

ПОРОГИ ЦВЕТРАЗЛИЧЕНИЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

© 2012 г. Л. Д. Ложкин, канд. техн. наук

Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики, г. Самара

E-mail: astro76@rambler.ru

Рассмотрена возможность построения равноконтрастного цветового пространства на основе математического аппарата, примененного в общей теории относительности А. Эйнштейна. Такое построение позволит избавиться от недостатков, присущих известным и применяемым в настоящее время цветовым пространствам, а именно, различие размеров эллипсов Мак Адама в зависимости от цветности стимула.

Ключевые слова: цветовой локус, пороги цветоразличения, горизонт цвета, эллипсы Мак Адама, уравнение Эйнштейна, цветовой тон, цветовая насыщенность, цветовой тензор.

Коды OCIS: 330.1690, 330.1710

Поступила в редакцию 29.12.2010

Введение

В начале 40-х годов прошлого столетия появились публикации результатов опытов, проведенных Мак Адамом по выяснению порогов цветоразличения [1, 2]. Аналогичные опыты были проведены Стайлсом [3], Вышецки [4], а также повторно самим Мак Адамом. Их результаты в целом согласовывались с полученными изначально Мак Адамом и графически отображались в виде эллипсов на цветовой диаграмме (x, y) МКО 1931 г. На рис. 1 изображены результаты опытов Мак Адама, которые впоследствии получили название “Эллипсы Мак Адама”.

1. Схема анализа цветности изображения

Автором данной статьи разработан программный комплекс по измерению порогов цветоразличения [5], описание которого дано в [6]. Впоследствии этот программный комплекс был изменен. Сутью изменения является то, что пороги цветоразличения приводились в зависимости от яркости излучения сравниваемых цветов (в процентном соотношении). Экстраполируя кривую зависимости величины порога до значения яркости равной нулю, получим величину порога, равную бесконечности, а точнее, ограниченную кривой цветового локуса. Да это и понятно, при уменьше-

нии яркости включается механизм ночного или сумрачного зрения, т. е. в процесс зрения включаются палочки глаза, а колбочки выключаются, как имеющие меньшую чувствительность, нежели палочки. Имеет место эффект Пуркунье (“ночью все кошки серые”).

Очевидно, при увеличении яркости излучения до очень больших значений цветочувствительность глаза также будет уменьшаться. Это явление можно объяснить тем, что распад йо-

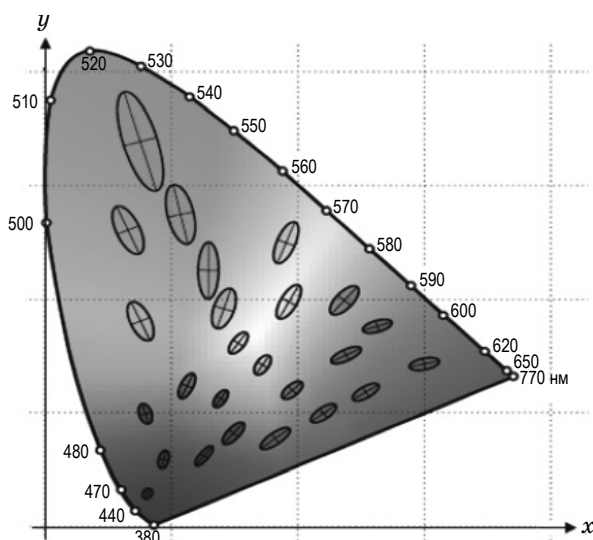


Рис. 1. Эллипсы Мак Адама (для наглядности размеры эллипсов увеличены в 10 раз).

дапсина (светочувствительное вещество колбочек глаза) будет происходить быстрее, нежели его восстановление. Глаз станет цветослепым, т. е. величина порога цветоразличения будет увеличиваться по мере увеличения яркости излучения и при очень больших яркостях порог цветоразличения будет равен бесконечности, точнее, эта бесконечность будет ограничена цветовым локусом. Конечно, такая яркость в природе, а тем более в телевидении (на экране монитора), не реализуется и может быть рассмотрена только теоретически.

Теперь посмотрим на картину в целом. На рис. 2 изображен однополосный гиперboloид [7]. Прежде чем рассуждать далее, необходимо ввести некоторые обозначения:

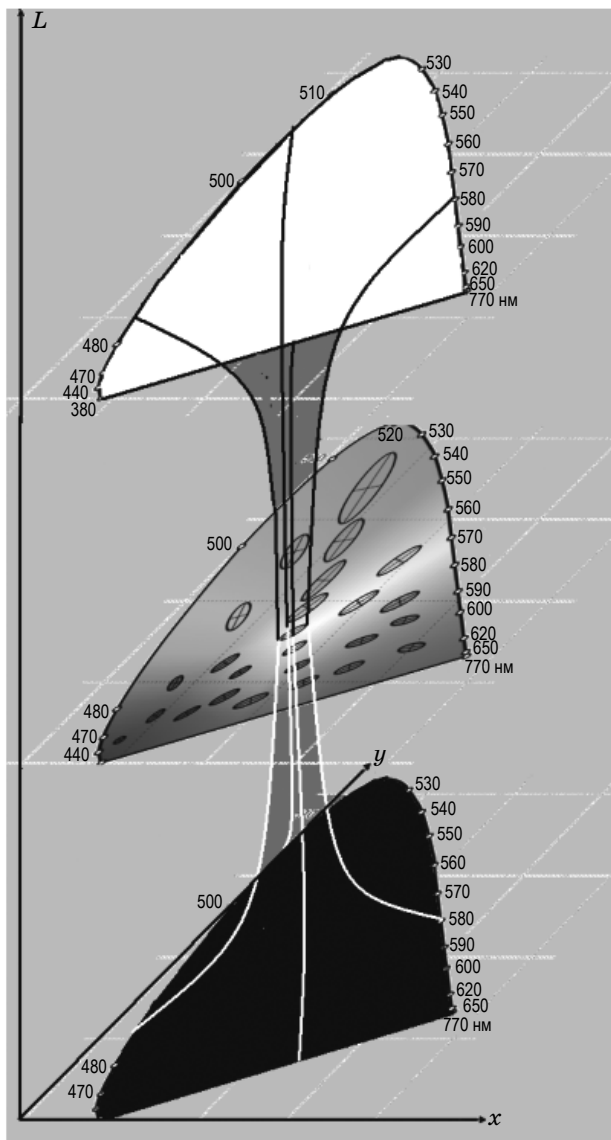


Рис. 2. Зависимость порогов цветоразличения от яркости излучения.

1. Горизонт цвета (аналогично горизонту событий в теории относительности) – в данной статье будем понимать некий объем, в котором, с точки зрения цветоразличения глаза, цвет однородный.

2. Бесконечность – область, ограниченная цветовым локусом.

Рассмотрим некоторые области этого гиперboloида. О верхней и нижней частях рисунка, окрашенных соответственно в белый и черный цвета, можно сказать, что горизонт событий уходит в бесконечность. Сами эти поверхности линейны и имеют евклидову геометрию. Более сложную структуру имеет пространство, расположенное в центральной части рисунка.

Горизонт событий имеет малый радиус, а это обстоятельство указывает на то, что пространство, заключенное под горизонтом событий, искривлено и замкнуто, аналогично тому, как это имеет место в пространстве черных дыр в фундаментальной теории эволюции звезд, имеющих массу, превышающую массу Солнца. В связи с этим можно попробовать для решения вопросов порогов цветовосприятия и вопросов создания новых равноконтрастных цветовых систем, в которых все эллипсы Мак Адама были бы трансформированы в одинаковые окружности, а в трехмерном пространстве – шары одинакового диаметра, применить фундаментальную общую теорию относительности А. Эйнштейна и для описания центральной части полученного однополосного гиперboloида использовать уравнение Эйнштейна [8].

2. Уравнение Эйнштейна для анализа цветности изображения при нормальных условиях цветовосприятия

Уравнения Эйнштейна – уравнения гравитационного поля в общей теории относительности, связывающие между собой метрику искривленного пространства-времени со свойствами заполняющей его материи. Термин используется в единственном числе: “уравнение Эйнштейна”, так как в тензорной записи это одно уравнение, хотя в компонентах представляет собой систему уравнений.

Выглядят уравнения следующим образом

$$R_{ab} - \frac{R}{2}g_{ab} + \Lambda g_{ab} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{ab}, \quad (1)$$

где R_{ab} – тензор Риччи, получающийся из тензора кривизны пространства-времени R_{abcd} посредством свертки его по паре индексов,

R – скалярная кривизна, т. е. свернутый тензор Риччи, g_{ab} – метрический тензор, Λ – космологическая постоянная, а T_{ab} представляет собой тензор энергии–импульса материи (π – число, c – скорость света в вакууме, G – гравитационная постоянная Ньютона). Так как все входящие в уравнения тензоры симметричны, то в четырехмерном пространстве–времени эти уравнения равносильны скалярным уравнениям.

В правой части уравнения (1) используются физические константы (гравитационная постоянная Ньютона G , скорость света c), которые в нашем случае должны быть заменены на функции, характеризующие цвет, такие как цветовой тон, насыщенность и яркость. Это же относится к тензору энергии–импульса материи T_{ab} .

В левой части уравнения, очевидно, для нашего случая, космологическая постоянная $\Lambda = 0$, тогда уравнение (1) примет вид

$$R_{ab} - \frac{R}{2} g_{ab} = f(\Pi_T, \Pi_H, L), \quad (2)$$

где Π_T – цветовой тон, Π_H – цветовая насыщенность, L – яркость цвета. Эти цветотехнические параметры могут быть измерены, например, с помощью прибора [9]. Отметим, что авторами работ [6, 10] предпринимались удачные разработки равноконтрастных колориметрических систем, в которых эллипсы Мак Адама трансформировались в почти равновеликие окружности в некоей криволинейной системе координат, построенной на основании применения метрического тензора. Кроме того, в [6] автор строит трехмерную систему координат, в которой изображены шары равного диаметра.

Уравнения Эйнштейна описывают четырехмерное пространство–время. У нас же получается трехмерное цветовое пространство. Но кто знает, как эволюционирует глаз человека во времени? То, что глаз человека развивается и, естественно, меняется во времени у меня нет сомнений, вопрос как? Можно сделать следующее предположение. Во времена, когда появился человек, планета Земля была покрыта в большей своей части зеленью и максимальная чувствительность глаза соответствовала зеленой области спектра, эта тенденция сохранилась и по сей день. Но поскольку первобытный человек был по натуре охотник, то его глаз должен видеть в ближней инфракрасной области спектра, т. е. глаз должен был видеть тепловое излучение животного мира. Исходя из

этих предположений, цветовой locus для того времени у стандартного наблюдателя должен быть растянут в красную и ближнюю инфракрасную области спектра и вполне допустимо, что синяя область спектрального диапазона была урезана. Как дальше пойдет развитие глаза человека, вряд ли это известно. Но, тем не менее, можно рассматривать и четырехмерное цветовое пространство–время в уравнении (2), приняв временной интервал равным нулю, т. е. сегодняшнюю эпоху.

3. Некоторые соображения по поводу решения уравнения Эйнштейна

В настоящее время существует, согласно литературным данным, большое количество решений уравнения Эйнштейна. Решить уравнение Эйнштейна – значит найти вид метрического тензора g_{ab} пространства–времени. Существуют также чисто математические классификации решений, основанные на топологических свойствах описываемого ими пространства–времени, или, например, на алгебраической симметрии тензора Вейля данного пространства.

Вообще рис. 2 очень сильно похож на результат решения уравнения Эйнштейна, полученный Шварцшильдом для пространства–времени, изображенного на рис. 3, при интервале времени $T = 0$. Это решение Шварцшильд получил для черной дыры, не имеющей ни электрического заряда, ни вращения. Полученное решение оказалось пространством–временем Миньковского с топологией $R^2 \times S^2$ и метрикой

$$\begin{aligned} ds^2 = & - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 + \\ & + r^2 (\partial\theta^2 + \sin^2\theta \partial\varphi^2), \end{aligned} \quad (3)$$

где координата r принимает значения только большие r_s . Важно, что значение параметра r ,

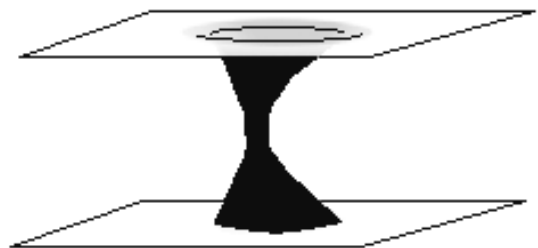


Рис. 3. Сечение пространства Шварцшильда при $T = 0$.

в отличие от лапласовского случая, не является “расстоянием до центра” – центра в шварцшильдовском решении вообще нет.

Вернемся к нашему уравнению (2). Очевидно, в правой части уравнения параметры функции имеют векторную интерпретацию. Действительно, цветовая насыщенность является отношением длины отрезка, соединяющего начало координат с центром эллипса Мак Адама, к длине отрезка, соединяющего также начало координат с пересечением границы цветового локуса, т. е. отношение длин отрезков $0Ц$ к $0a$ (рис. 4). Яркость определяется длиной отрезка от начала координат до значения яркости в трехмерной системе координат (на рис. 4 это не показано). Цветовой тон определяется значением угла φ (рис. 4). Таким образом, функцию $f(I_T, I_H, L)$ можно представить в виде тензора, который назовем “цветовой”.

Прежде, чем доказать, что данная функция действительно является тензором, сделаем обоснование начала координат. В принципе выбор начала координат для определения тензора не имеет значения, поскольку эта линейная операция связана с параллельным переносом. Но в нашем случае выбор начала координат имеет значение. Если остановиться на первоначальном значении начала координат (рис. 1), то, во-первых, точка 0 не принадлежит цветовому пространству локуса, а во-вторых, есть неоднозначность определения вектора цветового

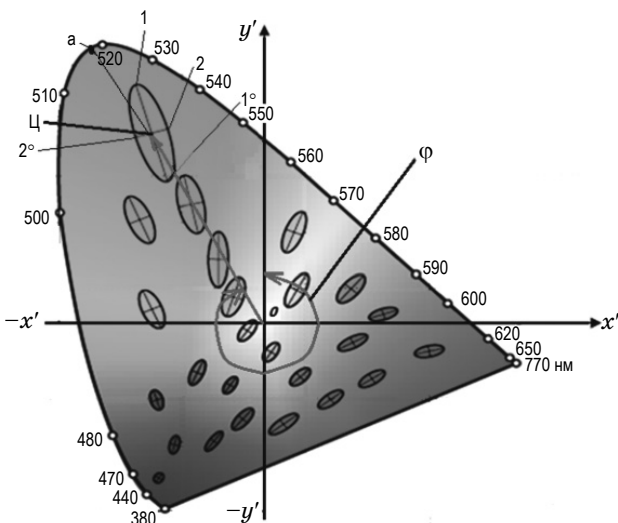


Рис. 4. К определению цветового тензора. Ось яркости L перпендикулярна плоскости рисунка. Цифрами 1 , $1'$ и 2 , $2'$ показаны полуоси эллипса.

тона, так как прямая от начала координат до центра некоторых эллипсов Мак Адама может дважды пересечь границу цветового локуса для двух длин волн светового излучения. Поэтому раз начало координат, с точки зрения тензорного анализа, величина произвольная, то для определенности вектора $0Ц$ (рис. 4) мы поместим начало координат в точку с координатами цветности равноэнергетического источника E , т. е. $x = y = 0,333$. Тогда любой отрезок прямой, следующий из начала координат, может пересечь границу цветового локуса только в одной точке и будет соответствовать конкретной длине волны.

В новой системе координат $x'y'$ любой вектор, назовем его вектор цвета, будет определен следующим образом

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_T \\ I_H \\ L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \arctan(y'_{Ц}/x'_{Ц}) \\ \sqrt{(x'_{Ц})^2 + (y'_{Ц})^2 + L_{Ц}^2} / \sqrt{(x'_a)^2 + (y'_a)^2 + L'_a} \\ L \end{pmatrix}, \quad (4)$$

где $x'_{Ц}$, $y'_{Ц}$, x'_a , y'_a – координаты точек $Ц$ и a для центра эллипса Мак Адама в системе координат $x'y'$, где L_a и $L_{Ц}$ – яркости в точках a и $Ц$.

Вектор \mathbf{r} в (4) можно представить как вектор в некотором базисе e_1, e_2, e_3 пространства E , которое представляет цветовой локус. Это трехмерное евклидово пространство. Тогда вектор \mathbf{r} разложим по выбранному базису

$$\mathbf{r} = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 = \sum_{i=1}^3 a^i e_i, \quad (5)$$

где $\alpha, \beta, \gamma, a^1, a^2, a^3$ – скаляры.

Целью исследования является создание нового трехмерного пространства, в котором эллипсоиды были бы трансформированы в сферу радиуса r . Это означает, что надо менять базис e_1, e_2, e_3 (назовем его старый базис) на новый базис $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3$ пространства \tilde{E} .

Для начала определим тип нового пространства. Это новое пространство не будет являться эвклидовым плоским пространством в области всего цветового локуса. Но это пространство можно считать как риманово пространство, которое, как известно, должно отве-

чать следующим условиям [11, 12]. Во-первых, это многообразие \mathfrak{R}_n , в котором задано поле тензора

$$g_{ij}(M) = g_{ij}(x^1, \dots, x^n), \quad (6)$$

где M – точка, определяющая центр любого эллипса Мак Адама, в принципе любая точка на цветовом локусе, два раза ковариантного, симметричного и невырожденного

$$\text{Det} |g_{ij}| = 0, \quad g_{ij} = g_{ji}.$$

Во-вторых, в остальном тензор $g_{ij}(M)$ выбирается произвольно, а это значит, что на одно и то же многообразие \mathfrak{R}_n можно по-разному накладывать риманову метрику. Тензор $g_{ij}(M)$ будем называть метрическим, положив его в основу построения римановой геометрии по аналогии с евклидовой геометрией, вполне определяемой своим метрическим тензором. Многообразие \mathfrak{R}_n имеет класс $N \geq 2$ и, соответственно, функция (6) непрерывно дифференцируемая $N - 1$ раз. Согласно [12] связь между новым и старым базисом определяется как

$$\tilde{e}_i = \sum_{j=1}^3 S_i^j e_j, \quad (7)$$

где S_i^j – матрица перехода, i – свободный индекс, который может принимать любое целое значение из диапазона 1, 2, 3, j – индекс суммирования.

Предположим, что $W = W(x, y)$ есть уравнение поверхности нового пространства \tilde{E} в базисе $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3$, тогда матрица первой квадратичной формы имеет вид

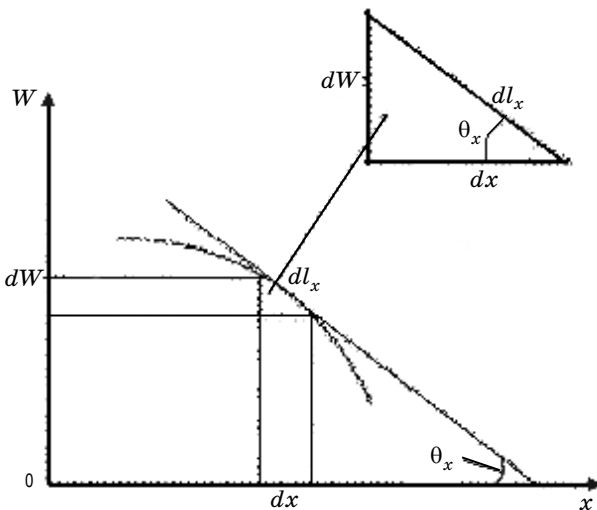


Рис. 5. Сечение WOX поверхности $W = f(x, y)$.

$$\xi_{ij}(M) = \begin{bmatrix} 1 + W_x'^2 & W_x'W_y' \\ W_x'W_y' & 1 + W_y'^2 \end{bmatrix}.$$

Детерминант этой матрицы определяется как $g = 1 + W_x'^2 + W_y'^2$. Напишем основные выражения, связывающие дифференциалы в декартовой системе координат $\partial x, \partial y$ и в криволинейной системе координат $\partial l_x, \partial l_y$. Имеем в сечении WOX (рис. 5)

$$\partial l_x^2(M) = \partial W^2 + \partial x^2 \quad \text{и} \quad (8)$$

$$\partial l_x(M) = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2} \partial x.$$

И обратное преобразование

$$\begin{aligned} \partial x(M) &= \partial l_x(M) \cos \theta_x, \\ \partial W &= \partial l_x(M) \sin \theta_x, \\ \frac{\partial W}{\partial x} &= \text{tg} \theta_x. \end{aligned} \quad (9)$$

Аналогично для сечения W OY

$$\begin{aligned} \partial l_y^2(M) &= \partial W^2 + \partial y^2, \\ \partial l_y(M) &= \sqrt{1 + \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2} \partial y. \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \partial y(M) &= \partial l_y(M) \cos \theta_y, \\ \partial W &= \partial l_y(M) \sin \theta_y, \\ \frac{\partial W}{\partial y} &= \text{tg} \theta_y. \end{aligned} \quad (11)$$

Как уже отмечалось выше, решить уравнение (2) – значит найти метрический тензор, для чего перепишем это уравнение

$$g_{ab}(M) = \frac{2(R_{ab}(M) - kC_{ab}(M))}{R(M)}, \quad (12)$$

где k – константа, $C_{ab}(M)$ – цветовой тензор для точки M .

Найдем значение скалярной кривизны, которая, как известно [12], равна $R(M) = 2K(M)$, где $K(M)$ – гауссова кривизна в точке M , определяемая как

$$K(M) = -\frac{2a_{12}b_{12} - a_{11}b_{22} - a_{22}b_{11}}{2(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)}, \quad (13)$$

где a_{11}, a_{12}, a_{22} – коэффициенты формы, определяемые первой квадратичной формой (14); b_{11}, b_{12}, b_{22} – коэффициенты, определяемые второй квадратичной формой (15).

Первая квадратичная форма

$$I = a_{11}\partial\xi^2 + 2a_{12}\partial\xi\partial\eta + a_{22}\partial\eta^2 = (\partial\xi, \partial\eta) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial\xi \\ \partial\eta \end{pmatrix}, \quad (14)$$

где (ξ, η) – криволинейные поверхностные координаты.

Вторая квадратичная форма

$$II = -\langle \partial\mathbf{r}\partial\bar{\mathbf{n}} \rangle = b_{11}\partial\xi^2 + 2b_{12}\partial\xi\partial\eta + b_{22}\partial\eta^2. \quad (15)$$

Рассмотрим тензор кривизны, тензор Риччи в (12), тензор $R_{ab}(M)$. Тензор Риччи задает один из способов измерения кривизны многообразия, т. е. степени отличия геометрии многообразия от геометрии плоского евклидова пространства. Тензор Риччи, точно так же как метрический тензор, есть симметричная билинейная форма на касательном пространстве риманова многообразия. Иначе говоря, тензор Риччи измеряет деформацию объема, т. е. степень отличия n -мерных областей n -мерного многообразия от аналогичных областей евклидова пространства. Пусть (M, g) – n -мерное риманово многообразие, а T_pM – касательное пространство к M в точке p . Для любой пары $\xi, \eta \in T_p(M)$ касательных векторов в точке p тензор Риччи $R(\xi, \eta)$, по определению, отображает (ξ, η) в след линейного автоморфизма $T_p(M) \rightarrow T_p(M)$, заданного тензором кривизны Римана R :

$$\zeta \rightarrow R(\zeta, \eta)\xi.$$

Если на многообразии заданы локальные координаты, то тензор Риччи можно разложить по компонентам

$$R = R_{ab}\partial x^a \otimes \partial x^b,$$

где $R_{ab} = R^k_{abj}$ – след тензора Римана в координатном представлении.

В окрестности любой точки p риманова многообразия (M) можно всегда определить специальные локальные координаты, так называемые нормальные геодезические координаты, в которых геодезические из точки p совпадают с прямыми, проходящими через начало координат. Кроме того, в самой точке p метрический тензор равен метрике евклидова пространства δ_{ij} (или метрике Миньковского η_{ij} в случае псевдориманова многообразия).

Таким образом, если кривизна Риччи $R(\xi, \xi)$ положительна в направлении вектора ξ , то узкий конус геодезических, исходящих из точки p в направлении ξ , будет иметь меньший

объем, чем такой же конус в евклидовом пространстве. Аналогично, если кривизна Риччи отрицательна, то узкий конус геодезических в направлении вектора ξ будет иметь объем, больший по сравнению с евклидовым.

Пусть M есть полное n -мерное риманово многообразие с $R_M \geq (n-1)k$ (неравенство Бишоп–Громова). Пусть $p \in M$. Обозначим через $v_p(r)$ объем шара радиуса r с центром в p . Обозначим через $\tilde{v}(r)$ объем шара радиуса r в n -мерном пространстве постоянной кривизны k . Тогда отношение $v_p(r)/\tilde{v}(r)$ есть невозрастающая функция от r

$$R_{\mu\nu}(\Gamma) \equiv \frac{\partial \Gamma_{\mu M}^\alpha}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\alpha}^\alpha}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \Gamma_{\alpha\beta} - \Gamma_{\mu\beta}^\alpha \Gamma_{\alpha\nu}^\beta.$$

Следует отметить, что ковариантные компоненты тензора Риччи не содержат метрического тензора, а содержат только бинарные произведения символов Кристоффеля и их производных по координатам. Дополнительно к этим уравнениям получаем уравнения связи, которые устанавливают соотношения между независимыми величинами $g_{\mu\nu}$ и $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$

$$\frac{\partial \sqrt{-g} g^{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} + \sqrt{-g} g^{\mu\beta} \Gamma_{\beta\alpha}^\nu + \sqrt{-g} g^{\nu\beta} \Gamma_{\beta\alpha}^\mu - \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \Gamma_{\beta\alpha}^\beta = 0.$$

Решая эти уравнения относительно величин $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$, получаем обычную зависимость между символами Кристоффеля и метрическим тензором

$$\Gamma_{\mu M}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (g_{\mu\beta, \alpha} + g_{\nu\beta, \mu} - g_{\mu\nu, \beta}).$$

Таким образом, были рассмотрены все составляющие уравнения (11) и для окончательного решения этого уравнения необходимо определить значение функции $W(x, y)$.

Заключение

1. В статье предпринята попытка объединить состояние обычного пространства-времени, описанное уравнением Эйнштейна, с цветовым пространством.

2. Геометрия равноконтрастного цветового пространства должна быть нелинейная, искривленная геометрия Римана.

3. Искривленное цветовое пространство является множеством и представляет тензорное поле с точки зрения порогов цветоразличения.

4. Наличие горизонта цвета определяет геометрию замкнутого изотропного цветового пространства, размером в один порог цветоразличения.

5. Соединение общей теории относительно-сти, ее уравнений, в частности уравнения Эйнштейна, с вопросами порогов цветоразличения

может породить новые равноконтрастные цветовые системы, в которых известные эллипсы Мак Адама, изображаемые на плоскости, будут превращены в одинаковые по диаметру окружности, а цветовые пороги, изображаемые в трехмерном пространстве, – в одинаковые шары.

* * * * *

ЛИТЕРАТУРА

1. *Mac Adam D.L.* Color essays // JOSA. 1975. V. 65. № 5. P. 463–485.
2. *Mac Adam D.L.* Specification of small chromaticity differences // JOSA. 1943. V. 33. P. 18–26.
3. *Stiles W.* 18th Thomas Young oration. The basic data of colour matching // Phys. Soc. Year Book. 1955. V. 44. P. 248–256.
4. *Джадд Д.* Цвет в науке и технике / Пер. с англ. под ред. Л.Ф. Артюшина. М., 1978. 428 с.
5. *Ложкин Л.Д.* Web-сайт по информационным технологиям: свидетельство об отраслевой регистрации разработки № ОФАП 12111 / Л.Д. Ложкин. ВНИИЦ заявл. 11.01.2009; дата регистр. 16.01.2009. URL: http://ofar.ru/rto_files/12111.doc. 16.01.2009.
6. *Ложкин Л.Д.* Дифференциальная колориметрия / Под общей ред. д.т.н., проф. Тяжева А.И.: Монография. Самара, 2010. С. 320.
7. *Выгодский М.Я.* Справочник по высшей математике. М.: Наука, 1973. 872 с.
8. *Ложкин Л.Д., Тяжев А.И.* Многоцветный колориметр // Патент России № 93977. 2010.
9. *Jimenez J.R., Hita E., Romero J., Jimenez L.* Scalar curvature of space as a source of information of new uniformity aspects concerning to color representation systems // Optics. 1993. V. 24. № 6. P. 243–249.
10. Решение Керра. Интернет-ресурс: <http://dic.academic.ru/dic.nsf/ruwiki/1121264>.
11. *Нинул А.С.* Тензорная тригонометрия. Теория и приложения. М.: Мир, 2004. 336 с.
12. *Рашевский П.К.* Риманова геометрия и тензорный анализ. Изд. третье. М.: Наука, 1967. 664 с.