

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО СВЯЗИ**  
Федеральное государственное образовательное бюджетное учреждение высшего профессионального  
образования  
**«ПОВОЛЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИЙ И  
ИНФОРМАТИКИ»**

Кафедра Мультисервисных сетей и информационной безопасности

**Н.В. Киреева, Л.Р. Чупахина**

**Методические указания к лабораторной работе**  
**«Исследование методов аппроксимации функции**  
**распределения вероятностей в системах массового**  
**обслуживания»**

**Методические указания к выполнению лабораторной работы**  
**по специальностям: 11.03.02, 10.05.02**

**Самара, 2015**

УДК

ББК

Рекомендовано к изданию методическим советом ПГУТИ,

Протокол № 18 ,от 02.04.2015 г.

**Рецензент:**

Доцент кафедры МСИБ, к.т.н. В.В. Пугин

Киреева, Н.В. Чупахина, Л.Р.

Исследование методов аппроксимации функции распределения вероятностей в системах массового обслуживания: методические указания к выполнению лабораторной работы / Н.В. Киреева, Л.Р. Чупахина. - Самара: ПГУТИ, 2015. – 28с.

Методические указания «Исследование методов аппроксимации функции распределения вероятностей в системах массового обслуживания» содержат необходимую информацию для написания лабораторных работ, разработано в соответствии с ФГОС ВПО по направлению подготовки специальностей 11.03.02, 10.05.02 и предназначено для выполнения лабораторных работ студентами.

©, Киреева Н.В., Чупахина Л.Р., 2015

## Лабораторная работа

### «Исследование методов аппроксимации функции распределения вероятностей в системах массового обслуживания»

**Цель работы:** изучить методы аппроксимации функций распределения вероятностей в системе массового обслуживания типа  $G/G/1$ .

#### Определение систем массового обслуживания

Система массового обслуживания (СМО) – система, которая производит обслуживание поступающих в неё требований. Обслуживание требований в СМО производится обслуживающими приборами.

В зависимости от наличия возможности ожидания поступающими требованиями начала обслуживания СМО подразделяются на:

- системы с потерями, в которых требования, не нашедшие в момент поступления ни одного свободного прибора, теряются;
- системы с ожиданием, в которых имеется накопитель бесконечной ёмкости для буферизации поступивших требований, при этом ожидающие требования образуют очередь;
- системы с накопителем конечной ёмкости (ожиданием и ограничениями), в которых длина очереди не может превышать ёмкости накопителя; при этом требование, поступающее в переполненную СМО (отсутствуют свободные места для ожидания), теряется.

Общий вид обозначения системы массового обслуживания (СМО) использует классификацию Кендалла-Башарина, основанная на пяти символах  $A/B/m/K/N$ ,

где  $A$  – обозначает распределение интервалов во входном потоке,

$B$  – распределение времени обслуживания,

$m$  – число обслуживающих приборов в системе (каналов, линий),

$K$  – число мест в буфере,

$N$  – количество источников нагрузки.

В случае отсутствия одного или двух последних индексов ( $A/B/m/K/M$  или  $A/B/m/K$ ) предполагается, что его значение сколь угодно велико, т.е. неограниченно.

$D/M/2/20$  – обозначает СМО с двумя обслуживающими приборами с постоянным временем между двумя последовательно поступающими требованиями, показательным распределением временем обслуживания и накопителем ёмкостью 20 требований.

$M/G/1$  – одноканальная система массового обслуживания с простейшим входящим потоком, произвольным распределением времени обслуживания, неограниченной очередью.

Показательное распределение обладает Марковским свойством: для любого момента времени вероятность наступления события определяется только его состоянием в этот момент времени и не зависит от предыстории процесса.

Каждая СМО обладает определенной структурой, характеризующейся совокупностью параметров. По составу СМО можно разделить на СМО с одним каналом обслуживания (одноканальные СМО) и  $m$  каналами обслуживания (многоканальные СМО). В свою очередь, многоканальные СМО могут содержать одинаковые и различные по производительности каналы обслуживания.

Существуют следующие основные модели, описания СМО.

$M/M/1$  – система с одной обслуживающей линией, пуассоновским входящим потоком с экспоненциальным распределением времени обслуживания и дисциплиной обслуживания FIFO.

FIFO представляет собой механизм обслуживания очередей, в соответствии с которым порядок постановки пакетов в очередь совпадает с

порядком их извлечения из очереди для обработки (передачи). Очередь FIFO схематически представлена на рисунке 1.



Рисунок 1 Очередь FIFO

Первая буква  $M$  в обозначении системы говорит о том, что интервалы времени между пакетами на входе системы распределены по экспоненциальному закону, что в свою очередь указывает на пуассоновский поток событий, который можно считать разновидностью Марковского случайного процесса. Вторая буква  $M$  в обозначении говорит о марковости процесса на выходе обслуживающей линии, что определяется экспоненциальным характером распределения времени обслуживания заявок на выходе.

$M/G/1$  – система с одной обслуживающей линией, пуассоновским входящим потоком с произвольным распределением времени обслуживания и дисциплиной обслуживания FIFO.

$M/D/1$  – система с одной обслуживающей линией, пуассоновским входящим потоком с постоянным временем обслуживания и дисциплиной обслуживания FIFO.

$G/G/1$  – система, у которой процесс  $U(t)$  уже не будет марковским, в него вложен марковский процесс, определенный в момент поступления требований.

Для реализации данных систем, необходимо задать соответствующие функции распределения интервалов времени между пакетами на входе системы и длительности обслуживания пакетов.

## Простейший поток случайных событий и его свойства

На практике, при исследовании реальных систем, редко известны законы распределения и обслуживания поступающего на вход системы трафика. Невозможность в численном виде исследовать и оценить характеристики реального трафика позволяет рассматривать его в виде потока случайных событий, считая событием поступление пакета на обрабатывающее устройство.

Входящий поток во многом определяет характеристики производительности функционирования системы массового обслуживания. Поэтому правильное описание потока запросов, поступающих в случайные моменты времени в реальную систему, и идентификация его параметров являются весьма важной задачей.

При рассмотрении процессов, протекающих в системе с дискретными состояниями и непрерывным временем, часто бывает удобно представить себе процесс так, как будто переходы системы из состояния в состояние происходят под действием каких-то потоков событий.

Потоком событий называется последовательность однородных событий, следующих одно за другим в какие-то, вообще говоря, случайные моменты времени. Положение каждой точки на оси случайно.

1. Поток событий называется регулярным, если события следуют одно за другим через строго определенные промежутки времени, что редко встречается на практике.

2. Поток событий называется стационарным, если вероятность попадания того или иного числа событий на участок времени длиной  $\tau$  зависит только от длины участка и не зависит от того, где именно на оси времени расположен этот участок (однородность по времени) – вероятностные характеристики такого потока не должны меняться от времени. В частности, так называемая интенсивность (или плотность) потока событий (среднее число событий в единицу времени) постоянна.

3. Поток событий называется потоком без последствия, если для любых непересекающихся участков времени число событий, попадающих на один из них, не зависит от того, сколько событий попало на другой (или другие, если рассматривается больше двух участков). Отсутствие последствия в потоке означает, что события, образующие поток, появляются в последовательные моменты времени независимо друг от друга.

4. Поток событий называется ординарным, если вероятность попадания на элементарный участок двух или более событий пренебрежительно мала по сравнению с вероятностью попадания одного события (события в потоке приходят поодиночке, а не парами, тройками и т.д.).

Должно выполняться условие (1) для  $\Delta t$ :

$$P_1(t, \Delta t) \gg P_{>1}(t, \Delta t), \quad (1)$$

где  $P_1(t, \Delta t)$  – вероятность того, что за  $\Delta t$  произойдет одно событие и  $P_{>1}(t, \Delta t)$  – вероятность того, что за  $\Delta t$  произойдет более одного события.

Поток событий, обладающий всеми тремя свойствами, называется простейшим (или стационарным пуассоновским). Нестационарный пуассоновский поток обладает только свойствами 2 и 3.

### **Аппроксимация функций распределений, методы аппроксимации**

Задачей лабораторной работы является аппроксимация неизвестной функции плотности распределения, описывающей закон длительности поступления пакетов и обслуживания в мультисервисной сети.

Аппроксимация, или приближение – научный метод, состоящий в замене одних объектов другими, в том или ином смысле близкими к исходным, но более простыми. Иными словами, аппроксимация некоторой функции  $y = f(x)$  заключается в замене другой функцией  $g(x, a_0, a_1, \dots, a_n)$

так, чтобы отклонение  $g$  от  $f(x)$  удовлетворяло в некоторой области (на множестве  $X$ ) определенному условию.

В современном телекоммуникационном процессе для аппроксимации характеристики наиболее часто используют следующие функции:

– степенной полином (степенная или полиномиальная аппроксимация);

Одним из наиболее распространенных способов аппроксимации заключается в представлении нелинейной характеристики в виде полинома (2) (многочлена)  $n$  – ой степени относительно рабочей точки  $(x_0, y_0)$ :

$$y - y_0 = a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n, \quad (2)$$

где  $y_0 = y(x_0) = a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  – коэффициенты полинома. Зависят от положения рабочей точки на характеристике;

$n$  – порядок полинома. Определяется требуемой точностью расчетов.

*Виды полиномиальной аппроксимации:*

1) Полином второй степени (3):

$$i(u) = i(U_0) + a_1(u - U_0) + a_2(u - U_0)^2, \quad (3)$$

используется, если рабочая точка (определяется постоянным напряжением  $U_0$ ) расположена на начальном участке характеристики, имеющем вид квадратичной параболы, и подводимое к нелинейным элементам (НЭ) напряжение сигнала не выходит за начало характеристики (за точку  $U_H$ , которая определяется из условия:  $i(i(U_H) = 0) = 0$ ). На рисунке 2 показана характеристика полинома второй степени.

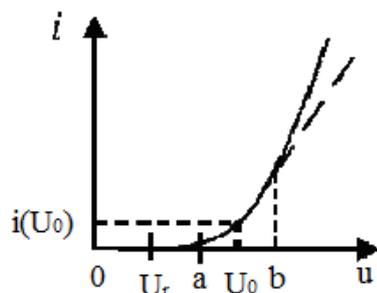


Рисунок 2 Характеристика, для аппроксимации которой требуется полином второй степени

Используемые обозначения:

–  $i(U_0)$  – ток покоя;

–  $(a, b)$  – используемый участок вольт-амперной характеристики (ВАХ).

2) Неполный полином третьей степени (4):

$$i(u) = i(U_0) + a_1(u - U_0) + a_3(u - U_0)^3, \quad (4)$$

– используется, если рабочая точка является точкой перегиба характеристики и напряжение сигнала не выходит за пределы напряжения насыщения  $+U_{\max}$ . На рисунке 3 показана характеристика полинома третьей степени.

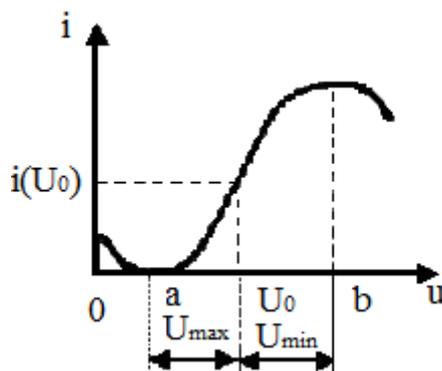


Рисунок 3 Характеристика, для аппроксимации которой требуется полином третьей степени

3) Полином высокой (пятой и более) степени используется, если рабочая точка находится на нижнем сгибе характеристики и изменение напряжения сигнала велико. На рисунке 4 показана характеристика данного полинома.

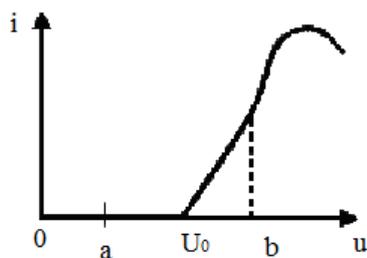


Рисунок 4 Характеристика, для аппроксимации которой требуется полином высокой степени

4) Экспоненциальный полином (частным случаем которого является показательная или экспоненциальная аппроксимация);

Экспоненциальная аппроксимация полезна в том случае, если скорость изменения данных непрерывно возрастает. Однако для данных, которые содержат нулевые или отрицательные значения, этот вид приближения неприменим.

Применяется при очень больших амплитудах входного сигнала. Заключается в замене реальной характеристики идеализированной, линейно-ломаной, составленной из отрезков прямых линий, являющихся касательными к характеристике.

*Виды аппроксимации кусочно-линейной функцией:*

1) Два линейных отрезка используется, если сигнал захватывает нижний сгиб и линейный участок характеристики, как показано на рисунке 5.

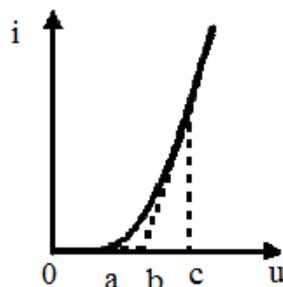


Рисунок 5 Характеристика при числе аппроксимирующих отрезков 2  
Используемое обозначение:  $(a, c)$  – используемый участок ВАХ.

2) Три линейных отрезка используется, если сигнал захватывает нижний и верхний сгибы характеристики, как показано на рисунке 6.

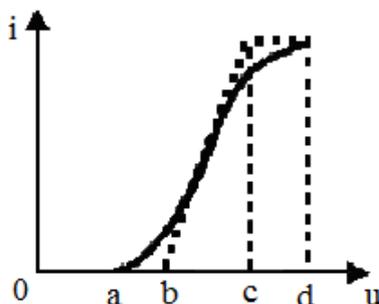


Рисунок 6 Характеристика при числе аппроксимирующих отрезков 3

Используемое обозначение:  $(a, d)$  – используемый участок ВАХ (вольт-амперная характеристика).

3) Четыре линейных отрезка используется, если сигнал достигает также и падающего участка характеристики, как показано на рисунке 7.

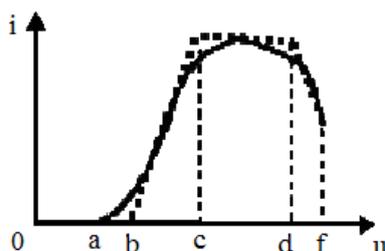


Рисунок 7 Характеристика при числе аппроксимирующих отрезков 4.

Используемое обозначение:  $(a, f)$  – используемый участок ВАХ

4) Кусочно-нелинейная функция (аппроксимация);

5) Степенная функция;

Степенная аппроксимация полезна для описания монотонно возрастающей либо монотонно убывающей величины, например, расстояния, пройденного разгоняющимся автомобилем. Использование степенной аппроксимации невозможно, если данные содержат нулевые или отрицательные значения.

6) Трансцендентальные функции (гиперболический тангенс и синус, функция Гаусса, тригонометрические функции и др.).

### **Анализ трафика мультисервисной сети с помощью сетевого анализатора Wireshark и программы EasyFit Professional**

Рассмотрим случай, когда на вход обслуживающего устройства мультисервисной сети поступает случайно и непрерывно с определенным объемом информации поступает поток пакетов. Неизвестны величины

интервалов времени между пакетами  $\tau$  и длительности обслуживания пакетов  $\xi$  (рисунок 8).

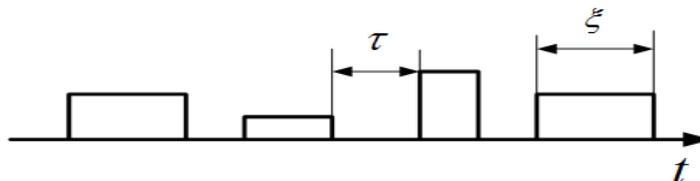


Рисунок 8 – Параметры узла мультисервисной сети

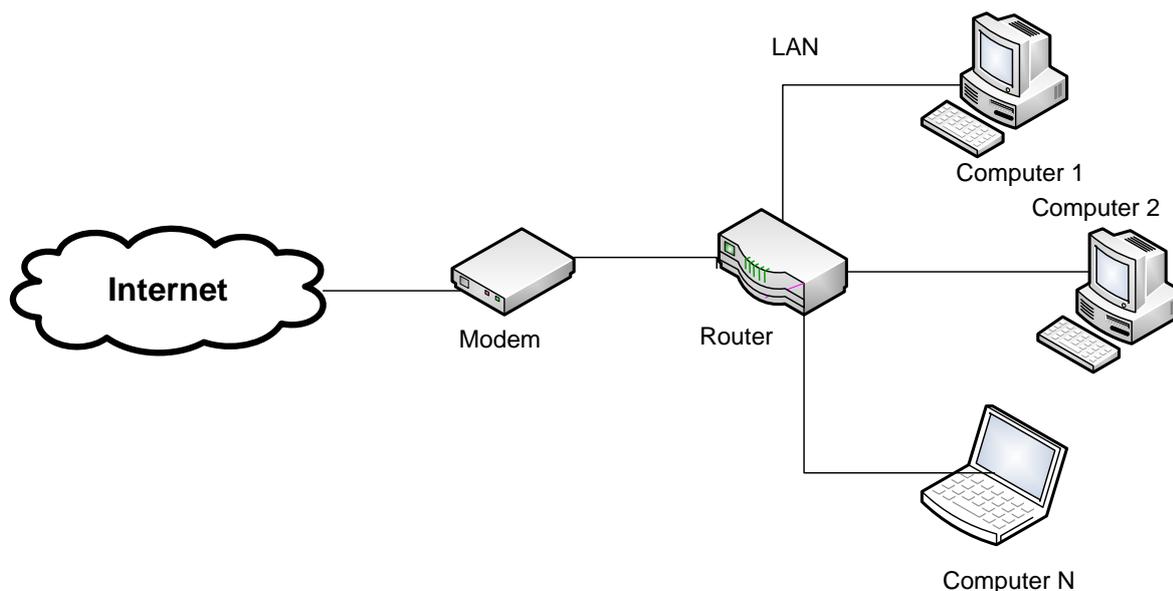


Рисунок 9 – Схема снятия трафика

Сетевой анализатор Wireshark – это достаточно известный инструмент для захвата и анализа сетевого трафика. Программа Wireshark работает с подавляющим большинством известных протоколов, имеет понятный и логичный графический интерфейс и мощнейшую систему фильтров.

EasyFit Professional – предназначен для анализа данных и моделирования приложений, позволяющие соответствовать распределению вероятностей данных, выбрать лучшую модель, а также применить результаты анализа для принятия оптимальных решений.

Программа EasyFit Professional сочетает в себе классические методы статистического анализа и инновационные методы анализа данных.

Особенности продукта включают в себя:

- поддержка более 50 непрерывных и дискретных распределений;
- мощный автоматизированный режим в сочетании с ручным режимом
- интерактивные графики;
- критерий согласия испытаний;
- генерации случайных чисел;
- простой в использовании интерфейс;
- комплексная система справки.
- интеграция в Microsoft Office Excel.

Исследования трафика мультисервисных сетей показывают, что процессы поступления и обслуживания пакетов (особенно на уровне доступа) описываются распределениями с «тяжелым» хвостом (РТХ). Распределения Парето и Вейбулла при определенных параметрах являются именно таковыми, поэтому возможно их использование при моделировании СМО общего вида типа  $G/G/1$ , обрабатывающего мультимедийный трафик мультисервисных сетей.

В книге Л. Клейнрока обоснована возможность аппроксимации произвольных плотностей распределения вероятностей в виде суммы затухающих экспонент. Это делает возможным применение аппарата классической теории массового обслуживания к анализу работы систем  $G/G/1$ , а именно, решение интегрального уравнения (ИУ) Линдли спектральным методом.

Уравнение Линдли имеет следующий вид (5):

$$F(x) = \int_0^{\infty} K(x-y)dF(y), \quad (5)$$

где  $F$  – функция распределения времени ожидания требования в очереди;  $K$  – ядро, связывающее произвольную функцию распределения вероятностей интервалов времени между поступлениями соседних требований  $A(t)$  и произвольную функцию распределения длительности обслуживания требований  $B(t)$ .

Аппроксимация функций распределения плотности вероятностей с помощью данного алгоритма может быть использована для прогнозирования поведения потоков трафика в сети.

Представим плотность распределения  $f(x)$ , в нашем случае будем подразумевать  $f(\xi), f(\tau)$ , заданной на промежутке  $[a, b]$ , в виде суммы затухающих экспонент (6), которые соответствуют условию нормировки (16) и имеют минимальную (приемлемую) абсолютную погрешность  $R(x)$ .

$$f_{\text{exp}}(x) = \sum_{k=1}^n a_k e^{-\alpha_k x} + R(x), \quad (6)$$

Пусть  $a=0, b=1$  (общий случай сводится к этому линейной заменой  $x = a + (b-a)x'$ ). Зафиксируем положительное  $m$ . Положим  $\alpha_k = \frac{k}{m}$  и обозначим  $e^{-\frac{x}{m}} = y$ ,  $g(y) = f(-m \ln y)$ . Тогда  $g(y)$  будет гладкой функцией, определенной на отрезке  $[e^{-\frac{1}{m}}, 1]$ , а формула (6) примет вид (7):

$$g(y) = \sum_{k=1}^n a_k y^k + \tilde{R}(y), \quad (7)$$

Разделим обе части формулы (7) на  $y$  и перепишем ее в виде (8):

$$\frac{g(y)}{y} = \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} y^k + \frac{\tilde{R}(y)}{y}, \quad (8)$$

Для определения узлов интерполирования  $y_k$  вспомогательной функции  $g(y) = f(-m \ln y)$  используем формулу нулей полиномов Чебышева (9):

$$y_k = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} \cos \frac{(\pi(2k-1))}{2n}. \quad (9)$$

Для оценки погрешности при этом будет справедлива формула (10):

$$\left| \frac{\tilde{R}(y)}{y} \right| \leq \frac{\max_{y \in [e^{-\frac{1}{m}}, 1]} \left| \left( \frac{g(y)}{y} \right)^{(n)} \right|}{n!} |(y - y_1)(y - y_2) \dots (y - y_n)|, \quad (10)$$

Вычислить коэффициенты  $a_k$  в формуле (7) можно решая СЛАУ (11) относительно неизвестных  $a_k$  методом Гаусса:

$$\sum_{k=1}^n a_k y_j^k = g(y_j), \quad 1 \leq j \leq k. \quad (11)$$

где  $y_k = e^{-x_k} = e^{-\frac{k}{nm}}, \quad k=1, \dots, n.$  (12)

Алгоритм аппроксимации плотности распределения суммами экспонент в случае  $[a, b] = [0, 1]$  выглядит следующим образом.

**Пример.**

Исследуем для примера СМО типа  $P_1/W/1$ , где символы  $P$  и  $W$  означают соответственно распределения Парето и Вейбулла. При этом  $f_1(t)$  и  $f(t)$  имеют вид (13) и (14)

$$f_1(t) = \frac{\alpha_1}{\beta_1} \left(\frac{\beta_1}{t}\right)^{\alpha_1+1}, \quad t > \beta_1, \quad \alpha_1 > 0, \quad \beta_1 > 0, \quad (13)$$

$$f(t) = \alpha \beta^{-\alpha} t^{\alpha-1} e^{-\left(\frac{t}{\beta}\right)^\alpha}, \quad t > 0, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0, \quad (14)$$

где  $\alpha$  – параметр формы,  $\beta$  – масштабный параметр.

Возьмем для определенности следующие параметры используемых распределений  $\alpha_1 = 1, \beta_1 = 2; \alpha = 3, \beta = 1.$

Далее в программе Mathcad вносим следующие параметры согласно скриншотам, указанным ниже:

ORIGIN:= C

$\alpha := 1.5 \quad \beta := 2 \quad m := 1.41:$

$n := 5 \quad k := 1..n$

$$g(y) := \frac{\alpha}{\beta} \left[ \frac{\beta}{(-m \cdot \ln(y))} \right]^{\alpha+1} \quad a := e^{-\frac{2}{m}} \quad b := e^{-\frac{1}{m}}$$

$$y_k := \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} \cdot \cos \left[ \frac{\pi \cdot (2 \cdot k - 1)}{2 \cdot n} \right]$$

$$\underline{\underline{A}} := \begin{bmatrix} (y_1)^1 & (y_1)^2 & (y_1)^3 & (y_1)^4 & (y_1)^5 \\ (y_2)^1 & (y_2)^2 & (y_2)^3 & (y_2)^4 & (y_2)^5 \\ (y_3)^1 & (y_3)^2 & (y_3)^3 & (y_3)^4 & (y_3)^5 \\ (y_4)^1 & (y_4)^2 & (y_4)^3 & (y_4)^4 & (y_4)^5 \\ (y_5)^1 & (y_5)^2 & (y_5)^3 & (y_5)^4 & (y_5)^5 \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{b}} := \begin{pmatrix} g(y_1) \\ g(y_2) \\ g(y_3) \\ g(y_4) \\ g(y_5) \end{pmatrix}$$

$$|A| = 1.183 \times 10^{-12}$$

$$\underline{\underline{a}} := A^{-1} \cdot \underline{\underline{b}}$$

$$\underline{\underline{a}} = \begin{pmatrix} 4.233 \\ -29.86 \\ 167.947 \\ -347.693 \\ 337.186 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} a_{0,0} = 4.233 \\ a_{1,0} = -29.86 \\ a_{2,0} = 167.947 \end{array} \quad \begin{array}{l} a_{3,0} = -347.693 \\ a_{4,0} = 337.186 \end{array}$$

Можно предложить следующие аппроксимации для  $a_1(t)$  и  $b(t)$  из (15), (17)

$$f_{\text{lexp}}(t) = \sum_{k=1}^5 a_k e^{-\alpha_k t} = a_1 e^{-\frac{t}{m}} + a_2 e^{-\frac{2t}{m}} + a_3 e^{-\frac{3t}{m}} + a_4 e^{-\frac{4t}{m}} + a_5 e^{-\frac{5t}{m}}, \quad (15)$$

где  $\alpha_k = \frac{k}{m}$ ,  $m = 1,415$ .

$$f(t) := \frac{\alpha}{\beta} \cdot \left( \frac{\beta}{t} \right)^{\alpha+1}$$

$$f_{\text{exp}}(t) := \frac{\left( a_{0,0} \cdot e^{-\frac{t}{m}} + a_{1,0} \cdot e^{-2 \cdot \frac{t}{m}} + a_{2,0} \cdot e^{-3 \cdot \frac{t}{m}} + a_{3,0} \cdot e^{-4 \cdot \frac{t}{m}} + a_{4,0} \cdot e^{-5 \cdot \frac{t}{m}} \right)}{1}$$

Распределение Парето и его аппроксимация представлены на рис.10, 11.

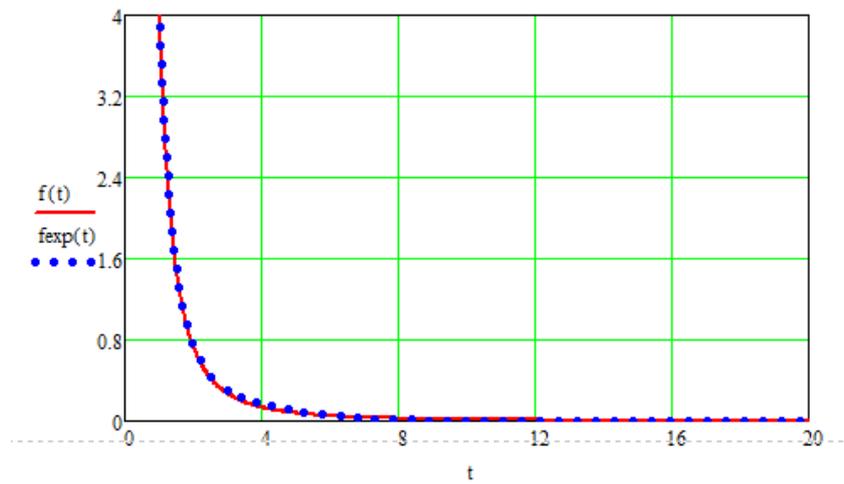


Рисунок 10 Распределение Парето ( $\alpha_1 = 1, \beta_1 = 2$ ) и результат его аппроксимации

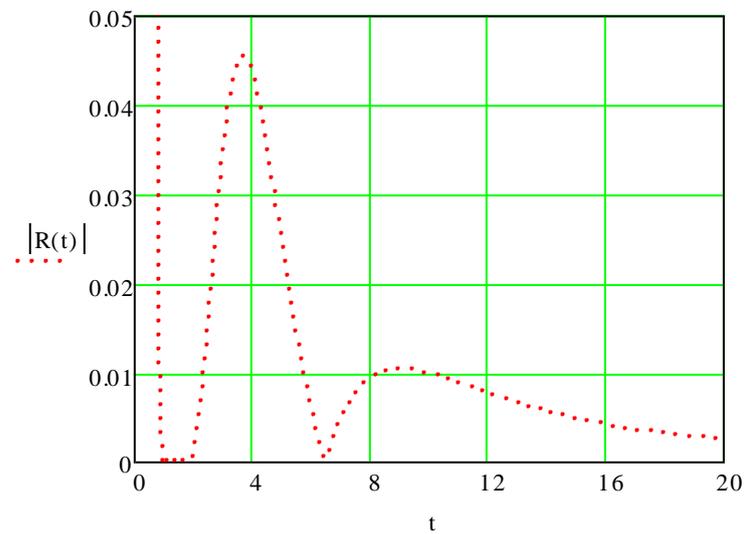


Рисунок 11 График погрешности аппроксимации  $R(t)$  распределения Парето ( $\alpha_1 = 1 \beta_1 = 2$ )

При построении всех графиков учтено, что аппроксимирующее выражение для плотности должно удовлетворять условию нормировки (16):

$$\int_0^{\infty} f(x) dx = 1. \quad (16)$$

$$\int_2^{\infty} f_{\text{exp}}(t) dt = 0.9979$$

Для распределения Вейбулла:

ORIGIN:=C

$\alpha := 0.8$      $\beta := 0.4$      $m := 1.1$

$n := 5$      $k := 1..n$

$$a := e^{\frac{-2}{m}} \quad b := e^{\frac{-1}{m}}$$

$g(y) := \alpha \cdot \beta^{-\alpha} \cdot (-m \cdot \ln(y))^{\alpha-1} \cdot e^{-\left(\frac{-m \cdot \ln(y)}{\beta}\right)^\alpha}$

$y_k := \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} \cdot \cos\left[\frac{\pi \cdot (2 \cdot k - 1)}{2 \cdot n}\right]$

$A := \begin{bmatrix} (y_1)^1 & (y_1)^2 & (y_1)^3 & (y_1)^4 & (y_1)^5 \\ (y_2)^1 & (y_2)^2 & (y_2)^3 & (y_2)^4 & (y_2)^5 \\ (y_3)^1 & (y_3)^2 & (y_3)^3 & (y_3)^4 & (y_3)^5 \\ (y_4)^1 & (y_4)^2 & (y_4)^3 & (y_4)^4 & (y_4)^5 \\ (y_5)^1 & (y_5)^2 & (y_5)^3 & (y_5)^4 & (y_5)^5 \end{bmatrix}$

$b := \begin{pmatrix} g(y_1) \\ g(y_2) \\ g(y_3) \\ g(y_4) \\ g(y_5) \end{pmatrix}$

$|A| = 1.956 \times 10^{-13}$

$a := A^{-1} \cdot b$

$a = \begin{pmatrix} 0.07 \\ 1.085 \\ -0.53 \\ 1.571 \\ -0.299 \end{pmatrix}$

$a_{0,0} = 0.07$      $a_{3,0} = 1.571$

$a_{1,0} = 1.085$      $a_{4,0} = -0.299$

$a_{2,0} = -0.53$

$$f_{\text{exp}}(t) = \sum_{k=1}^5 b_k e^{-\beta_k t} = b_1 e^{-\frac{t}{m}} + b_2 e^{-\frac{2t}{m}} + b_3 e^{-\frac{3t}{m}} + b_4 e^{-\frac{4t}{m}} + b_5 e^{-\frac{5t}{m}}, \quad (17)$$

где  $\beta_k = \frac{k}{m}$ ,  $m=1.1$ .

$$f(t) := \alpha \cdot \beta^{-\alpha} \cdot (t)^{\alpha-1} \cdot e^{-\left(\frac{t}{\beta}\right)^\alpha}$$

$$f_{exp}(t) := \frac{\left( a_{0,0} \cdot e^{\frac{-t}{m}} + a_{1,0} \cdot e^{-2 \cdot \frac{t}{m}} + a_{2,0} \cdot e^{-3 \cdot \frac{t}{m}} + a_{3,0} \cdot e^{-4 \cdot \frac{t}{m}} + a_{4,0} \cdot e^{-5 \cdot \frac{t}{m}} \right)}{1}$$

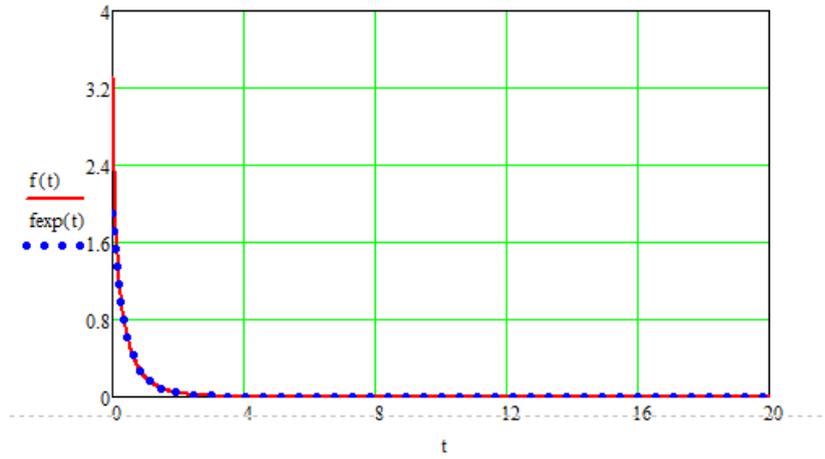


Рисунок 12 Распределение Вейбулла ( $\alpha_1 = 0,8$ ,  $\beta_1 = 0,4$ ) и результат его аппроксимации

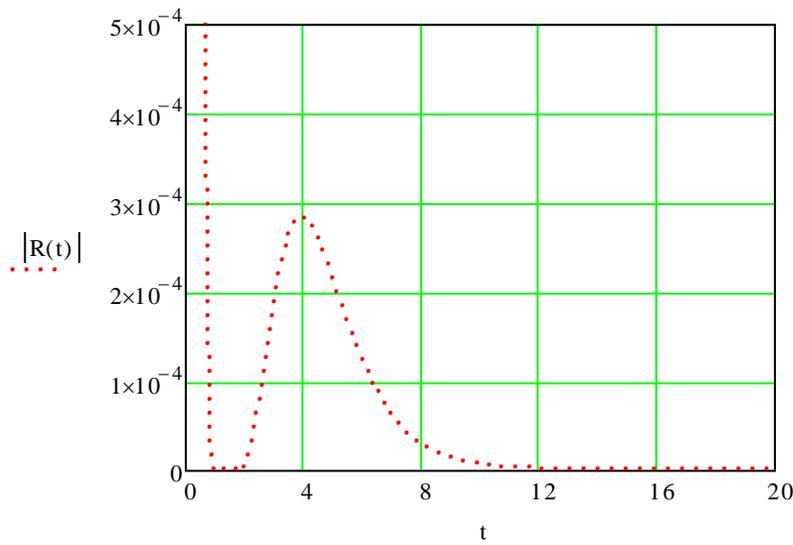


Рисунок 13 График погрешности аппроксимации  $R(t)$  распределения Вейбулла ( $\alpha_1 = 0,8$ ,  $\beta_1 = 0,4$ )

Для аппроксимации заданной плотности распределения  $f(x)$  необходимо:

1. Задать количество узлов интерполирования  $n$  и значение параметра  $m > 0$ . Количество узлов интерполирования  $n$  выбирается с учетом вносимой точности погрешности и выполнением поставленной задачи и условия нормировки аппроксимируемой функции. Проведенные эксперименты показали, что приемлемым числом узлов интерполирования является  $n = 5$ .

2. Определить узлы интерполирования  $y_k$  вспомогательной функции  $g(y) = f(-m \ln y)$  по формуле (9).

3. Вычислить коэффициенты  $a_k$ , решая систему линейных алгебраических уравнений (11).

4. Записать аппроксимирующую функцию в виде формулы (6).

**Замечание 1.** В случае произвольного промежутка  $[a, b]$ , как отмечалось выше, достаточно применить приведенный алгоритм к функции  $\tilde{f}(x') = f(a + (b - a)x')$ , где  $x' \in [0, 1]$ , а затем вернуться к исходной переменной  $x = a + (b - a)x'$ .

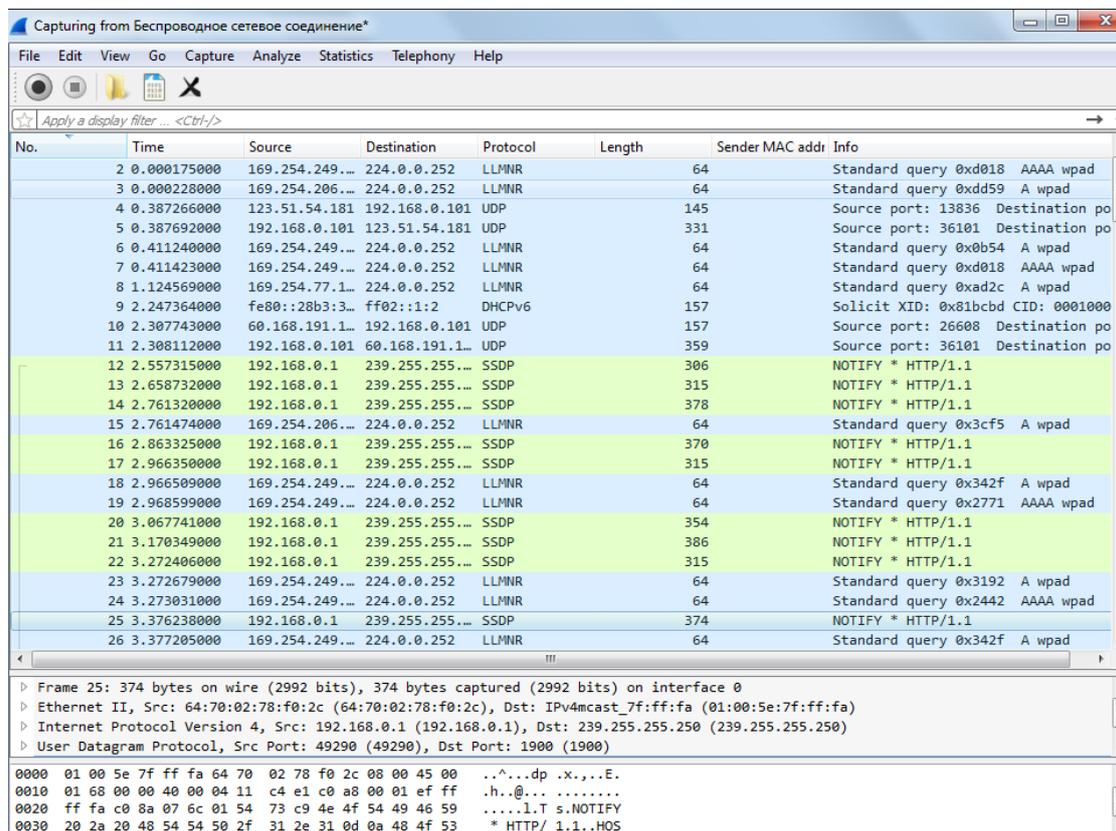
**Замечание 2.** Значение параметра  $m$  определяется экспериментально для каждой аппроксимируемой функции  $f(x)$ , из условия минимума погрешности аппроксимации заданной плотности распределения в некоторой функциональной норме. Ввиду сложности аналитического или численного решения соответствующей нелинейной вариационной задачи, для конкретных примеров осуществлялся экспериментальный перебор значений параметра  $m$  на равномерной сетке, покрывающей заданный отрезок  $[m_0, m_1]$ , и выбиралось то значение, для которого норма погрешности оказывалась наименьшей.

## Порядок выполнения работы:

1. Снятие трафика в программе WireShark.

1.1 На рабочем столе ПК открыть ярлык  WireShark.

1.2 Далее нажать Capture → Options. В открывшемся окне, выбрать необходимое сетевое соединение и нажать Start.



No.	Time	Source	Destination	Protocol	Length	Sender MAC addr	Info
2	0.000175000	169.254.249...	224.0.0.252	LLMNR	64		Standard query 0xd018 AAAA wpa
3	0.000228000	169.254.206...	224.0.0.252	LLMNR	64		Standard query 0xdd59 A wpa
4	0.387266000	123.51.54.181	192.168.0.101	UDP	145		Source port: 13836 Destination po
5	0.387692000	192.168.0.101	123.51.54.181	UDP	331		Source port: 36101 Destination po
6	0.411240000	169.254.249...	224.0.0.252	LLMNR	64		Standard query 0xb54 AAA wpa
7	0.411423000	169.254.249...	224.0.0.252	LLMNR	64		Standard query 0xd018 AAAA wpa
8	1.124569000	169.254.77.1...	224.0.0.252	LLMNR	64		Standard query 0xad2c A wpa
9	2.247364000	fe80::28b3:3...	ff02::1:2	DHCPv6	157		Solicit XID: 0x81bcd CID: 0001000
10	2.307743000	60.168.191.1...	192.168.0.101	UDP	157		Source port: 26608 Destination po
11	2.308112000	192.168.0.101	60.168.191.1...	UDP	359		Source port: 36101 Destination po
12	2.557315000	192.168.0.1	239.255.255...	SSDP	306		NOTIFY * HTTP/1.1
13	2.658732000	192.168.0.1	239.255.255...	SSDP	315		NOTIFY * HTTP/1.1
14	2.761320000	192.168.0.1	239.255.255...	SSDP	378		NOTIFY * HTTP/1.1
15	2.761474000	169.254.206...	224.0.0.252	LLMNR	64		Standard query 0x3cf5 A wpa
16	2.863325000	192.168.0.1	239.255.255...	SSDP	370		NOTIFY * HTTP/1.1
17	2.966350000	192.168.0.1	239.255.255...	SSDP	315		NOTIFY * HTTP/1.1
18	2.966509000	169.254.249...	224.0.0.252	LLMNR	64		Standard query 0x342f A wpa
19	2.968599000	169.254.249...	224.0.0.252	LLMNR	64		Standard query 0x2771 AAAA wpa
20	3.067741000	192.168.0.1	239.255.255...	SSDP	354		NOTIFY * HTTP/1.1
21	3.170349000	192.168.0.1	239.255.255...	SSDP	386		NOTIFY * HTTP/1.1
22	3.272406000	192.168.0.1	239.255.255...	SSDP	315		NOTIFY * HTTP/1.1
23	3.272679000	169.254.249...	224.0.0.252	LLMNR	64		Standard query 0x3192 A wpa
24	3.273031000	169.254.249...	224.0.0.252	LLMNR	64		Standard query 0x2442 AAAA wpa
25	3.376238000	192.168.0.1	239.255.255...	SSDP	374		NOTIFY * HTTP/1.1
26	3.377205000	169.254.249...	224.0.0.252	LLMNR	64		Standard query 0x342f A wpa

```
0000 01 00 5e 7f ff fa 64 70 02 78 f0 2c 08 00 45 00  .....dp .x...E.
0010 01 68 00 00 40 04 11 c4 e1 c0 a8 00 01 ef ff    .h..@... ..
0020 ff fa c0 8a 07 6c 01 54 73 c9 4e 4f 54 49 46 59  ....l.T s.NOTIFY
0030 20 2a 20 48 54 54 50 2f 31 2e 31 0d 0a 48 4f 53  * HTTP/ 1.1..HOS
```

1.3 Для сохранения результата необходимо нажать File → Export Packet Dissections → as «Plain Text» file...

Назвать файл, выбрать тип файлы «Plain text (\*.txt)», разместить его на рабочем столе. Убрать галочку с «Packet details» и нажать Сохранить.

2. Открываем Microsoft Office Excel. Из файла Текстовый документ (\*.txt) копируем результат и вставляем в новый файл Microsoft Office Excel. При вставке появится значок «Параметры вставки», в котором необходимо выбрать «Использовать мастера импорта текста», и, согласившись со всеми пунктами нажать Готово.

No.	Time	Source	Destination	Protocol	Length	Info
1	0.000000000	78.85.73.122	192.168.1.101	UDP	65	Source port: 19584 Destination port: 34057
2	0.000421000	192.168.1.101	78.85.73.122	UDP	64	Source port: 34057 Destination port: 19584
3	0.009753800	78.85.73.122	192.168.1.101	TCP	69	19652→34057 [PSH, ACK] Seq=1 Ack=1 Win=4056 Len=15
4	0.009791000	192.168.1.101	78.85.73.122	TCP	58	34057→19652 [PSH, ACK] Seq=1 Ack=16 Win=254 Len=4
5	0.380377000	78.85.73.122	192.168.1.101	TCP	60	19652→34057 [ACK] Seq=16 Ack=5 Win=4056 Len=0
6	0.403814000	192.168.1.101	81.19.104.111	TCP	54	54887→443 [FIN, ACK] Seq=1 Ack=1 Win=16383 Len=0
7	0.506465000	81.19.104.111	192.168.1.101	TCP	60	443→54887 [ACK] Seq=1 Ack=2 Win=822 Len=0
8	0.506655000	81.19.104.111	192.168.1.101	TCP	60	443→54887 [FIN, ACK] Seq=1 Ack=2 Win=8225 Len=0
9	0.506731000	192.168.1.101	81.19.104.111	TCP	54	54887→443 [ACK] Seq=2 Ack=2 Win=163 Len=0
10	0.578659000	178.45.251.14	192.168.1.101	TCP	72	7777→54867 [PSH, ACK] Seq=1 Ack=1 Win=58 Len=18
11	0.778474000	192.168.1.101	178.45.251.142	TCP	54	54867→7777 [ACK] Seq=1 Ack=19 Win=164 Len=0
12	1.911809000	188.123.245.1	192.168.1.101	UDP	64	Source port: 46014 Destination port: 34057
13	1.912210000	192.168.1.101	188.123.245.14	UDP	64	Source port: 34057 Destination port: 46014
14	1.960992000	188.123.245.1	192.168.1.101	TCP	81	45776→34057 [PSH, ACK] Seq=1 Ack=1 Win=457 Len=15 TSval=17 TSecr=13138518
15	1.961401000	192.168.1.101	188.123.245.14	TCP	70	34057→45776 [PSH, ACK] Seq=1 Ack=16 Win=259 Len=4 TSval=13 TSecr=17701713
16	2.034884000	188.123.245.1	192.168.1.101	TCP	66	45776→34057 [PSH, ACK] Seq=16 Ack=5 Win=457 Len=0 TSval=17 TSecr=13140181
17	2.118570000	192.168.1.101	178.218.81.217	TCP	66	54898→19225 [SYN] Seq=0 Win=8192 Len=0 MSS=1460 WS=4 SACK_PERM=1
18	2.436886000	188.234.48.5	192.168.1.101	UDP	64	Source port: 51424 Destination port: 34057
19	2.437285000	192.168.1.101	188.234.48.5	UDP	64	Source port: 34057 Destination port: 51424
20	2.487742000	192.168.1.101	188.123.245.14	TCP	84	34057→45776 [PSH, ACK] Seq=5 Ack=16 Win=259 Len=18 TSval=13 TSecr=17701720
21	2.487926000	192.168.1.101	178.132.126.11	TCP	84	34057→52113 [PSH, ACK] Seq=1 Ack=1 Win=258 Len=18 TSval=13 TSecr=1507085385
22	2.497157000	188.234.48.5	192.168.1.101	TCP	69	52287→34057 [PSH, ACK] Seq=1 Ack=1 Win=254 Len=15
23	2.497526000	192.168.1.101	188.234.48.5	TCP	58	34057→52287 [PSH, ACK] Seq=1 Ack=16 Win=255 Len=4
24	2.589835000	178.132.126.1	192.168.1.101	TCP	66	52113→34057 [ACK] Seq=1 Ack=19 Win=8211 Len=0 TSval=15 TSecr=13140234
25	2.590072000	178.132.126.1	192.168.1.101	TCP	70	52113→34057 [PSH, ACK] Seq=1 Ack=19 Win=8216 Len=4 TSval=15 TSecr=13140234
26	2.592660000	188.123.245.1	192.168.1.101	TCP	66	45776→34057 [ACK] Seq=16 Ack=22 Win=457 Len=0 TSval=17 TSecr=13140234

*Time* – интервал времени поступления пакетов в секундах ( $\tau_i$ );

*Length* – длительность пакетов в байтах ( $\xi_i$ ).

2.1 Получаем две последовательности статистических величин: интервалы времени поступления пакетов в секундах  $\tau_i$  и длины пакетов в байтах  $\xi_i$ .

Длины пакетов  $\xi_i$  в байтах переводим в длительности обслуживания в секундах (18):

$$\xi_i = \frac{(AI \cdot 8)}{10^8}, \quad (18)$$

где  $AI$  – ячейка в Microsoft Office Excel.

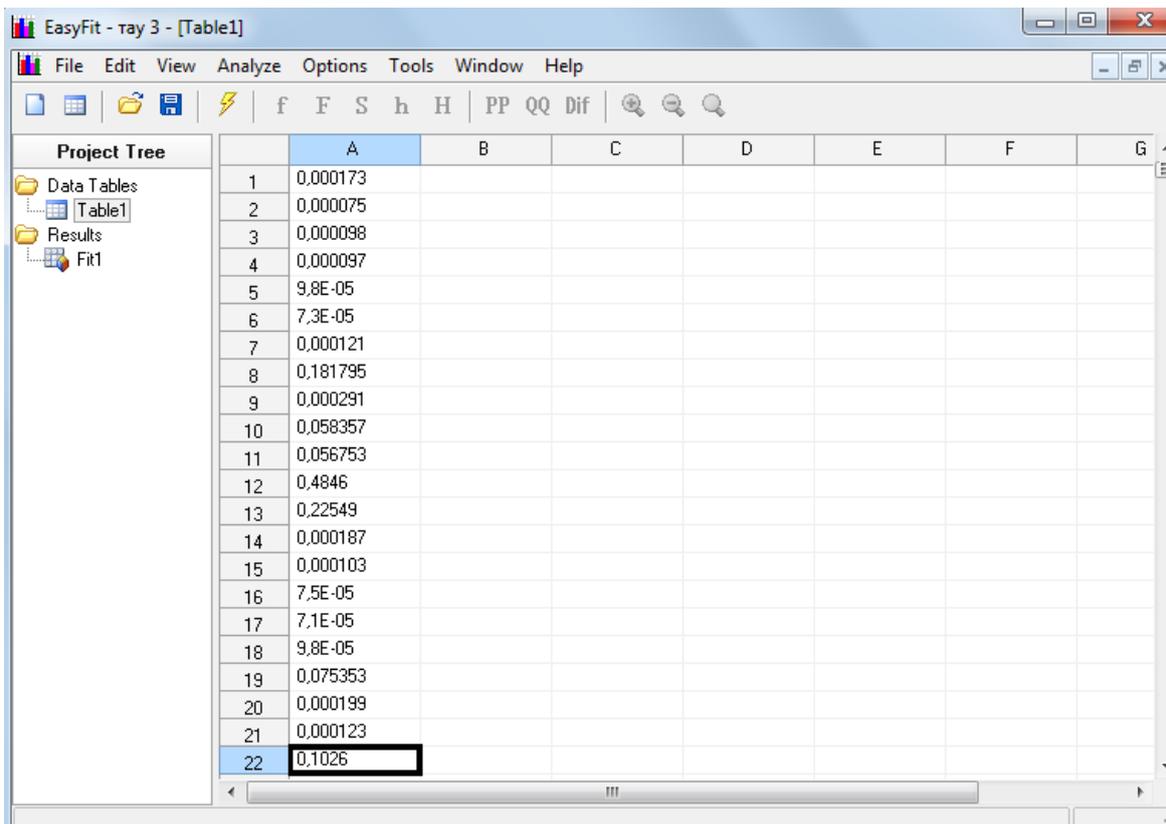
Длительности поступления  $\tau$  рассчитываем по формуле (интервал между пакетами (разность между последующим и предыдущим)) (19):

$$\tau_i = AI - A(I-1), \quad (19)$$

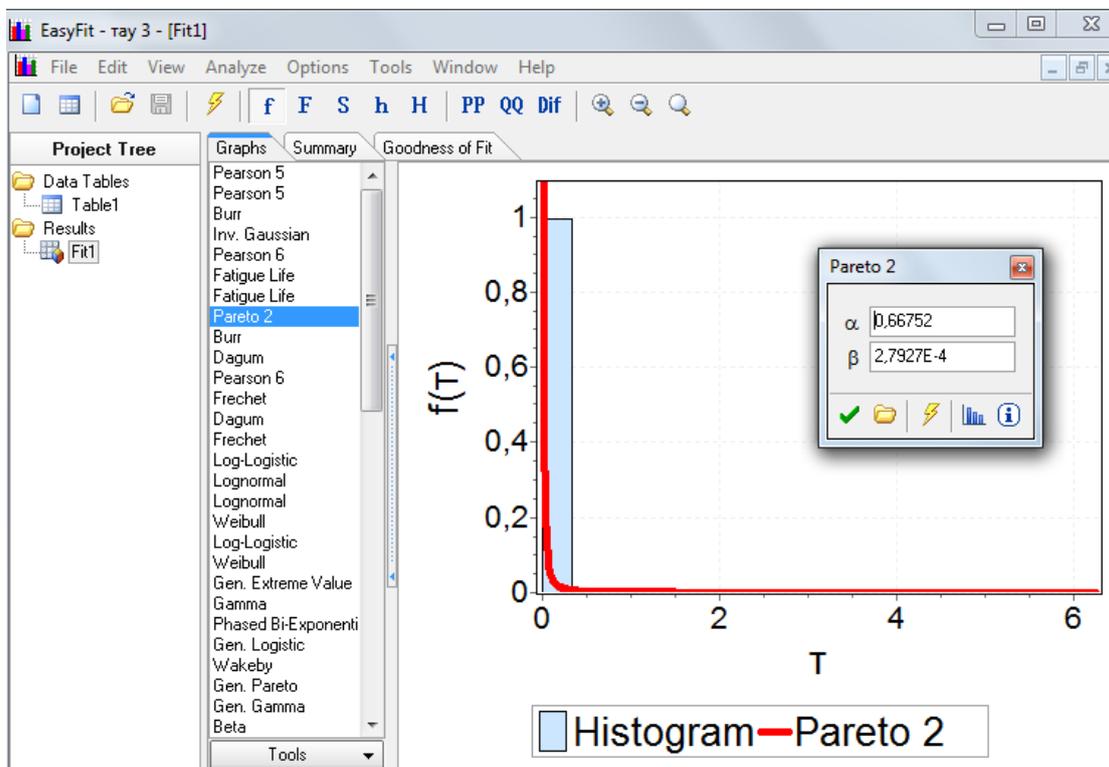
где  $AI, A(I-1)$  – ячейки в Microsoft Office Excel.

При работе в Microsoft Office Excel следует заменить точки на запятые: Правка «,» → Заменить «,».

3. На рабочем столе открыть программу EasyFit Professional. Скопировать данные из Microsoft Office Excel в программу EasyFit Professional.



3.1. Выделить первый столбец полностью и нажать значок на панели . График и формулы, полученной гистограммы  и функции плотности распределения, аппроксимирующей ее, занести в отчет.



В программе EasyFit Professional для распределений  $f(\xi), f(\tau)$  выбираются в графе Graphs только функции плотности распределения: *Pareto 2, Weibull, Lognormal* по убыванию критерия согласия Goodness of Fit (GOF). Три статистических критерия: Колмогорова-Смирнова, Андерсона-Дарлинга и Хи-Квадрат.

3.2 Далее аппроксимировать суммой затухающих экспонент согласно алгоритму, описанному выше, по полученному результату работы в программе EasyFit Professional, а именно функции плотности распределения  $f(\xi), f(\tau)$  произвести все расчеты в программе Mathcad.

3.2.1 При работе в программе Mathcad необходимо помнить, что модуль матрицы  $|A|$  должен существовать.

3.4. Занести полученные результаты, графики и формулы, по аппроксимации суммой экспонент в отчет. Рассчитать значение абсолютной погрешности  $R(t)$  по модулю.

### Содержание отчета

- 1) Блок-схема реализации алгоритма аппроксимации.
- 2) Листинг программы в программе Mathcad.
- 3) Результаты сравнения получившихся аппроксимирующих выражений функций плотности распределения, описывающих законы интервалов времени между пакетами  $f(\tau)$  и длительностей обслуживания пакетов  $f(\xi)$  в узле мультисервисной сети (СМО типа  $G/G/1$ ).

### Контрольные вопросы

- 1) Что такое математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение?
- 2) Для чего строят гистограмму распределения?
- 3) Перечислите, какие виды аппроксимаций функций распределения используются в телекоммуникации.
- 4) Для чего проводят статистический анализ трафика?
- 5) Дайте определение системы СМО. Назовите структурный состав СМО.
- 6) Поясните, как записываются СМО по Кендаллу-Башарину.
- 7) Запишите в обозначениях по Кендаллу-Башарину исследуемые в данной лабораторной работе СМО.
- 8) Запишите формулу ИУ Линдли. Поясните, какие результаты можно получить при решении ИУ Линдли.
- 9) Для чего используется аппроксимация суммой затухающих экспонент функции распределения? Опишите алгоритм аппроксимации суммой затухающих экспонент.
- 10) Объясните, каким образом в лабораторной работе происходит описание СМО типа  $G/G/1$ .

## Глоссарий

СМО - система массового обслуживания

ИУ – интегральное уравнение

ПК – персональный компьютер

НЭ – нелинейный элемент

## Литература

1. Клейнрок, Л. Теория массового обслуживания. Перевод с англ. /Пер. И. И. Грушко; ред. В. И. Нейман / Л. Клейнрок. – М.: Машиностроение, 1979. – 432 с.
2. Карташевский, В. Г. Основы теории массового обслуживания / В. Г. Карташевский. – М.: Радио и связь, 2006. – 107 с.
3. Решение уравнения Линдли спектральным методом для систем массового обслуживания общего вида/ Блатов И. А., Карташевский В. Г., Киреева Н. В., Чупахина Л. Р. // Электросвязь. – 2014. – № 11. – С. 48 - 50.
4. Голубинский, А. Н. Методы аппроксимации экспериментальных данных и построения моделей / А. Н. Голубинский // Вестник ВИ МВД России. – 2007. – № 2. – С. 138-143.
5. Аппроксимация функций [Электронный ресурс]. – Режим доступа: [http://studopedia.net/11\\_93131\\_polynomialnaya-approksimatsiya.html](http://studopedia.net/11_93131_polynomialnaya-approksimatsiya.html), свободный. – Загл. с экрана.

