arg \max_{a, \varphi} \left([2a \cos(\varphi - \arg(\dot{Z})) - a^2 E_s] \right) = \\ &= \begin{pmatrix} |\dot{Z}| \frac{1}{E_s} \\ \arg(\dot{Z}) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.78)$$

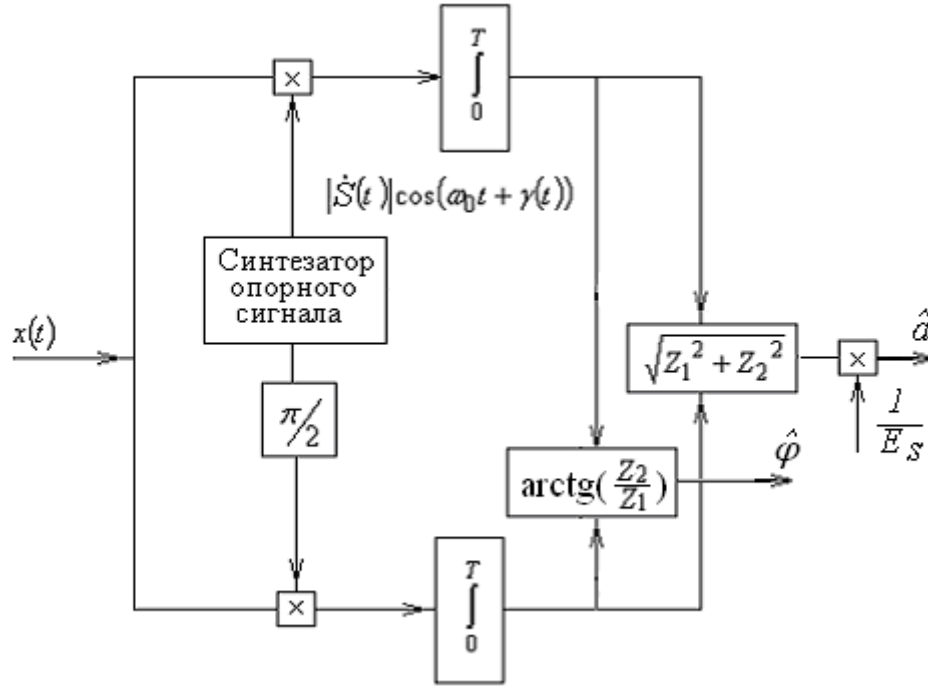


Рис.3.7. Структурная схема устройства совместной оценки амплитуды и фазы сигнала на фоне белого шума.

Определим погрешность совместного оценивания амплитуды и фазы сигнала. В соответствии с (3.78) запишем

$$\ln p(x|a, \varphi) = \ln(c) - \frac{E_x}{N_0} + \frac{2a|\dot{Z}|}{N_0} \cos(\varphi - \arg(\dot{Z})) - \frac{a^2 E_s}{N_0}. \quad (3.79)$$

Вычислим коэффициенты информационной матрицы Фишера

$$\begin{aligned} \Phi_{11} &= -\mathbf{M} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial a \partial a} \ln(p(x|a, \varphi)) \right\} = \frac{2E_s}{N_0} = q^2, \\ \Phi_{12} &= -\mathbf{M} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial a \partial \varphi} \ln(p(x|a, \varphi)) \right\} = \frac{-2}{N_0} \mathbf{M} \left\{ \frac{\partial}{\partial \varphi} |\dot{Z}| \cos(\varphi - \arg(\dot{Z})) \right\} = \\ &= \frac{-2}{N_0} \mathbf{M} \left\{ \dot{Z} \sin(\varphi - \arg(\dot{Z})) \right\} = \frac{-2}{N_0} \mathbf{M} \left\{ \text{Im}(\dot{Z} e^{j\varphi}) \right\} = \\ &= \frac{-2}{N_0} \mathbf{M} \left\{ \text{Im} \left(\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} X^*(t) \dot{S}(t) dt \cdot e^{j\varphi} \right) \right\} = \frac{-2}{N_0} \text{Im} \left(\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{M} \{ X^*(t) \} \dot{S}(t) dt \cdot e^{j\varphi} \right) = \\ &= \frac{-2a_0}{N_0} \text{Im} \left(\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |\dot{S}(t)|^2 dt \cdot e^{j\varphi - \varphi_0} \right) \Bigg|_{\varphi = \varphi_0} = \frac{-2a_0}{N_0} \text{Im}(E_s) = 0, \\ \Phi_{21} &= \Phi_{12} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi_{22} &= -\mathbf{M}\left\{\frac{\partial^2}{\partial\varphi\partial\varphi}\ln(p(x|a,\varphi))\right\} = \frac{-2a}{N_0}\mathbf{M}\left\{\frac{\partial}{\partial\varphi}|\dot{Z}|\sin(\varphi - \arg(\dot{Z}))\right\} = \\ &= \frac{2a}{N_0}\mathbf{M}\{\operatorname{Re}(\dot{Z}e^{j\varphi})\} = \frac{2aa_0}{N_0}\operatorname{Re}\left(\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}|\dot{S}(t)|^2 dt \cdot e^{j\varphi-\varphi_0}\right)\Bigg|_{\substack{\varphi=\varphi_0 \\ a=a_0}} = \frac{2a_0^2 E_s}{N_0} = a_0^2 q^2,\end{aligned}$$

где a_0, φ_0 - истинные значения амплитуды и фазы.

Таким образом, информационная матрица Фишера и ей обратная матрица имеют вид

$$\Phi(a_0, \varphi_0) = \begin{pmatrix} q^2 & 0 \\ 0 & a_0^2 q^2 \end{pmatrix}, \quad \Phi^{-1}(a_0, \varphi_0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{q^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_0^2 q^2} \end{pmatrix}. \quad (3.80)$$

Погрешность оценки амплитуды и фазы можно вычислить по формулам

$$\begin{aligned}\mathbf{D}\{\hat{a}|a_0, \varphi_0\} &= \frac{1}{q^2}, \\ \mathbf{D}\{\hat{\varphi}|a_0, \varphi_0\} &= \frac{1}{a_0^2 q^2}.\end{aligned} \quad (3.81)$$

3.2.3. Оценка времени запаздывания детерминированного сигнала

Рассмотрим случай оценки времени запаздывания детерминированного сигнала $s(t)$. В этом случае наблюдаемый сигнал имеет вид

$$x(t) = s(t - \tau) + n(t), \quad (3.82)$$

где τ - неизвестное время запаздывание сигнала. Очевидно, что время запаздывания является неэнергетическим параметром. В этом случае мы можем воспользоваться алгоритмом (3.59), т.е.

$$\hat{\tau} = \arg \max_{\tau} Z(\tau) = \arg \max_{\tau} \int_{-\infty}^{\infty} s(t - \tau)x(t)dt. \quad (3.83)$$

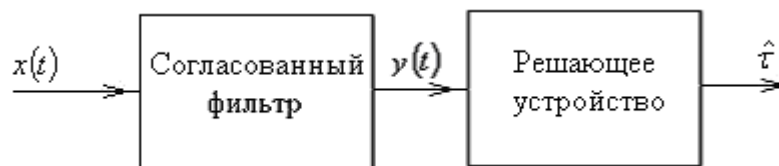


Рис.3.8. Структурная схема устройства оценки временной задержки сигнала на фоне белого шума.

Определим погрешность оценки задержки, используя формулу (3.71)

$$\mathbf{D}\{\hat{\tau}\} = -\frac{1}{q^2 \Psi''(0)}.$$

Вычислим вторую производную функции неопределенности (3.70), воспользовавшись спектральными представлениями сигналов

$$\begin{aligned} s(t) &\xrightarrow{\Phi} s(j\omega), \\ s(t - \tau) &\xrightarrow{\Phi} s(j\omega)e^{-j\omega\tau}, \\ \Psi(\tau) &= \frac{1}{E} \int_{-\infty}^{+\infty} s(t - \tau)s(t)dt. \end{aligned}$$

Воспользуемся равенством Рэлея для преобразования Фурье, тогда

$$\Psi(\tau) = \frac{1}{2\pi E} \int_{-\infty}^{+\infty} s^*(j\omega)e^{j\omega\tau} s(j\omega)d\omega = \frac{1}{2\pi E} \int_{-\infty}^{+\infty} |s(j\omega)|^2 e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (3.84)$$

Свойство дифференцирования оригинала дает возможность определить производные функции неопределенности в виде

$$\begin{aligned} \Psi'(\tau) &= \frac{1}{2\pi E} \int_{-\infty}^{+\infty} j\omega |s(j\omega)|^2 e^{j\omega\tau} d\omega, \\ \Psi''(\tau) &= \frac{-1}{2\pi E} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 |s(j\omega)|^2 e^{j\omega\tau} d\omega. \end{aligned}$$

Тогда

$$\Psi''(0) = \frac{-1}{2\pi E} \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 |s(j\omega)|^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{+\infty} |s(j\omega)|^2 d\omega} = -(\Delta\omega_{\text{эф}})^2, \quad (3.85)$$

где $\Delta\omega_{\text{эф}}$ - **эффективная полоса частот** сигнала. Если сигнал $s(t)$ - узкополосный, как, например, радиосигнал, то $\Delta\omega_{\text{эф}} \approx \omega_0$ - несущая частота радиосигнала. Если $s(t)$ - низкочастотный сигнал, например видеосигнал, то $\Delta\omega_{\text{эф}} \approx \Delta\omega$ - полоса частот видеосигнала.

Погрешность оценки времени запаздывания детерминированного сигнала имеет вид

$$\mathbf{D}\{\hat{\tau}\} = \frac{1}{q^2 (\Delta\omega_{\text{эф}})^2}. \quad (3.86)$$

3.2.4. Оценка времени запаздывания сигнала со случайной начальной фазой

Рассмотрим задачу оценки времени запаздывания сигнала со случайной

начальной фазой. В этом случае наблюдаемый сигнал имеет вид

$$x(t) = s(t - \tau, \varphi) + n(t), \quad (3.87)$$

где $s(t, \varphi) = \text{Re}[\dot{S}(t) \cdot e^{j\omega_0 t + \varphi}]$, $\dot{S}(t)$ - комплексная огибающая сигнала $s(t, \varphi)$, φ - случайная фаза, равномерно распределенная на интервале $(-\pi; \pi)$.

В соответствии с (3.64) алгоритм оценивания задержки сигнала можно записать в виде

$$\tau = \arg \max_{\tau_0} |\dot{Z}(\tau_0)| = \arg \max_{\tau_0} \left| \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} X^*(t) \dot{S}(t - \tau_0) dt \right|. \quad (3.88)$$

Структура измерителя соответствует схеме показанной на Рис.3.5. Определим погрешность измерителя.

$$\begin{aligned} \Phi(\tau_0) &= -\mathbf{M} \left\{ \left. \frac{d^2}{d\tau^2} \ln(p(x|\tau)) \right|_{\tau=\tau_0} \right\} = -\mathbf{M} \left\{ \left. \frac{d^2}{d\tau^2} \ln \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} p(x|\tau, \varphi) d\varphi \right) \right|_{\tau=\tau_0} \right\} = \\ &= -\mathbf{M} \left\{ \left. \frac{d^2}{d\tau^2} \left(I_0 \left(\frac{2|\dot{Z}(\tau)|}{N_0} \right) - \frac{E}{N_0} \right) \right|_{\tau=\tau_0} \right\} = -\mathbf{M} \left\{ \left. \frac{d^2}{d\tau^2} \left(I_0 \left(\frac{2|\dot{Z}(\tau)|}{N_0} \right) \right) \right|_{\tau=\tau_0} \right\}. \end{aligned} \quad (3.89)$$

Для случая достаточно высокого отношения сигнал-шум и $\tau \rightarrow \tau_0$ $\frac{2|\dot{Z}(\tau)|}{N_0} \gg 1$. Тогда $I_0(x) \approx x$ и (3.89) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \Phi(\tau_0) &= -\mathbf{M} \left\{ \left. \frac{d^2}{d\tau^2} \left(\frac{2|\dot{Z}(\tau)|}{N_0} \right) \right|_{\tau=\tau_0} \right\} = -\frac{2}{N_0} \frac{d^2}{d\tau^2} \left(\mathbf{M} \left\{ |\dot{Z}(\tau)| \right\} \right)_{\tau=\tau_0} = \\ &= -\frac{2E}{N_0} \frac{d^2}{d\tau^2} \left(\mathbf{M} \left\{ \left| \frac{1}{2E} \int_{-\infty}^{+\infty} S^*(t - \tau_0) \dot{S}(t - \tau) dt + \frac{1}{2E} \int_{-\infty}^{+\infty} N^*(t) \dot{S}(t - \tau) dt \right| \right\} \right)_{\tau=\tau_0} = \\ &= -\frac{2E}{N_0} \frac{d^2}{d\tau^2} \left(\mathbf{M} \left\{ \dot{\Psi}(\tau - \tau_0) + \dot{\Pi}(\tau) \right\} \right)_{\tau=\tau_0}, \end{aligned} \quad (3.90)$$

где $\dot{N}(t)$ - комплексная огибающая белого шума, $\dot{\Psi}(\tau - \tau_0)$ - комплексная функция неопределенности сигнала, характеризующая автокорреляцию комплексных огибающих сигнала.

Анализируя последнее выражение, заметим, что математическое ожидание вычисляется от суммы детерминированной компоненты $\dot{\Psi}(\tau - \tau_0)$, которая при $\tau \rightarrow \tau_0$ стремится к 1 и случайной компоненты

$\dot{\Pi}(\tau)$, дисперсия которой $\frac{N_0}{2E} \ll 1$.

Таким образом, при требовании высокого отношения сигнал-шум вклад шумового компонента в последнем выражении значительно меньше максимума функции неопределенности. Поэтому влияние случайной компоненты шума далее можно не учитывать. Тогда получим выражение для погрешности оценки в виде

$$\mathbf{D}\{\hat{\tau}\} = \frac{-1}{q^2 \frac{d^2}{d\tau^2} \left(|\dot{\Psi}(\tau - \tau_0)| \right) \Big|_{\tau=\tau_0}}, \quad (3.91)$$

где
$$\dot{\Psi}(\tau - \tau_0) = \frac{1}{2E} \int_{-\infty}^{+\infty} S^*(t - \tau_0) \dot{S}(t - \tau) dt. \quad (3.92)$$

Продифференцируем модуль комплексной функции неопределенности сигнала в точке $\tau = 0$.

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} |\dot{\Psi}(\tau)| &= \frac{\operatorname{Re}[\dot{\Psi}'(\tau) \Psi^*(\tau)]}{|\dot{\Psi}(\tau)|}, \\ \frac{d^2}{d\tau^2} |\dot{\Psi}(\tau)| &= \frac{\operatorname{Re}[\dot{\Psi}''(\tau) \Psi^*(\tau) + \dot{\Psi}'(\tau) \Psi'^*(\tau)]}{|\dot{\Psi}(\tau)|} + \frac{(\operatorname{Re}[\dot{\Psi}'(\tau) \Psi^*(\tau)])^2}{|\dot{\Psi}(\tau)|^3}, \\ \frac{d^2}{d\tau^2} |\dot{\Psi}(\tau)| \Big|_{\tau=0} &= \operatorname{Re}[\dot{\Psi}''(0)] + |\dot{\Psi}'(0)|^2. \end{aligned} \quad (3.93)$$

Используя свойства преобразования Фурье, получим

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\tau^2} |\dot{\Psi}(\tau)| \Big|_{\tau=0} &= \operatorname{Re} \left[\frac{-1}{4\pi E} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 |\dot{S}(j\omega)|^2 d\omega \right] + \left| \frac{-1}{4\pi E} \int_{-\infty}^{+\infty} j\omega |\dot{S}(j\omega)|^2 d\omega \right|^2 = \\ &= - \left(\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 |\dot{S}(j\omega)|^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{+\infty} |\dot{S}(j\omega)|^2 d\omega} - \left(\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \omega |\dot{S}(j\omega)|^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{+\infty} |\dot{S}(j\omega)|^2 d\omega} \right)^2 \right) = -(\Delta\Omega_{\varphi})^2 \end{aligned}$$

В этом выражении $\Delta\Omega_{\varphi}$ - эффективная полоса частот комплексной огибающей сигнала, тогда

$$\mathbf{D}\{\hat{\tau}\} = \frac{1}{q^2 (\Delta\Omega_{\varphi})^2}. \quad (3.94)$$

3.2.5. Оценка частотного сдвига сигнала со случайной начальной фазой

Рассмотрим задачу частотного сдвига сигнала со случайной начальной

фазой. В этом случае наблюдаемый сигнал имеет вид

$$x(t) = s(t, f, \varphi) + n(t), \quad (3.95)$$

где $s(t, f, \varphi) = \text{Re}[\dot{S}(t)e^{j(\omega_0 + 2\pi f)t + \varphi}]$, $\dot{S}(t)$ - комплексная огибающая сигнала $s(t)$, φ - случайная фаза, равномерно распределенная на интервале $(-\pi; \pi)$.

Частотный сдвиг является неэнергетическим параметром, тогда в соответствии с (3.64) алгоритм оценивания задержки сигнала можно записать в виде

$$\tau = \arg \max_{f_0} |\dot{Z}(f_0)| = \arg \max_{f_0} \left| \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} X^*(t) \dot{S}(t) e^{j2\pi f_0 t} dt \right|. \quad (3.96)$$

Структура измерителя соответствует схеме показанной на Рис.3.5. Определим погрешность измерителя, следуя той же последовательности действий, что и при анализе погрешности измерителя задержки

$$\Phi(f_0) = -\mathbf{M} \left\{ \frac{d^2}{df^2} \left(I_0 \left(\frac{2|\dot{Z}(f)|}{N_0} \right) \right) \right\}_{f=f_0}. \quad (3.97)$$

Для случая достаточно высокого отношения сигнал-шум ($q \gg 1$) и $f \rightarrow f_0$, (3.97) можно записать в виде

$$\Phi(f_0) = -\frac{2E}{N_0} \frac{d^2}{df^2} |\dot{\Psi}(f - f_0)|_{f=f_0}, \quad (3.98)$$

Тогда выражение для погрешности оценки имеет вид

$$\mathbf{D}\{\hat{f}_0\} = \frac{-1}{q^2 \frac{d^2}{df^2} (|\dot{\Psi}(f - f_0)|)_{f=f_0}}, \quad (3.99)$$

где

$$\dot{\Psi}(f - f_0) = \frac{1}{2E} \int_{-\infty}^{+\infty} |\dot{S}(t)|^2 \exp(j2\pi(f - f_0)t) dt. \quad (3.100)$$

Продифференцируем модуль комплексной функции неопределенности $\dot{\Psi}(f)$ сигнала в точке $f = 0$.

$$\frac{d^2}{df^2} |\dot{\Psi}(f)|_{f=0} = \text{Re}[\dot{\Psi}''(0)] + |\dot{\Psi}'(0)|^2. \quad (3.101)$$

Подставим (3.101) в (3.100) и, используя свойства преобразования Фурье, получим

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{df^2} |\dot{\Psi}(f)| \Big|_{f=0} &= -(2\pi)^2 \left(\operatorname{Re} \left[\frac{1}{2E} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 |\dot{S}(t)|^2 dt \right] + \left| \frac{1}{2E} \int_{-\infty}^{+\infty} t |\dot{S}(t)|^2 dt \right|^2 \right) = \\ &= -(2\pi)^2 \left(\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 |\dot{S}(t)|^2 dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} |\dot{S}(t)|^2 d\omega} - \left(\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} t |\dot{S}(t)|^2 dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} |\dot{S}(t)|^2 dt} \right)^2 \right) = -(2\pi\Delta T_{\varphi})^2. \end{aligned}$$

В этом выражении ΔT_{φ} - эффективная длительность комплексной огибающей сигнала, тогда

$$\mathbf{D}\{\hat{f}\} = \frac{1}{q^2 (2\pi\Delta T_{\varphi})^2}. \quad (3.102)$$

Анализируя (3.94) и (3.102) легко заметить, точность оценивания задержки тем лучше, чем хуже точность определения частотного сдвига сигнала и наоборот. В этом смысле короткие сигналы эффективны при оценке задержки, а продолжительные, для оценки частотного сдвига.

3.2.6. Совместное оценивание временной задержки и частотного сдвига сигнала со случайной начальной фазой

Рассмотрим задачу совместного оценивания временной задержки и частотного сдвига сигнала со случайной начальной фазой. Наблюдаемый сигнал имеет вид

$$x(t) = s(t - \tau, f, \varphi) + n(t), \quad (3.103)$$

где $s(t - \tau, f, \varphi) = \operatorname{Re} \left[\dot{S}(t - \tau) e^{j(\omega_0 + 2\pi f)t + \varphi} \right]$, $\dot{S}(t)$ - комплексная огибающая сигнала $s(t)$, φ - случайная фаза, равномерно распределенная на интервале $(-\pi; \pi)$.

Время запаздывания и частотный сдвиг являются неэнергетическим параметрами, тогда в соответствии с (3.64) алгоритм оценивания можно записать в виде

$$\tau = \arg \max_{\tau_0, f_0} \left| \dot{Z}(\tau_0, f_0) \right| = \arg \max_{\tau_0, f_0} \left| \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} X^*(t) \dot{S}(t - \tau_0) e^{j2\pi f_0 t} dt \right|. \quad (3.104)$$

Структура измерителя на базе квадратурных согласованных фильтров (КСФ) имеет вид, показанный на Рис.3.9. Алгоритм работы измерителя (3.104) реализуется в виде M параллельных КСФ, каждый из которых настроен на одну из частот f_1, f_2, \dots, f_M , равномерно разбивающих диапазон измерений по шкале частот. Решающее устройство анализирует M сигналов и определяет номер канала и значение времени задержки, при котором наблюдается максимальное значение модуля комплексного

корреляционного интеграла.

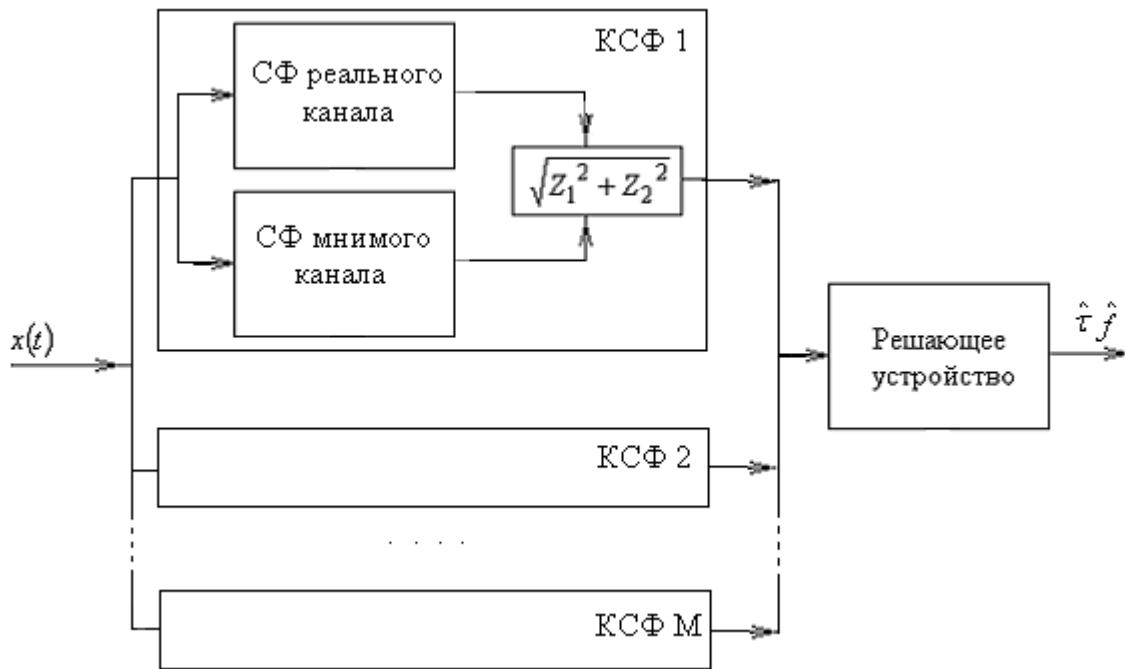


Рис.3.9. Структурная схема устройства совместной оценки частотного сдвига и задержки сигнала со случайной фазой на фоне белого шума.

Определим погрешность измерителя, следуя стандартной последовательности действий. Для этого найдем коэффициенты информационной матрицы Фишера. Для случая высокого значения отношения сигнал-шум и $f \rightarrow f_0$, $\tau \rightarrow \tau_0$ коэффициенты матрицы Фишера можно записать в виде

$$\Phi_{11}(\tau_0, f_0) = -\mathbf{M} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \ln(p(x|\tau, f)) \Big|_{\substack{\tau=\tau_0 \\ f=f_0}} \right\}, \quad (3.105)$$

$$\Phi_{12}(\tau_0, f_0) = -\mathbf{M} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \tau \partial f} \ln(p(x|\tau, f)) \Big|_{\substack{\tau=\tau_0 \\ f=f_0}} \right\}, \quad (3.106)$$

$$\Phi_{21}(\tau_0, f_0) = -\mathbf{M} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial f \partial \tau} \ln(p(x|\tau, f)) \Big|_{\substack{\tau=\tau_0 \\ f=f_0}} \right\}, \quad (3.107)$$

$$\Phi_{22}(\tau_0, f_0) = -\mathbf{M} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial f \partial f} \ln(p(x|\tau, f)) \Big|_{\substack{\tau=\tau_0 \\ f=f_0}} \right\}. \quad (3.108)$$

Ранее нами были фактически получены диагональные элементы матрицы Фишера, т.е.

$$\Phi_{11}(\tau_0, f_0) = -\frac{2E}{N_0} \frac{d^2}{d\tau^2} \left| \dot{\Psi}(\tau - \tau_0, 0) \right|_{\tau=\tau_0} = q^2 (2\pi\Delta T_{\text{эф}})^2, \quad (3.109)$$

$$\Phi_{22}(\tau_0, f_0) = -\frac{2E}{N_0} \frac{d^2}{df^2} \left| \dot{\Psi}(0, f - f_0) \right|_{f=f_0} = q^2 (\Delta\Omega_{\text{эф}})^2, \quad (3.110)$$

где

$$\dot{\Psi}(\tau, f) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} S^*(t) \dot{S}(t - \tau) e^{j2\pi ft} dt. \quad (3.111)$$

Функция неопределенности $\dot{\Psi}(\tau, f)$ называется **комплексной частотно-временной функцией неопределенности**. Определим недостающие коэффициенты

$$\begin{aligned} \Phi_{21}(\tau_0, f_0) = \Phi_{12}(\tau_0, f_0) &= -\frac{2E}{N_0} \frac{\partial^2}{\partial\tau\partial f} \left| \dot{\Psi}(\tau - \tau_0, f - f_0) \right|_{\substack{\tau=\tau_0 \\ f=f_0}} = \\ &= -\frac{2E}{N_0} \operatorname{Re} \left[\frac{\partial^2}{\partial\tau\partial f} \dot{\Psi}(\tau - \tau_0, f - f_0) \right]_{\substack{\tau=\tau_0 \\ f=f_0}} - \frac{\partial}{\partial\tau} \dot{\Psi}(\tau - \tau_0, 0) \Big|_{\tau=\tau_0} \cdot \frac{\partial}{\partial f} \dot{\Psi}(0, f - f_0) \Big|_{f=f_0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_{21}(0, 0) &= -\frac{2E}{N_0} \operatorname{Re} \left[\frac{-1}{2E} \int_{-\infty}^{+\infty} S^*(t) \dot{S}'(t) (j2\pi t) dt + \frac{1}{4E} \int_{-\infty}^{+\infty} S^*(t) \dot{S}'(t) dt \int_{-\infty}^{+\infty} |S(t)|^2 (j2\pi t) dt \right] = \\ &= -\frac{2E}{N_0} \operatorname{Re} \left[\frac{-1}{2E} \int_{-\infty}^{+\infty} S^*(t) \dot{S}'(t) (j2\pi t) dt + \frac{j}{4E(2\pi)} \int_{-\infty}^{+\infty} |S(j\omega)|^2 \omega dt \int_{-\infty}^{+\infty} |S(t)|^2 (j2\pi t) dt \right] = \\ &= \frac{2E}{N_0} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{2E} \int_{-\infty}^{+\infty} S^*(t) \dot{S}'(t) (j2\pi t) dt \right] = \frac{2E}{N_0} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{2E} \int_{-\infty}^{+\infty} S^*(t) \dot{S}(t) \left(\frac{\dot{S}'(t)}{\dot{S}(t)} \right) (j2\pi t) dt \right] = \\ &= \frac{2E}{N_0} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{2E} \int_{-\infty}^{+\infty} S^*(t) \dot{S}(t) \frac{\partial}{\partial t} (\ln(\dot{S}(t))) (j2\pi t) dt \right] = \\ &= \frac{2E}{N_0} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{2E} \int_{-\infty}^{+\infty} |S(t)|^2 \frac{\partial}{\partial t} (\ln(\dot{S}(t))) (j2\pi t) dt \right] = \\ &= \frac{2E}{N_0} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{2E} \int_{-\infty}^{+\infty} |S(t)|^2 \frac{\partial}{\partial t} (\ln(|\dot{S}(t)| + j\gamma(t))) (j2\pi t) dt \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2E}{N_0} \operatorname{Re} \left[\frac{j2\pi}{2E} \int_{-\infty}^{+\infty} |S(t)|^2 \frac{\partial}{\partial t} (\ln(|\dot{S}(t)|)) dt - \frac{1}{2E} \int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi |S(t)|^2 \gamma'(t) dt \right] = \\
&= -2\pi q^2 \frac{1}{2E} \int_{-\infty}^{+\infty} t |S(t)|^2 \gamma'(t) dt.
\end{aligned}$$

Здесь $\gamma(t)$ - полная мгновенная фаза комплексной огибающей сигнала. Так как $2\pi\Omega(t) = \gamma'(t)$, где $\Omega(t)$ - мгновенная частота сигнала, получим

$$\Phi_{21}(0,0) = -q^2 \frac{(2\pi)^2}{2E} \int_{-\infty}^{+\infty} t |\dot{S}(t)|^2 \Omega(t) dt, \quad (3.112)$$

Введем параметр частотно-временной связи ρ в виде

$$\rho = \frac{2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} t |\dot{S}(t)|^2 \Omega(t) dt}{\Delta\Omega_{\text{эф}} \Delta T_{\text{эф}} \int_{-\infty}^{+\infty} |\dot{S}(t)|^2 dt}, \quad (3.113)$$

Тогда

$$\Phi_{21}(0,0) = -q^2 2\pi \Delta\Omega_{\text{эф}} \Delta T_{\text{эф}} \rho. \quad (3.114)$$

Таким образом, информационная матрица Фишера имеет вид

$$\mathbf{\Phi}(a_0, \varphi_0) = \begin{pmatrix} (2\pi \Delta T_{\text{эф}})^2 & -q^2 2\pi \Delta\Omega_{\text{эф}} \Delta T_{\text{эф}} \rho \\ -q^2 2\pi \Delta\Omega_{\text{эф}} \Delta T_{\text{эф}} \rho & q^2 (\Delta\Omega_{\text{эф}})^2 \end{pmatrix}, \quad (3.115)$$

Погрешность оценки амплитуды и фазы можно вычислить по формулам

$$\mathbf{D}\{\hat{\tau} | \tau_0, f_0\} = \frac{1}{q^2 (\Delta\Omega_{\text{эф}})^2 (1 - \rho^2)}, \quad (3.116)$$

$$\mathbf{D}\{\hat{f} | \tau_0, f_0\} = \frac{1}{q^2 (2\pi \Delta T_{\text{эф}})^2 (1 - \rho^2)}. \quad (3.117)$$

Полученные выражения показывают, что погрешность совместной оценки частоты и задержки зависит от параметра частотно-временной связи. Погрешность минимальна и соответствует погрешности независимой оценки частоты или фазы, только если параметр частотно-временной связи равен нулю. Из (3.113) очевидно, что $\rho = 0$, для всех сигналов, у которых $\Omega(t) = 0$ или симметрична относительно $t = 0$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Оценка максимального правдоподобия комплексной амплитуды сигнала сводится к вычислению амплитуды и фазы комплексного интеграла. Погрешность независимой оценки времени запаздывания и частоты

сигнала со случайной фазой зависит от длительности сигнала противоположенным образом. Чем больше длительность сигнала, тем лучше погрешность оценки частоты и хуже запаздывания. Выражения для погрешности показывают, что погрешность совместной оценки частоты и задержки зависит от параметра частотно-временной связи. Погрешность минимальна и соответствует погрешности независимой оценки частоты или фазы, только если параметр частотно-временной связи равен нулю.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Чем определяется потенциальная погрешность оценки параметров сигнала со случайной фазой, наблюдаемого на фоне аддитивного БГШ?
2. Каков оптимальный алгоритм совместной оценки амплитуды и фазы сигнала на фоне БГШ.
3. Что такое аномальные ошибки в теории оценивания?
4. Что характеризует комплексная частотно-временная функция неопределенности сигнала?
5. Чем определяется погрешность определения временной задержки и частоты сигнала?
6. В чем отличие измерителя временной задержки детерминированного сигнала и сигнала с неопределенной начальной фазой?

ЛЕКЦИЯ №9. Разрешение сигналов. Понятие о разрешающей способности. Постановка задачи разрешения сигналов. Роль функции неопределенности в задаче разрешения сигналов.

4. РАЗРЕШЕНИЕ СИГНАЛОВ. КАТАЛОГ СИГНАЛОВ

4.1. РАЗРЕШЕНИЕ СИГНАЛОВ

4.1.1. Понятие разрешающей способности в РТС

Решение задачи **разрешения сигналов** предполагает отдельное извлечение информации из однопольных, налагающихся друг на друга сигналов, имеющих часто неизвестные мешающие параметры, и наблюдаемых на фоне помех.

Пусть наблюдаемый в РТС сигнал представляет собой смесь информационного сигнала $s(t, \lambda_0)$, зависящего от некоторого параметра λ_0 , налагающихся на него однопольных с информационным мешающих сигналов $s(t, \lambda_i)$, имеющих другие значения параметра λ_i и реализации шума $n(t)$.

$$x(t) = \theta_0 s(t, \lambda_0) + \sum_i \theta_i s(t, \lambda_i) + n(t), \quad (4.1)$$

где $\theta_i \in \{0,1\}$.

В этой ситуации возможны различные особенности постановки задач разрешения сигналов. Так при решении задачи обнаружения-разрешения необходимо на основе анализа сигнала $x(t)$ принять решение о наличии или отсутствии сигнала $s(t, \lambda_0)$. При решении задачи различения-разрешения необходимо определить какое из возможных сочетаний $\{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_i, \dots\}$ имеется в принятом сигнале. Задача оценивания-разрешения может предполагать совместную оценку параметров $\{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_i, \dots\}$ и $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_i, \dots\}$.

Нетрудно понять, что качество решения перечисленных задач будет зависеть не только от помехоустойчивости системы, но и от способности алгоритма обработки отличать друг от друга наблюдаемые однопольные сигналы, отличающиеся в данном случае только значением параметра λ . Эта способность называется **разрешающей способностью системы по параметру λ** .

Разрешающая способность является ключевой характеристикой многих РТС. Например, в радиолокационных системах разрешающая способность характеризует качество РЛС по различению близкорасположенных целей. В радиометрии, радиоастрономии разрешающая способность характеризует возможность разделения источников радиоизлучений в пространстве. В системах формирующих

радиоизображения протяженных объектов разрешающая способность определяет детальность, четкость формируемой видеоинформации.

При количественном определении разрешающей способности в оптике широко используется понятие **релеевского разрешения**. В соответствии с этим понятием два оптических сигнала считаются разрешенными, если $\Delta I > 0.5I_{\max}$ (см. Рис.4.1.). Соответственно количественно разрешающая способность, это такое Δx , при котором $\Delta I = 0.5I_{\max}$.

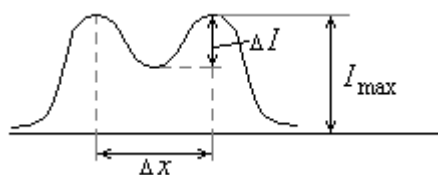


Рис.4.1. Понятие рэлеевской разрешающей способности.

В радиотехнике использовать критерий Релея для определения разрешенности сигналов и соответственно разрешающей способности системы как правило нецелесообразно. Это обусловлено тем, что разрешаемые сигналы в радиотехнике в отличие от оптики обычно являются знакопеременными или комплекснозначными функциями пространства и/или времени, часто имеющими случайные фазовые сдвиги.

Поэтому взаимодействие близко расположенных по параметру λ сигналов имеет случайный, интерференционный характер. В этом случае в зависимости от значений случайных фаз сигналы могут быть как разрешенными, так и неразрешенными по критерию Рэлея при одном и том же значении разности параметра λ .

В этой связи под разрешающей способностью РТС по параметру λ обычно понимают ширину главного лепестка модуля функции неопределенности сигнала $s(t, \lambda)$ по параметру λ . При этом в зависимости от характера ФН ширина главного лепестка оценивается по уровню 0.5 или по первым нулям ФН сигнала.

В зависимости от значения параметра различают разрешение по задержке $\lambda = \tau$, разрешение по частоте $\lambda = f$. В случае наличия у сигнала нескольких пространственных параметров говорят о пространственном разрешении.

4.1.2. Разрешение сигналов в координатах время-частота

Важную роль в СТРС играет задача разрешения сигналов в пространстве время-частота.

Рассмотрим пример работы радиолокационной станции обнаружения и определения координат воздушных целей. В этой системе, в пространство периодически излучается сигнал

$$s(t) = \text{Re}[\dot{S}(t)\exp(j2\pi f_0 t)].$$

Отраженный от цели сигнал возвращается в приемную антенну РЛС спустя некоторое время задержки $\tau = \frac{2R}{c}$, где R - расстояние до цели, c - скорость света.

Если цель движется, то отраженный сигнал приобретает дополнительное частотное смещение $f = \frac{2V}{\lambda}$ вследствие эффекта Доплера, где V - радиальная составляющая вектора скорости цели, λ - длина волны РЛС.

Т.о. отраженный сигнал, принятый в точке антенны РЛС имеет вид

$$s_{omp}(t) = \text{Re}[a\dot{S}(t - \tau)\exp(j2\pi(f_0 - f)(t - \tau) + \varphi)] \quad (4.2)$$

где a, φ - амплитуда и начальная фаза отраженного сигнала.

Информация о наличии или отсутствии цели, параметрах ее движения содержится в отраженном сигнале. Для оптимального извлечения этой информации на фоне помех при наличии случайной фазы и амплитуды необходимо вычислить модуль комплексного корреляционного интеграла, который в отсутствии шумов имеет вид

$$\begin{aligned} |\dot{Z}(\tau, f)| &= \left| \int_0^T \dot{S}(t)\exp(j2\pi f_0 t) a S^*(t - \tau)\exp(-j2\pi(f_0 - f)(t - \tau) - \varphi) dt \right| = \\ &= \left| 2aE \exp(-j2\pi(f_0 - f)\tau - \varphi) \frac{1}{2E} \int_0^T \dot{S}(t) S^*(t - \tau) \exp(j2\pi f t) dt \right| = \\ &= 2aE |\dot{\Psi}(\tau, f)|, \end{aligned} \quad (4.3)$$

где $\dot{\Psi}(\tau, f) = \frac{1}{2E} \int_0^T \dot{S}(t) S^*(t - \tau) \exp(j2\pi f t) dt$ частотновременная функция неопределенности (ФН).

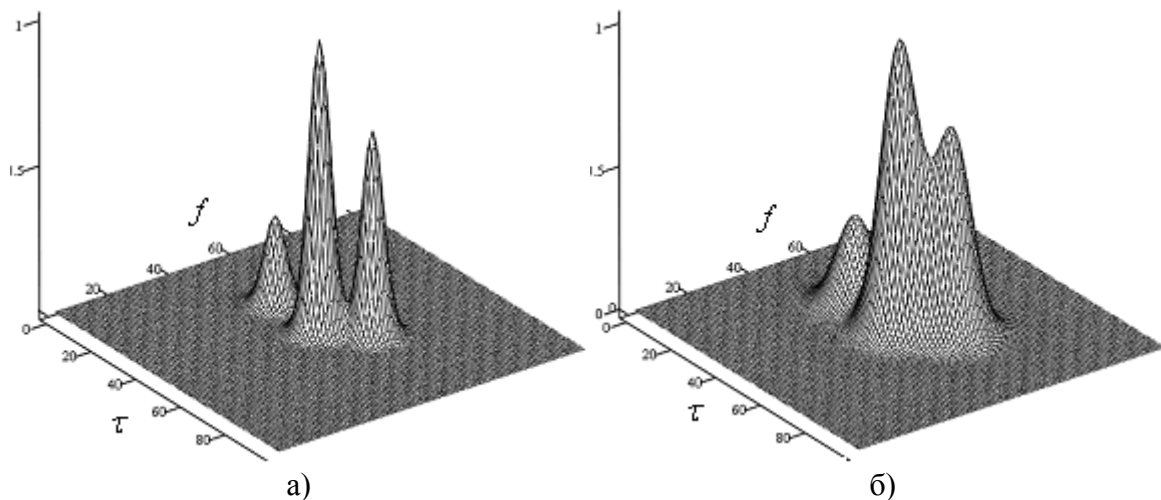


Рис.4.2. Пример наблюдения 3-х целей в пространстве время-частота на выходе СФ, а) - разрешаемые и б) - неразрешаемые цели.

На Рис.4.2.а) показан сигнал на выходе СФ от 3-х наблюдаемых одновременно целей, разрешаемых РЛС. В соответствии с п.3.2.6. частотновременная функция неопределенности определяет точность определения задержки и частотного смещения сигнала. При этом погрешность оценивания определяется остротой пика ФН. Однако если не решена задача разрешения, как, например, на Рис.4.2.б), то задача определения координат цели не может быть решена однозначно.

Т.о. частотновременная ФН определяет возможности РЛС по разрешению целей в пространстве задержка - доплеровский сдвиг, или в пространстве дальность – радиальная скорость. При этом острота пика определяет точность совместного измерения дальности и скорости цели. Уровень сигнала вне пика (уровень боковых лепестков) определяет влияние этого сигнала на качество приема соседних сигналов.

В целом частотновременная ФН может использоваться для классификации сигналов, используемых в РТС.

Сечения функции неопределенности $\dot{\Psi}(\tau, 0)$ и $\dot{\Psi}(0, f)$ определяют свойства сигнала по разрешению и погрешности независимого оценивания временной задержки и частоты соответственно.

Рассмотрим некоторые свойства частотновременной ФН.

1) Свойство нормировки

$$\dot{\Psi}(0,0) = \frac{1}{2E} \int_0^T \dot{S}(t) S^*(t) dt = \frac{1}{2E} \int_0^T |\dot{S}(t)|^2 dt = 1. \quad (4.4)$$

2) Принцип неопределенности Вудворда

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{\Psi}(\tau, f)|^2 d\tau df = 1. \quad (4.5)$$

Действительно

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{\Psi}(\tau, f)|^2 d\tau df &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{2E} \int_0^T \dot{S}(t) S^*(t-\tau) \exp(j2\pi ft) dt \right|^2 d\tau df = \\
&= \frac{1}{(2E)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(t_1) S^*(t_1-\tau) S^*(t_2) \dot{S}(t_2-\tau) \exp(j2\pi f(t_1-t_2)) dt_1 dt_2 d\tau df = \\
&= \frac{1}{(2E)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(t_1) S^*(t_1-\tau) S^*(t_2) \dot{S}(t_2-\tau) \int_{-\infty}^{\infty} \exp(j2\pi f(t_1-t_2)) dt_1 dt_2 d\tau df = \\
&= \frac{1}{(2E)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(t_1) S^*(t_1-\tau) S^*(t_2) \dot{S}(t_2-\tau) \delta(t_2-t_1) dt_1 dt_2 d\tau = \\
&= \frac{1}{(2E)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(t) S^*(t-\tau) S^*(t) \dot{S}(t-\tau) dt d\tau = \frac{1}{(2E)^2} \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{S}(t)|^2 dt \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{S}(t-\tau)|^2 d\tau = 1.
\end{aligned}$$

Т.о. частотновременная функция неопределенности имеет единичный объем у любого сигнала. Следствием этого факта является то, что хорошие свойства сигнала в сечении задержки ($\dot{\Psi}(\tau, 0)$) сопровождается расширением ФН в сечении доплеровского сдвига $\dot{\Psi}(0, f)$, т.е. ухудшением разрешения по частоте и наоборот. Поэтому задача выбора конкретного типа сигнала при проектировании РТС часто имеет компромиссное решение.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разрешающая способность является ключевой характеристикой многих РТС. Качество решения задач обнаружения-разрешения, оценивания-разрешения, различения-разрешения будет зависеть не только от помехоустойчивости системы, но и от способности алгоритма обработки отличать друг от друга наблюдаемые однотипные сигналы, отличающиеся в данном случае только значением параметра. Эта способность называется разрешающей способностью системы по параметру. Частотновременная ФН определяет возможности РЛС по разрешению целей в пространстве задержка - доплеровский сдвиг, или в пространстве дальность - радиальная скорость.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что в СТРС понимают под задачей разрешения сигналов?
2. Что такое разрешающая способность системы по параметру?
3. Что в теории РТС понимается под термином «релеевское разрешение»?

4. Какую роль в задаче разрешения по параметрам время-частота играет частотновременная функция неопределенности?
5. В чем смысл принципа неопределенности Вудворда?

ЛЕКЦИЯ №10. Различные типы сигналов в РТС. Каталог сигналов. Последовательности импульсов. Свойства ЛЧМ сигнала, его спектр и автокорреляционная функция.

4.2. КАТАЛОГ СИГНАЛОВ

Используемые в радиотехнике сигналы можно классифицировать на три основных класса по виду функции неопределенности, которая бывает: гребневидной (Рис.4.3) для сигналов класса I; многолепестковой (Рис.4.4) для сигналов класса II; кнопочной (Рис.4.5) для сигналов III класса.

Сигналы I-го класса используются в основном для измерения одного параметра, при этом они часто могут быть невосприимчивы к изменению другого параметра, что иногда бывает важным достоинством выбранного сигнала.

Сигналы II-го класса используются для одновременного измерения двух параметров и часто имеют достаточно высокую точность, однако недостатком является небольшая область однозначности измерения параметров.

Сигналы III-го класса формально имеют идеальную ФН для одновременного измерения 2-х параметров, но при этом у этих сигналов часто относительно высокий уровень боковых лепестков.

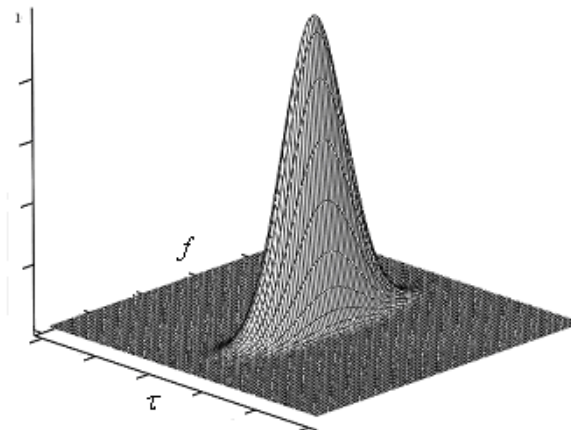


Рис.4.3. Частотновременная функция неопределенности гребневидного типа.

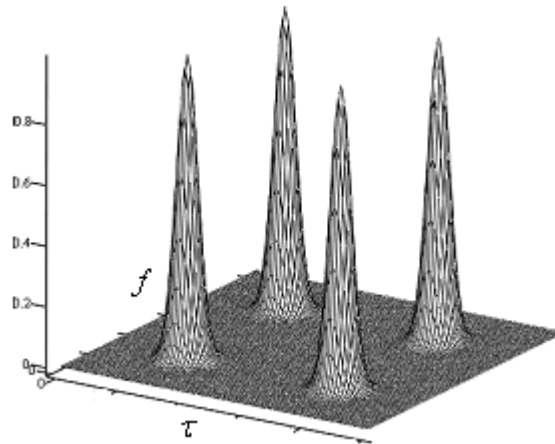


Рис.4.4. Частотновременная функция неопределенности многопесткового типа.

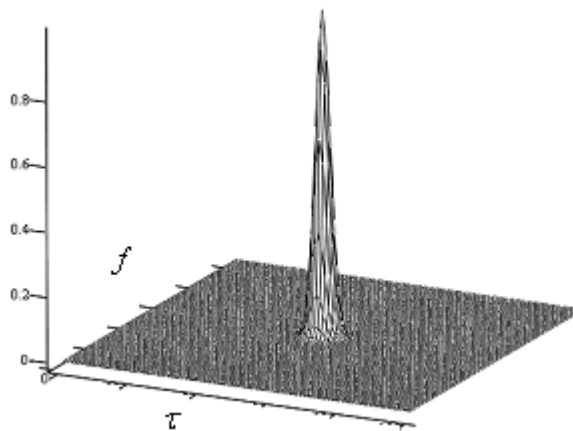


Рис.4.5. Частотновременная функция неопределенности кнопочного типа.

4.2.1. Сигналы с гребневидной функцией неопределенности

а) Прямоугольный импульс

Найдем функцию неопределенности прямоугольного импульса, заданного в виде

$$s(t) = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \text{rect}\left(\frac{t}{\Delta}\right), \text{ где } \text{rect}(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq \frac{1}{2} \\ 0, & |t| > \frac{1}{2} \end{cases}. \quad (4.6)$$

Пусть $\tau > 0$, тогда

$$\begin{aligned} \Psi(\tau, f) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \text{rect}\left(\frac{t}{\Delta}\right) \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \text{rect}\left(\frac{t-\tau}{\Delta}\right) \exp(j2\pi ft) dt = \\ &= \frac{1}{\Delta} \int_{-\frac{\Delta}{2} + \tau}^{\frac{\Delta}{2}} \exp(j2\pi ft) dt = \frac{1}{j2\pi f \Delta} (\exp(j\pi f \Delta) - \exp(-j\pi f \Delta) \exp(j2\pi f \tau)). \end{aligned} \quad (4.7)$$

При $\tau < 0$, получим

$$\dot{\Psi}(\tau, f) = \frac{1}{j2\pi f\Delta} (\exp(j\pi f\Delta) \exp(j2\pi f\tau) - \exp(-j\pi f\Delta)). \quad (4.8)$$

При $\tau = 0$

$$\dot{\Psi}(0, f) = \frac{1}{\Delta} \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} \exp(j2\pi ft) dt = \frac{\sin \pi f\Delta}{\pi f\Delta}. \quad (4.9)$$

При $f = 0$

$$\dot{\Psi}(\tau, 0) = \text{rect}\left(\frac{\tau}{2\Delta}\right) \frac{1 - |\tau|}{\Delta}. \quad (4.10)$$

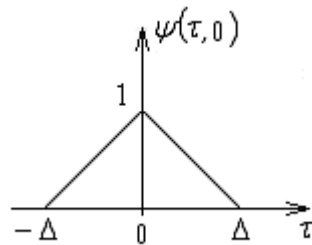


Рис.4.6. Временное сечение ФН прямоугольного импульса

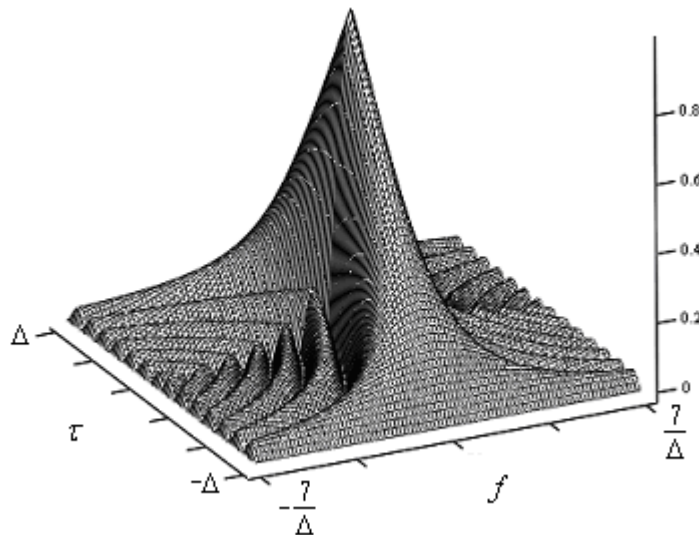


Рис.4.7. Модуль частотновременной ФН прямоугольного импульса.

Ширина основного лепестка частотновременной ФН прямоугольного импульса в сечении задержки по уровню 0.5 в соответствии с (4.10) равна Δ . Ширина основного лепестка ФН прямоугольного импульса в сечении частоты по первому нулю в соответствии с (4.9) равна $\frac{2}{\Delta}$.

Таким образом, чем меньше длительность прямоугольного импульса, тем хуже его разрешение по частоте и соответственно лучше по задержке. Подобное свойство противоречивости требований высокого разрешения по задержке и по частоте характерный признак так называемых **простых сигналов**. У таких сигналов база $B = \Delta f \Delta t \approx 1$. Нетрудно убедиться в справедливости этого факта в случае прямоугольного импульса, действительно, если оценивать полосу частот прямоугольного импульса по первым нулям в спектре, то $B = \Delta \cdot \frac{2}{\Delta} = 2$.

Сигналы, у которых $B \gg 1$ называются **сложными сигналами**. Примером таких сигналов является импульс с линейной частотной модуляцией (ЛЧМ).

б) Импульс с линейной частотной модуляцией

ЛЧМ сигнал задается следующим выражением

$$\dot{S}(t) = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \text{rect}\left(\frac{t}{\Delta}\right) \exp(j\pi\alpha t^2). \quad (4.11)$$

У этого сигнал мгновенная частота $f(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \pi\alpha t^2 = \alpha t$, полоса частот равна соответственно $\Delta f = \alpha \Delta$.

Найдем функцию неопределенности ЛЧМ импульса. Пусть $\tau > 0$, тогда

$$\begin{aligned} \dot{\Psi}(\tau, f) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \text{rect}\left(\frac{t}{\Delta}\right) \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \text{rect}\left(\frac{t-\tau}{\Delta}\right) \exp(j\pi\alpha t^2 - j\pi\alpha(t-\tau)^2 + j2\pi f t) dt = \\ &= \frac{1}{\Delta} \int_{-\frac{\Delta}{2} + \tau}^{\frac{\Delta}{2}} \exp(j\pi\alpha t^2 - j\pi\alpha(t-\tau)^2 + j2\pi f t) dt = \\ &= \frac{1}{\Delta} \exp(-j\pi\alpha\tau^2) \frac{\left(\exp\left(j2\pi(\alpha\tau + f)\frac{\Delta}{2}\right) - \exp\left(j2\pi(\alpha\tau + f)\left(-\frac{\Delta}{2} + \tau\right)\right) \right)}{j2\pi(\alpha\tau + f)}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

При $\tau < 0$, получим

$$\begin{aligned} \dot{\Psi}(\tau, f) &= \\ &= \frac{1}{\Delta} \exp(-j\pi\alpha\tau^2) \frac{\left(\exp\left(j2\pi(\alpha\tau + f)\left(\frac{\Delta}{2} + \tau\right)\right) - \exp\left(-j2\pi(\alpha\tau + f)\frac{\Delta}{2}\right) \right)}{j2\pi(\alpha\tau + f)}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

При $\tau = 0$

$$\dot{\Psi}(0, f) = \frac{(\exp(j\pi f\Delta) - \exp(-j\pi f\Delta))}{j2\pi f\Delta} = \frac{\sin(\pi f\Delta)}{\pi f\Delta}. \quad (4.14)$$

При $f = 0$

$$\dot{\Psi}(\tau, 0) = \text{rect}\left(\frac{\tau}{2\Delta}\right) \frac{(1 - |\tau|) \sin(\pi\alpha\tau(\Delta - |\tau|))}{\Delta \pi\alpha\tau(\Delta - |\tau|)}. \quad (4.15)$$

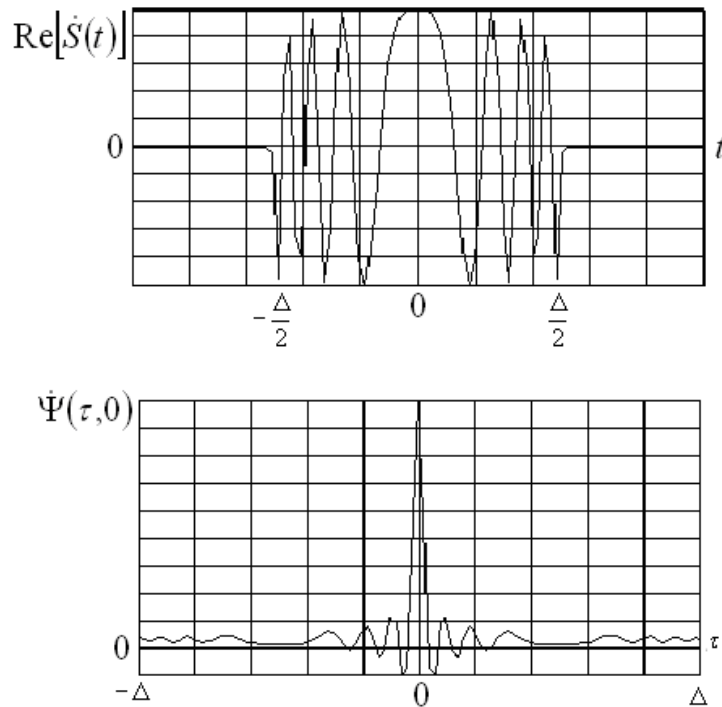


Рис.4.8. ЛЧМ импульс и его временная функция неопределенности.

Ширина основного лепестка частотновременной ФН прямоугольного импульса в сечении задержки в соответствии с (4.14) по первому нулю $\approx \frac{1}{\alpha\Delta} = \frac{1}{\Delta f}$, где Δf - полоса частот (**девиация частоты**) ЛЧМ импульса.

Из анализа Рис.4.8 можно обратить внимание на тот факт, что длительность ЛЧМ импульса на выходе согласованного фильтра значительно меньше.

Коэффициент временного сжатия импульса

$$k_{сж} = \Delta^2 \alpha = \Delta f \Delta = B,$$

где B - база сигнала, которая в данном случае определяется значением девиации частоты и может быть сделана сколь угодно большой при фиксированной длительности сигнала.

Т.о. сигналы с большой базой на выходе согласованного фильтра сжимаются по длительности на величину, равную базе сигнала. Это свойство часто используется в радиолокации, чтобы уменьшить

требования к пиковой мощности передатчика при сохранении разрешающей способности РЛС по задержке.

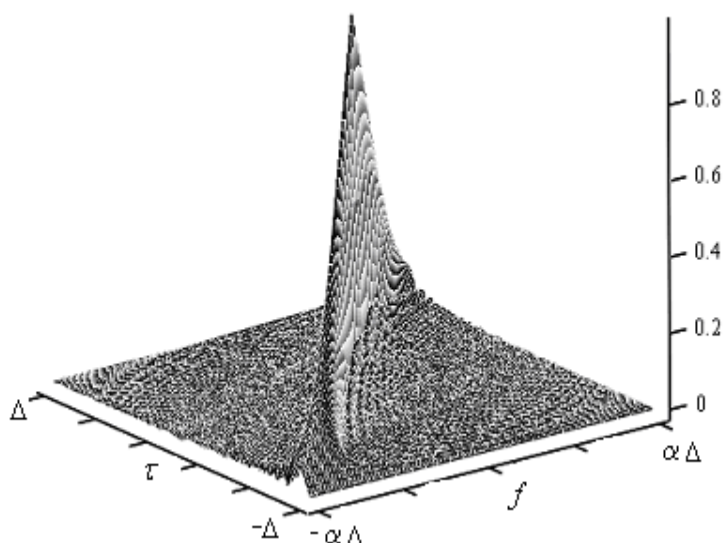


Рис.4.9. Модуль частотновременной ФН ЛЧМ импульса.

Из Рис.4.9 видно, что ЛЧМ импульс относится к сигналам I-го класса, только в отличие от ФН прямоугольного импульса, гребень ФН ЛЧМ сигнала развернут в плоскости время-частота вдоль линии $(\alpha\tau + f) = 0$.

Эта особенность приводит к известному в радиолокации эффекту **слепых скоростей**. Эффект проявляется в том, что цели, радиальная составляющая скорости которых $V = \frac{\alpha}{f_0} R$, неразличимы для РЛС, зондирующий импульс которых имеет линейную частотную модуляцию.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Используемые в радиотехнике сигналы можно классифицировать на три основных класса по виду функции неопределенности, которая бывает: гребневидной; многолепестковой; кнопочной. Сигналы I-го класса используются в основном для измерения одного параметра, сигналы II-го класса используются для одновременного измерения двух параметров в ограниченной области однозначности, сигналы III-го класса имеют идеальную ФН для одновременного измерения 2-х параметров, но при этом у этих сигналов часто относительно высокий уровень боковых лепестков.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Как в СТРС классифицируют сигналы по виду функции неопределенности?
2. Какие сигналы в СТРС называют сложными?

3. В чем заключается эффект слепых скоростей в РЛС, использующих ЛЧМ сигналы?
4. К какому классу сигналов относится прямоугольный импульс?
5. К какому классу сигналов относится ЛЧМ импульс?
6. Перечислите основные свойства ЛЧМ импульса?

ЛЕКЦИЯ №11. Общая характеристика псевдошумовых сигналов (ПШС). Импульсы, кодированные кодом Баркера, M-последовательности.

4.2.2. Сигналы с многолепестковой функцией неопределенности

Функцию неопределенности такого типа имеют последовательности (пачки) одинаковых, равноотстоящих друг от друга импульсов

$$s(t) = \operatorname{Re} \left[\sum_{i=0}^{N-1} \dot{S}_0(t - iT) \right], \quad (4.16)$$

где T - период повторения импульсов в пачке ($T > 2\Delta$), $\dot{S}_0(t)$ - комплексная огибающая одиночного импульса.

Найдем функцию неопределенности пачки импульсов

$$\begin{aligned} \Psi(\tau, f) &= \frac{1}{2E} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(t) S^*(t - \tau) \exp(j2\pi ft) dt = \\ &= \frac{1}{2E} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=0}^{N-1} \dot{S}_0(t - iT) \sum_{i=0}^{N-1} \dot{S}_0(t - \tau - iT) \exp(j2\pi ft) dt = \\ &= \frac{1}{2E} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_0(t - iT) \dot{S}_0(t - \tau - kT) \exp(j2\pi ft) dt = [\theta = t - iT] = \quad (4.1) \\ &= \frac{1}{2E} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_0(\theta) \dot{S}_0(\theta - \tau - (k - i)T) \exp(j2\pi\theta f) d\theta \exp(j2\pi iTf) = \\ &= \frac{E_0}{E} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \Psi_0(\tau + (k - i)T, f) \exp(j2\pi iTf). \end{aligned}$$

7)

Характер функции неопределенности в этом случае иллюстрирует Рис.4.10, на котором показана частотно-временная ФН последовательности 5-ти прямоугольных импульсов.

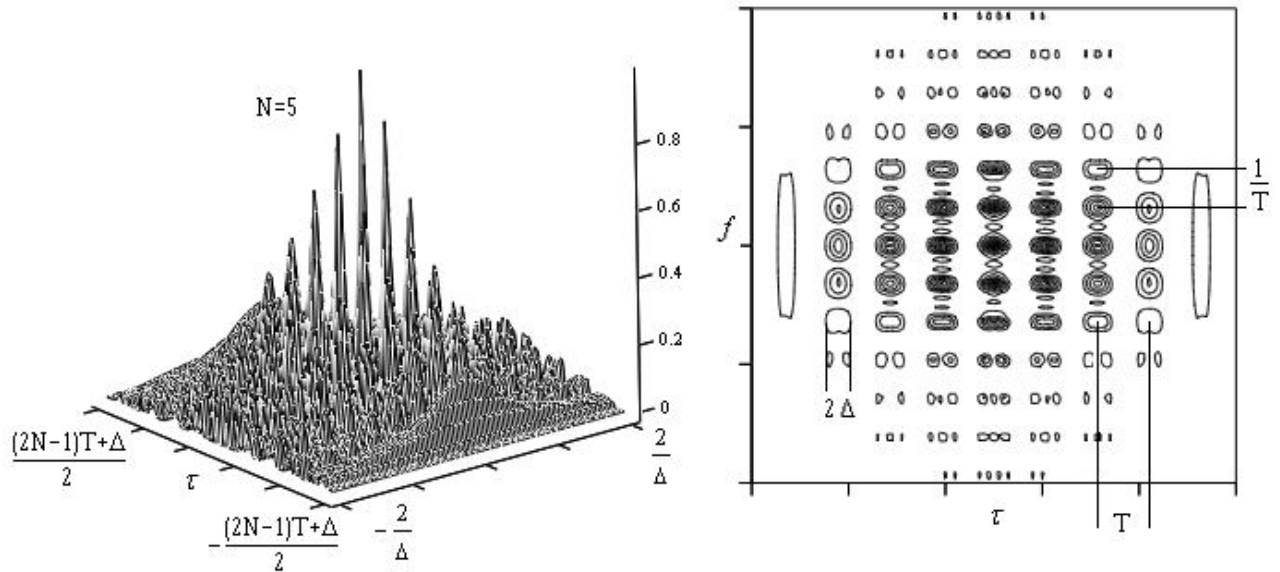


Рис.4.10. Модуль частотновременной ФН 5-ти прямоугольных импульсов (функция слева, контур справа).

При $T > 2\Delta$ в сечении задержки мы имеем $2N - 1$ копий функций неопределенности одиночного импульса, сдвинутых на T .

В области частотного сдвига мы имеем в принципе неограниченную последовательность пиков, интервал между которыми $\frac{1}{T}$, причем эта последовательность промодулирована по амплитуде функцией неопределенности одиночного импульса.

Действительно

$$\begin{aligned} \Psi(0, f) &= \frac{E_0}{E} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \Psi_0((k-i)T, f) \exp(j2\pi i T f) = \\ &= \frac{E_0}{E} \Psi_0(0, f) \sum_{i=0}^{N-1} \exp(j2\pi i T f) = \frac{E_0}{E} \Psi_0(0, f) \exp(j(N+1)\pi T f) \frac{\sin(N\pi T f)}{\sin(\pi T f)}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Т.о. область изменения параметров задержки и частоты, в которой возможно однозначное измерение, ограничена диапазоном $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ по задержке и $\left[-\frac{1}{2T}, \frac{1}{2T}\right]$ по частоте. При этом разрешающая способность по задержке равна Δ , по частоте $\frac{1}{NT}$.

4.2.3. Сигналы с кнопочной функцией неопределенности

Функция неопределенности такого типа соответствует представлениям об идеальном сигнале для одновременного измерения задержки и частоты.

Такой сигнал должен иметь узкий пик частотновременной ФН и низкий уровень боковых лепестков.

Если Δ - длительность сигнала, Δf - полоса частот, то область основного пика ФН занимает объем $V_n = \frac{1}{\Delta f} \frac{1}{\Delta} = \frac{1}{B}$, в этом случае в соответствии с принципом неопределенности Вудворда на боковые лепестки приходится объем $V_{bl} = 1 - V_n = 1 - \frac{1}{B}$.

Тогда уровень боковых лепестков частотновременной ФН ρ удовлетворяет неравенству

$$\rho \geq \sqrt{\frac{B-1}{2B^2}}, \quad (4.19)$$

где B - база сигнала. Т.о. поиск сигналов с кнопочной ФН нужно искать среди сигналов с большой базой.

Для реализации кнопочной ФН используются два типа сигналов: сигналы с немонотонной частотной модуляцией и сигналы с псевдослучайным кодированием последовательностей импульсов по частоте, фазе или временному положению в пачке.

Примером сигналов первого типа является сигнал с V-образной частотной модуляцией вида

$$\dot{S}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[S_0^* \left(t + \frac{\Delta}{2} \right) + \dot{S}_0 \left(t - \frac{\Delta}{2} \right) \right], \quad (4.20)$$

где $\dot{S}_0(t)$ - комплексная огибающая ЛЧМ импульса (4.11).

Аналогичными свойствами обладает сигнал с квадратичной частотной модуляцией (ЧМ).

$$\dot{S}(t) = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \text{rect} \left(\frac{t}{\Delta} \right) \exp(j\pi\alpha t^3). \quad (4.21)$$

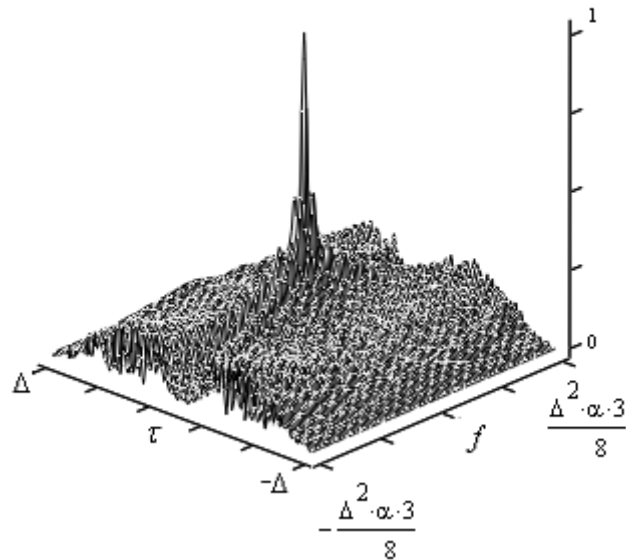


Рис.4.11. Модуль частотновременной ФН сигнала с квадратичной ЧМ.

Наибольшее распространение в радиотехнике имеют сигналы на основе последовательностей кодированных по псевдослучайному закону импульсов. Сигналы такого типа имеют вид

$$s(t) = \text{Re} \left[\sum_{i=0}^{N-1} \dot{a}_i \dot{S}_0(t - i\Delta) \right], \quad (4.22)$$

где $\dot{S}_0(t)$ - комплексная огибающая одиночного импульса, Δ - длительность импульса. Такую последовательность импульсов часто называют пакетом, а последовательность амплитуд и фаз $\{\dot{a}_i\}$ кодовой последовательностью.

Найдем функцию неопределенности пакета импульсов

$$\begin{aligned} \dot{\Psi}(\tau, f) &= \\ &= \frac{1}{2E} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \dot{a}_i \dot{a}_k^* \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_0(\theta) \dot{S}_0(\theta - \tau - (k - i)T) \exp(j2\pi\theta f) d\theta \exp(j2\pi i T f) = \\ &= \frac{E_0}{E} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \dot{a}_i \dot{a}_k^* \dot{\Psi}_0(\tau + (k - i)T, f) \exp(j2\pi i T f) = \\ &= \left[\begin{matrix} m = k - i \\ i = k - m \end{matrix} \right] = \frac{E_0}{E} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{m=k}^{N-1} \dot{a}_{k-m} \dot{a}_k^* \dot{\Psi}_0(\tau + mT, f) \exp(j2\pi(k - m)Tf) \end{aligned}$$

Переходя к бесконечным индексам и добивая нулями до бесконечности последовательность $\{\dot{a}_i\}$, получим

$$\begin{aligned}\dot{\Psi}(\tau, f) &= \frac{E_0}{E} \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \dot{a}_{k-m} a_k^* \dot{\Psi}_0(\tau + mT, f) \exp(j2\pi(k-m)Tf) = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \dot{\Psi}_0(\tau + mT, f) \exp(-j2\pi(m)Tf) \left(\frac{E_0}{E} \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \dot{a}_{k-m} a_k^* \exp(j2\pi kTf) \right).\end{aligned}$$

Обозначим в виде

$$\dot{\Psi}_a(m, f) = \frac{E_0}{E} \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \dot{a}_{k-m} a_k^* \exp(j2\pi kTf), \quad (4.23)$$

функцию неопределенности кодовой последовательности, тогда

$$\dot{\Psi}(\tau, f) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \dot{\Psi}_0(\tau + mT, f) \dot{\Psi}_a(m, f) \exp(-j2\pi(m)Tf). \quad (4.24)$$

Из этого выражения видно, что, подбирая коэффициенты кодовой последовательности, можно обеспечить требуемый вид частотновременной ФН.

Часто, однако, бывает, что обеспечить кнопочный вид ФН удается только по одной координате. В рассматриваемом случае чисто временная ФН пакета имеет вид

$$\dot{\Psi}(\tau, 0) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \dot{\Psi}_0(\tau + mT, 0) \dot{\Psi}_a(m, 0), \quad (4.25)$$

где $\dot{\Psi}_a(m, 0) = 0$, если $m \geq N$ и $m \leq -N$.

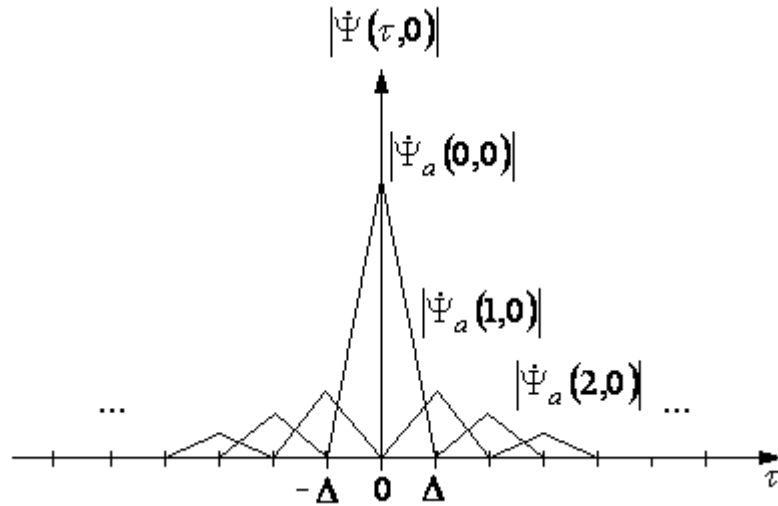


Рис.4.12. Модуль временной ФН кодированной пачки импульсов.

Для обеспечения максимального сжатия в сечении задержки и одновременно минимального уровня боковых лепестков идеально было бы, что

$$\dot{\Psi}_a(m, 0) = \begin{cases} 1, m = 0 \\ 0, m \neq 0 \end{cases}, \quad (4.26)$$

тогда сумма в (4.25) будет иметь единственное значение $\dot{\Psi}_0(\tau, 0)$, которое имеет длительность 2Δ , а в случае прямоугольного импульса ($\dot{S}_0(t)$) Δ , по уровню 0.5. В тоже время длительность сигнала равна $N\Delta$.

Таким образом $k_{сж} = N$. Очевидно, что база сигнала в случае, когда $\dot{S}_0(t)$ простой сигнал, определяется как $B = N\Delta \frac{1}{\Delta} = N$. Однако кодовой последовательности, для которой выполнялось бы выражение (4.26) не существует. Действительно у любой кодовой последовательности $\dot{a}_0 \neq 0$ и $\dot{a}_{N-1} \neq 0$, тогда, по крайней мере $\dot{\Psi}_a(N-1, 0) = \frac{E_0}{E} \dot{a}_{N-1} a_0^* \neq 0$.

Т.о. сигналов с идеальной ФН не существует. Однако, существует достаточно много кодовых последовательностей, ФН для которых отличается от идеальной на приемлемую с точки зрения практики величину.

Кодовая последовательность может быть бинарной ($a_i = \pm 1$), двоичной ($a_i \in \{0, 1\}$), троичной ($a_i \in \{0, \pm 1\}$), p -ичной ($a_i \in \left\{0, \pm 1, \dots, \frac{p-1}{2}\right\}$).

На практике используются также полифазные последовательности ($a_i = \exp\left(j2\pi \frac{i}{p}\right), i = 1, p$).

Рассмотрим широко распространенный частный случай, когда $a_i = \pm 1$. Сигналы с такой кодовой последовательностью называют **фазоманипулированными**.

В этом случае $\dot{\Psi}_a(N-1, 0) = \pm \frac{1}{N}$. Т.о. боковой лепесток ФН кодовой последовательности по модулю удовлетворяет неравенству

$$|\dot{\Psi}_a(i, 0)| \geq \frac{1}{N}. \quad (4.27)$$

Ясно, что сигналом с идеальной в смысле (4.27) ФН можно считать фазоманипулированные сигналы, у которых

$$\dot{\Psi}_a(i, 0) = \begin{cases} 1, & i = 0, \\ \pm \frac{1}{N}, & i \neq 0. \end{cases} \quad (4.28)$$

а) Сигналы, кодированные кодом Баркера

Кодовые последовательности, для которых выполняется свойство (4.28) существуют, и называются **последовательностями Баркера**.

К сожалению, существует только девять таких последовательностей при $N = 2, 3, 4, 5, 7, 11, 13$. Доказано, что не существует

последовательностей Баркера нечетной длины для $N > 13$. Вместе с тем не обнаружено последовательностей Баркера с четной длиной кроме $N = 2, 4$.

| N | Кодовая последовательность | $\Psi_a(i, 0), i = 0, 1, \dots, N - 1$ |
|-----|----------------------------|--|
| 2 | ++ | 2 + |
| 2 | -+ | 2 - |
| 3 | ++- | 3 0 - |
| 4 | +++ | 4 - 0 + |
| 4 | +++ - | 4 + 0 - |
| 5 | ++++ | 5 0 + 0 + |
| 7 | ++++ - - + - | 7 0 - 0 - 0 - |
| 11 | ++++ - - - + - - - + - | 11 0 - 0 - 0 - 0 - 0 - |
| 13 | ++++ + - - + + - + - + | 13 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + |

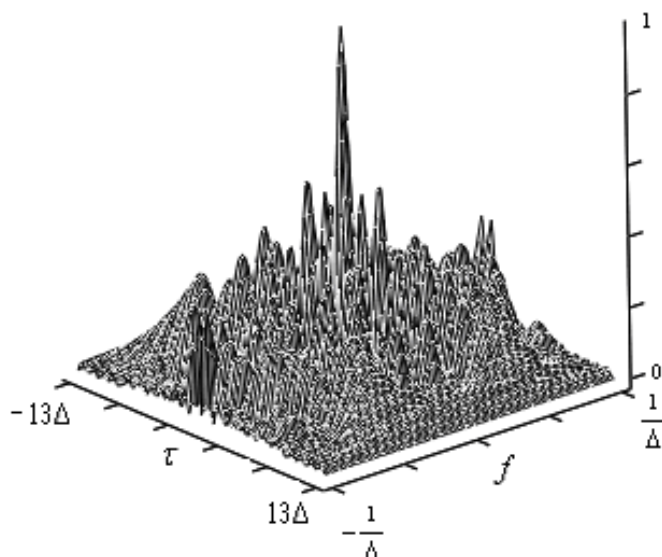


Рис.4.13. Модуль частотно-временной ФН фазоманипулированного сигнала, кодированного кодом Баркера для $N=13$.

б) Сигналы, кодированные M -последовательностями

Для сигналов с большим значением N в качестве двоичной кодовой последовательности часто используют последовательности максимальной длины или (M -последовательности).

Принцип формирования M -последовательности состоит в том, что члены последовательности выбираются таким образом, чтобы обеспечить максимальное число членов до момента, когда последовательность начнет циклически повторяться. M -последовательности существуют для $N = 2^m - 1$.

M -последовательности генерируются с помощью рекуррентных формул вида

$$c_k = \alpha_1 c_{k-1} \oplus \alpha_2 c_{k-2} \oplus \dots \oplus \alpha_m c_{k-m}, \quad k > m, \quad (4.29)$$

где \oplus - сложение по модулю 2, $c_k \in \{0,1\}$, $a_k = 2(c_k - 0.5)$. Первые m коэффициентов c_k , не равные нулю одновременно, выбираются произвольно.

Коэффициенты в формуле (4.29) можно определить из таблицы

| m | N | α_1 | α_2 | α_3 | α_4 | α_5 | α_6 | α_7 | α_8 |
|-----|-----|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| 2 | 3 | 1 | 1 | | | | | | |
| 3 | 7 | 1 | 0 | 1 | | | | | |
| 4 | 15 | 1 | 0 | 0 | 1 | | | | |
| 5 | 31 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | | | |
| 6 | 63 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | | |
| 7 | 127 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | |
| 8 | 255 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |

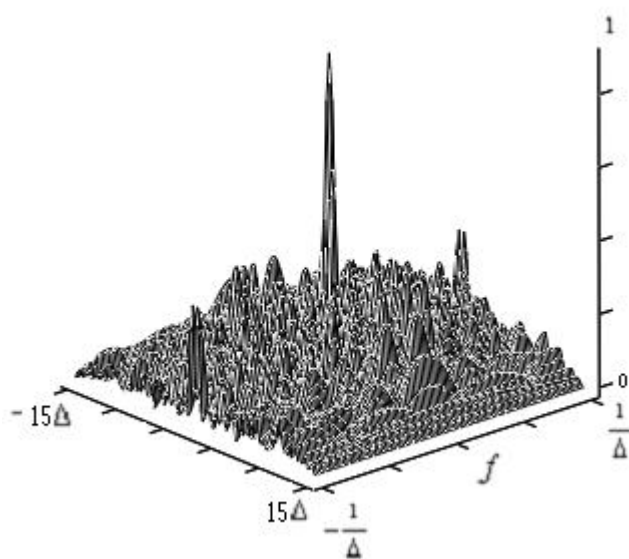
M -последовательности обладают идеальной ФН при циклическом сдвиге элементов последовательности

$$\Phi_a(m,0) = \frac{E_0}{E} \sum_{k=1}^{k=N} \dot{a}_{(k+m), \text{mod } N} a_k^* = \begin{cases} 1, & i=0, \\ \pm \frac{1}{N}, & i \neq 0. \end{cases} \quad (4.30)$$

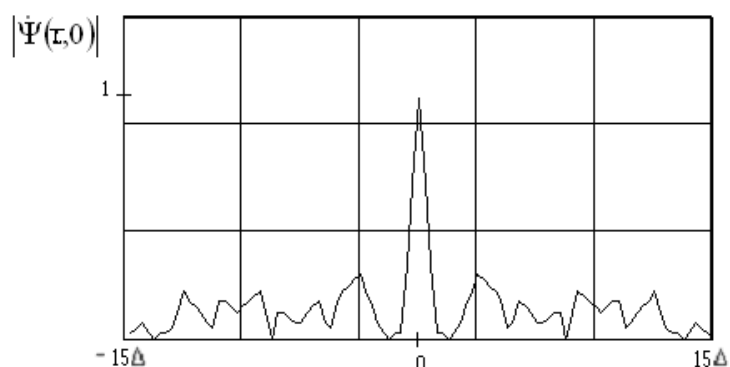
где запись $r = (k+m), \text{mod } N$ означает вычисление индекса по модулю N , т.е. индекс r равен остатку от деления $(k+m)$ на N . Т.о. M -последовательности оптимальны при передаче смежных пакетов.

Для обычной ФН (4.23) уровень боковых лепестков M -последовательности удовлетворяет неравенству

$$|\Psi_a(i,0)| \approx \frac{1}{\sqrt{N}}. \quad (4.31)$$



а)



б)

Рис.4.14. Модуль частотновременной ФН а) и временная ФН б) фазоманипулированного сигнала, кодированного M -последовательностью для $N=15$.

На основе M -последовательностей часто формируют ансамбли сигналов, в которых сигналы помимо хороших автокорреляционных характеристик обладают хорошими взаимокорреляционными свойствами. Эти ансамбли используют в системах связи для организации многопользовательского режима с кодовым разделением каналов. Наиболее часто используются последовательности Голда и Кассами.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

ПШС обычно обеспечивают хорошие свойства во временной области. Так например импульсы, кодированные кодом Баркера, обеспечивают идеальную ФН во временной области. На основе M -последовательностей часто формируют ансамбли сигналов, в которых сигналы помимо хороших автокорреляционных характеристик обладают хорошими взаимокорреляционными свойствами.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Каковы основные свойства сигналов, кодированных M -последовательностями?
2. Сравните между собой сигналы, кодированные кодом Баркера и сигналы, кодированные M -последовательностями.
3. Сравните между собой ЛЧМ импульс и сигнал с тем же значением базы, кодированный M -последовательностью?
4. Каков уровень боковых лепестков фазоманипулированных сигналов, кодированных M -последовательностью?
5. Как формируются сигналы, имеющие многолепестковую функцию неопределенности?
6. Как формируются сигналы, имеющие кнопочную функцию неопределенности?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная литература

1. Радиотехнические системы: Учеб. Для вузов по спец. «Радиотехника»/ Ю.П.Гришин, В.П.Ипатов, Ю.М.Казаринов и др.; Под ред. Ю.М.Казаринова. – М.: Высш. шк., 1990. – 496С.
2. Информационные технологии в радиотехнических системах/ под ред. И.Б. Федорова. - Москва: Изд. МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2003. - С.671.
3. Перов А.И. Статистическая теория радиотехнических систем. – М.: Радиотехника, 2003г.–400с.
4. Горячкин О.В. Лекции по статистической теории систем радиотехники и связи. – М.:Радиотехника, 2008. – 192 с.

Дополнительная литература

1. Ван Трис. Г. Теория обнаружения, оценок и модуляции, Т.1. - М.:Сов.радио,1972. – С.744.
2. Тихонов В.И., Харисов В.Н. Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем. - М.: Радио и связь, 1991г.
3. Сосулин Ю.Г. Теоретические основы радиолокации и радионавигации. - М.: Радио и связь, 1992г.- С.304.
4. Радиотехнические системы/ под ред. Дымовой А.И. – М.: «Сов. радио», 1975. – С.439.
5. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. Книга первая. - М.: Сов. Радио, 1969. –С.752.
6. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. Книга вторая. - М.: Сов. Радио, 1974. –С.504.
7. Тихонов В.И., Харисов В.Н. Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем. – М.: Горячая линия - Телеком, 2014г. – 607с.
8. Фалькович С.Е. Оценка параметров сигналов. - М.: Сов. Радио, 1970. –С.336.
9. Теоретические основы радиолокации/ под ред. Дулевича В.Е. - М.: «Сов. радио», 1978. – С.607.
- 10.Кловский Д.Д. Теория передачи сигналов. М., "Сов. радио", 1973.
11. Кловский Д.Д. Теория электрической связи. – М.: Радиотехника, 2009. – 648с.
- 12.Финк Л.М. Теория передачи дискретных сообщений. –М.: «Сов.радио», 1970. – 728С.
- 13.Кук Ч., Бернфельд М. Радиолокационные сигналы. Пер. с англ. под ред. В.С.Кельзона. – М.: «Сов. радио», 1971. – 568С.