Федеральное агентство связи

Федеральное государственное образовательное бюджетное учреждение высшего профессионального образования

ПОВОЛЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИЙ И ИНФОРМАТИКИ

ЭЛЕКТРОННАЯ БИБЛИОТЕЧНАЯ СИСТЕМА

Самара

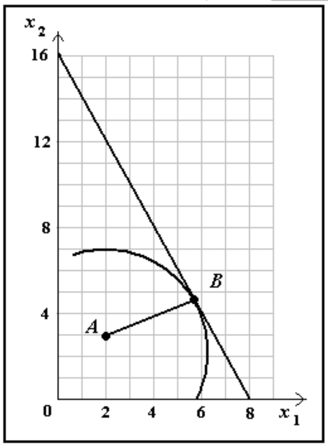
ПОВОЛЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИЙ И ИНФОРМАТИКИ

Кафедра Информатики и вычислительной техники

Методические указания на проведение лабораторных работ

«Нелинейное программирование»

по дисциплине «Информатика»,
(специальности 210400.65, 210401, 210402, 210406у)
и «Моделирование систем» (специальность 220400)



Автор-составитель: доц., к.т.н. **Алексеев А.П.,**

Под общей редакцией **Алексеева А.П.**

Самара, 2009 г.

Введение

Методы математического программирования – необходимый инструмент современного инженера, экономиста, программиста.

В условиях рыночных отношений нередко приходится решать задачи планирования производства. Часто руководящему составу предприятия приходится определять, какую продукцию выпускать фирме и в каком количестве. При этом естественным требованием планирования производства является получение наибольшей выгоды, прибыли. Производство сопровождается обязательным ограничением (лимитом) имеющихся ресурсов: электроэнергии, топлива, комплектующих деталей, станочного времени, сырья и т.п.

Нелинейное программирование – раздел математического программирования, наука, которая помогает организовать производство для получения максимальной выгоды при наличии имеющихся ограничений. При этом ограничения и целевая функция описываются линейными и нелинейными уравнениями.

В процессе выполнения заданий студенты осваивают графический и аналитический способы планирования производства. Кроме того, они получают навыки работы с математическим пакетом Mathcad.

Лабораторная работа «Нелинейное программирование»

1. Подготовка к работе

По указанной литературе изучить основные понятия математического программирования (МП), ознакомиться с методами решения задач нелинейного программирования (НПР), математической системой Mathcad. Ответить на контрольные вопросы.

2. Контрольные вопросы

2.1. Сформулируйте в общем виде задачу математического программирования.

2.2. Чем отличаются задачи нелинейного программирования от задач линейного программирования (ЛПР)?

2.3. Перечислите прикладные задачи, которые можно решить с помощью методов математического программирования

2.4. С помощью, каких математических систем можно решать задачи НПР?

2.5. Перечислите методы решения задач НПР.

2.6. Перечислите основные этапы решения задачи НПР графическим способом.

2.7. Как построить двухмерные и трехмерные графики с помощью математической системы Mathcad?

2.8. Что такое область допустимых решений?

2.9. Сколько точек соприкосновения может иметь график целевой функции (ЦФ) с полигоном допустимых решений при оптимальном решении задачи НПР?

2.10. Где может быть расположена точка экстремума в задачах НПР?

2.11. Опишите порядок решения задач НПР с помощью системы Mathcad

2.12. Дайте определение глобальному максимуму (минимуму) функции.

2.13. Дайте экономическую интерпретацию понятию «целевая функция».

3. Задания на выполнение лабораторной работы

3.1. Задание 1. Графическое и аналитическое решение двухмерной задачи НПР

Графически и аналитически решить задачи минимизации и максимизации целевой функции Z. Исходные данные необходимо выбрать из таблицы 1 в соответствии со своим вариантом.

Таблица 1

№ вар.	ЦФ	Ограничения
1	$Z = x_1^2 - 18x_1 + x_2^2 - 8x_2$	$x_1 + x_2 \le 8$ $x_1 - x_2 \ge 2$ $4x_1 + x_2 \ge 16$ $0,5x_1 + x_2 \le 5$
2	$Z = x_1^2 - 6x_1 + x_2^2 - 4x_2 + 16$	$x_1 + x_2 \le 8$ $x_1 - x_2 \le 2$ $4x_1 + x_2 \ge 16$ $0,5x_1 + x_2 \ge 5$
3	$Z = x_1^2 - 16x_1 + x_2^2 - 6x_2$	$x_1 + x_2 \le 8$ $x_1 - x_2 \ge 2$ $4x_1 + x_2 \ge 16$ $0,25x_1 + x_2 \le 4$
4	$Z = x_1^2 - 20x_1 + x_2^2 - 8x_2 - 3$	$x_1 - x_2 \ge 2$ $x_1 + x_2 \le 8$ $3x_1 + x_2 \ge 12$ $0,33x_1 + x_2 \ge 2$
5	$Z = (x_1 - 5)^2 + (x_2 - 3)^2$	$x_1 + x_2 \ge 2$ $x_1 + x_2 \le 6$ $x_1 - x_2 \le 4$
6	$Z = (x_1 - 6)^2 + (x_2 - 7)^2$	$x_2 - x_1 \le 2$ $x_1 + 2x_2 \ge 4$

		$2x_1 - x_2 \le 8$ $2x_1 + x_2 \le 16$
7	$Z = x_1^2 - 18x_1 + x_2^2 - 14x_2 - 3$	$x_1 - x_2 \le 4$ $-x_1 + x_2 \le 2$ $x_1 + x_2 \ge 4$ $x_1 + x_2 \le 12$
8	$Z = (x_1 - 6)^2 + (x_2 - 14)$	$x_1 + 0{,}5\, x_2 \ge 4$ $x_2 - x_1 \ge 2$ $x_1 + x_2 \le 14$
9	$Z = x_1^2 - 16x_1 + x_2^2 - 4x_2$	$x_1 - x_2 \ge 2$ $x_1 + x_2 \le 8$ $3x_1 + x_2 \ge 12$ $0{,}33x_1 + x_2 \ge 2$
10	$Z = (x_1 - 6)^2 + (x_2 - 6)^2$	$x_1 - x_2 \le 2$ $x_1 + x_2 \le 8$ $3x_1 + x_2 \ge 12$
11	$Z = (x_1 - 8)^2 + (x_2 - 4)^2$	$x_1 - x_2 \ge 2$ $x_1 + x_2 \le 8$ $3x_1 + x_2 \ge 12$
12	$Z = (x_1 - 6)^2 + (x_2 - 8)^2$	$x_1 + x_2 \le 8$ $x_1 - x_2 \le 4$ $x_1 + 3\, x_2 \ge 6$
13	$Z = (x_1 - 10)^2 + (x_2 - 4)^2$	$x_1 + x_2 \le 8$ $x_1 - x_2 \ge 4$ $x_1 + 3\, x_2 \ge 6$
14	$Z = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 4)^2$	$2x_1 + x_2 \le 16$

		$x_1 + 2x_2 \geq 16$
15	$Z = x_1^2 - 14x_1 + x_2^2 - 8x_2 - 14$	$x_1 + x_2 \leq 10$ $2x_1 + x_2 \geq 12$ $x_1 - x_2 \geq 2$ $x_1 - x_2 \leq 4$
16	$Z = (x_1 - 8)^2 + (x_2 - 8)^2$	$x_1 - x_2 \leq 6$ $x_1 + x_2 \leq 10$ $x_1 + 2x_2 \geq 8$
17	$Z = (x_1 - 12)^2 + (x_2 - 4)^2$	$0{,}75x_1 + x_2 \leq 12$ $x_1 - x_2 \geq 4$
18	$Z = x_1^2 - 16x_1 + x_2^2 - 8x_2$	$2x_1 + x_2 \leq 16$ $x_1 + x_2 \geq 4$ $-x_1 + x_2 \leq 4$
19	$Z = x_1^2 - 4x_1 + x_2^2 - 16x_2$	$2x_1 + x_2 \leq 16$ $x_1 + x_2 \geq 4$ $-x_1 + x_2 \leq 4$
20	$Z = (x_1 - 16)^2 + (x_2 - 8)^2$	$x_1 + x_2 \leq 16$ $x_1 - x_2 \geq 4$ $4x_1 + x_2 \geq 32$
21	$Z = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 6)^2$	$x_1 + x_2 \leq 16$ $x_1 - x_2 \leq 4$ $4x_1 + x_2 \geq 32$
22	$Z = (x_1 - 10)^2 + (x_2 - 12)^2$	$x_1 + x_2 \leq 16$ $x_1 - x_2 \leq 4$ $4x_1 + x_2 \geq 32$
23	$Z = (x_1 - 6)^2 + (x_2 - 4)^2$	$x_1 + x_2 \leq 8$ $x_1 + x_2 \geq 2$ $-x_1 + x_2 \leq 2$

		$x_1 - x_2 \le 4$
24	$Z = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 4)^2$	$x_1 + x_2 \le 8$ $x_1 + x_2 \ge 2$ $-x_1 + x_2 \le 2$ $x_1 - x_2 \le 4$
25	$Z = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 2)^2$	$x_2 \le 4$ $2x_1 + x_2 \le 8$ $x_1 + x_2 \ge 4$
26	$Z = (x_1 - 10)^2 + (x_2 - 2)^2$	$x_1 - x_2 \ge 6$ $x_1 + x_2 \le 10$ $x_1 + 2x_2 \ge 8$
27	$Z = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 2)^2$	$2x_1 + x_2 \ge 16$ $x_1 + 2x_2 \le 16$
28	$Z = (x_1 - 8)^2 + (x_2 - 4)^2$	$x_1 - x_2 \ge 2$ $x_1 + 2x_2 \le 16$
29	$Z = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 6)^2$	$x_1 - x_2 \le 2$ $x_1 + x_2 \le 6$ $x_1 + 2x_2 \ge 4$
30	$Z = x_1^2 + x_2^2 - 12x_1 - 10x_2$	$2x_1 + x_2 \le 12$ $x_1 - x_2 \le 4$ $x_2 - x_1 \le 2$
31	$Z = x_1^2 - 16x_1 - 8x_2 + x_2^2$	$x_2 \le 8$ $x_1 + 2x_2 \ge 10$ $2x_1 - x_2 \le 8$ $8x_1 + x_2 \ge 16$
32	$Z = x_1^2 + x_2^2 - 12x_1 - 20x_2$	$x_1 + x_2 \ge 9$ $2x_1 + x_2 \ge 12$ $x_1 - x_2 \ge 2$

Примечание. Во всех вариантах считать $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$.

3.2 Задание 2. Оптимизация целевой функции с помощью математической системы Mathcad

С помощью математической системы Mathcad в соответствии со своим вариантом найти максимум и минимум целевой функции Z (таблица 1).

3.3 Задание 3. Минимизация ЦФ методом множителей Лагранжа

Решить задачу минимизации целевой функции Z методом множителей Лагранжа. Исходные данные следует взять из таблицы 3 в соответствии со своим вариантом.

Таблица 3

№ вар.	ЦФ	Ограничения
1	$Z = 6x_1 + x_1^2 + 4x_2 + x_2^2$	$x_1 + 2x_2 = 16$
2	$Z = 8x_1 + x_1^2 + 6x_2 + x_2^2$	$x_1 + 2x_2 = 18$
3	$Z = 2x_1 + x_1^2 + 4x_2 + x_2^2$	$x_1 + 2x_2 = 10$
4	$Z = 6x_1 + x_1^2 + 4x_2 + x_2^2$	$x_1 + x_2 = 8$
5	$Z = x_1^2 + 4x_2 + x_2^2 - 6x_1$	$x_1 + x_2 = 8$
6	$Z = 6x_1 + x_1^2 - 4x_2 + x_2^2$	$x_1 + x_2 = 8$
7	$Z = 8x_1 + x_1^2 + 6x_2 + x_2^2$	$x_1 + 2x_2 = 12$
8	$Z = 10x_1 + x_1^2 + 8x_2 + x_2^2$	$x_1 + 2x_2 = 20$
9	$Z = 4x_1 + x_1^2 + 2x_2 + x_2^2$	$x_1 + 2x_2 = 10$
10	$Z = x_1^2 - 4x_1 - 2x_2 + x_2^2$	$x_1 + x_2 = 6$
11	$Z = 6x_1 + x_1^2 + 4x_2 + x_2^2$	$0,5x_1 + x_2 = 6$
12	$Z = 6x_1 + x_1^2 + 8x_2 + x_2^2$	$0,5x_1 + x_2 = 8$
13	$Z = x_1^2 - 14x_1 - 14x_2 + x_2^2$	$x_1 + x_2 = 8$
14	$Z = 14x_1 + x_1^2 + 10x_2 + x_2^2$	$x_1 + x_2 = 7$
15	$Z = x_1^2 - 12x_1 - 14x_2 + x_2^2$	$2x_1 + x_2 = 7$
16	$Z = x_1^2 - 12x_1 + 6x_2 + x_2^2$	$x_1 + 2x_2 = 14$
17	$Z = x_1^2 - 6x_1 - 10x_2 + x_2^2$	$x_1 + x_2 = 3$
18	$Z = x_1^2 - 18x_1 - 12x_2 + x_2^2$	$4x_1 + x_2 = 16$
19	$Z = x_1^2 - 8x_1 - 16x_2 + x_2^2$	$x_1 + x_2 = 8$
20	$Z = x_1^2 – 24x_1 - 28x_2 + x_2^2$	$x_1 + x_2 = 16$
21	$Z = x_1^2 – 22x_1 - 24x_2 + x_2^2$	$x_1 + 2x_2 = 16$
22	$Z = x_1^2 – 12x_1 - 12x_2 + x_2^2$	$x_1 + x_2 = 5$
23	$Z = x_1^2 - 8x_1 - 16x_2 + x_2^2$	$x_1 + x_2 = 7$

24	$Z = x_1^2 - 20x_1 - 10x_2 + x_2^2$	$2x_1 + x_2 = 8$
25	$Z = x_1^2 - 24x_1 - 8x_2 + x_2^2$	$x_1 + x_2 = 12$
26	$Z = x_1^2 - 4x_1 - 8x_2 + x_2^2$	$x_1 + x_2 = 4$
27	$Z = x_1^2 - 20x_1 - 20x_2 + x_2^2$	$x_1 + x_2 = 12$
28	$Z = x_1^2 - 16x_1 - 16x_2 + x_2^2$	$x_1 + x_2 = 9$
29	$Z = x_1^2 - 4x_1 - 8x_2 + x_2^2$	$x_1 + 2x_2 = 6$
30	$Z = x_1^2 - 8x_1 - 16x_2 + x_2^2$	$x_1 + 0{,}5x_2 = 4$
31	$Z = x_1^2 - 4x_1 - 6x_2 + x_2^2$	$x_1 + 0{,}5x_2 = 8$
32	$Z = x_1^2 - 12x_1 - 20x_2 + x_2^2$	$x_1 + x_2 = 9$

Примечание. Во всех вариантах считать $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

3.4 Задание 4. Решение трехмерной задачи с помощью математической системы Mathcad

С помощью математической системы Mathcad максимизировать целевую функцию Z, приведенную в таблице 4 в соответствии со своим вариантом. По результатам расчета построить трехмерный график, на котором изобразить поверхности ограничений и поверхность ЦФ. На графике показать точку оптимума.

Таблица 4

№ вар.	ЦФ	Ограничения
1	$Z = 8x_1^2 + 11x_2^2+15x_3$	$50x_1 + 26x_2-20\ x_3 \le 30$ $4x_1 - 20x_2+6\ x_3 \le 20$ $-10x_1 + 10x_2+5\ x_3 \le 50$
2	$Z = 3x_1^2 + 4x_2+2x_3$	$15x_1 + 16x_2-17\ x_3 \le 120$ $18x_1 - 19x_2+20\ x_3 \le 130$ $-21x_1 + 22x_2+23\ x_3 \le 140$
3	$Z = 13x_1+ 12x_2+14x_3$	$13x_1^2+ 18x_2-19\ x_3 \le 120$ $24x_1 - 25\ x_2^2+24\ x_3 \le 240$ $-48x_1 + 30x_2+49\ x_3 \le 480$
4	$Z = 13x_1+ 12x_2+14x_3$	$13x_1+ 18\ x_2^2-19\ x_3 \le 120$ $24\ x_1^2 - 25\ x_2+24\ x_3 \le 240$ $-48x_1 + 30x_2+49\ x_3 \le 480$
5	$Z = 10x_1+ 20x_2+30x_3$	$-30x_1+ 40\ x_2^2+50\ x_3 \le 70$ $10\ x_1^2 - 20\ x_2+20\ x_3 \le 30$ $20x_1 + 30x_2-40\ x_3 \le 50$
6	$Z = 10x_1^2+ 5x_2+45x_3$	$30\ x_1+ 40\ x_2-50\ x_3 \le 70$ $10\ x_1 - 20\ x_2+20\ x_3 \le 30$ $-20x_1 + 30x_2+40\ x_3 \le 50$
7	$Z = 10x_1^2+ 5x_2+45x_3$	$30\ x_1^2+ 40\ x_2-50\ x_3 \le 70$ $10\ x_1 - 20\ x_2+20\ x_3 \le 30$ $-20x_1 + 30x_2+40\ x_3 \le 50$

8	$Z = 10x_1 + 5x_2 + 45x_3$	$30x_1 + 40x_2^2 - 50x_3 \le 70$ $10x_1^2 - 20x_2 + 20x_3 \le 30$ $-20x_1 + 30x_2 + 40x_3 \le 50$
9	$Z = 10x_1 + 5x_2 + 45x_3$	$30x_1^2 + 40x_2 - 50x_3 \le 70$ $10x_1 - 20x_2 + 20x_3 \le 30$ $-20x_1 + 30x_2^2 + 40x_3 \le 50$
10	$Z = 10x_1^2 + 20x_2 + 30x_3$	$-30x_1 + 40x_2 + 50x_3 \le 70$ $10x_1 - 20x_2 + 20x_3 \le 30$ $20x_1 + 30x_2 - 40x_3 \le 50$
11	$Z = 10x_1^2 + 20x_2 + 30x_3$	$-30x_1 + 40x_2^2 + 50x_3 \le 70$ $10x_1 - 20x_2 + 20x_3 \le 30$ $20x_1 + 30x_2 - 40x_3 \le 50$
12	$Z = 10x_1 + 20x_2^2 + 30x_3$	$-30x_1 + 40x_2 + 50x_3 \le 70$ $10x_1 - 20x_2 + 20x_3 \le 30$ $20x_1^2 + 30x_2 - 40x_3 \le 50$
13	$Z = 10x_1^2 + 20x_2 + 30x_3$	$-30x_1 + 40x_2 + 50x_3 \le 70$ $10x_1^2 - 20x_2 + 20x_3 \le 30$ $20x_1 + 30x_2 - 40x_3 \le 50$
14	$Z = 10x_1^2 + 20x_2 + 30x_3$	$-30x_1 + 40x_2 + 50x_3 \le 70$ $10x_1 - 20x_2 + 20x_3 \le 30$ $20x_1 + 30x_2^2 - 40x_3 \le 50$
15	$Z = 10x_1 + 20x_2 + 30x_3$	$-30x_1 + 40x_2 + 50x_3 \le 70$ $10x_1^2 - 20x_2 + 20x_3 \le 30$ $20x_1 + 30x_2^2 - 40x_3 \le 50$
16	$Z = 13x_1^2 + 12x_2 + 14x_3$	$13x_1 + 18x_2^2 - 19x_3 \le 120$ $24x_1^2 - 25x_2 + 24x_3 \le 240$ $-48x_1 + 30x_2 + 49x_3 \le 480$
17	$Z = 13x_1 + 12x_2^2 + 14x_3$	$13x_1 + 18x_2^2 - 19x_3 \le 120$ $24x_1^2 - 25x_2 + 24x_3 \le 240$

		$-48x_1 + 30x_2 + 49x_3 \le 480$
18	$Z = 14x_1^2 + 12x_2 + 14x_3$	$14x_1 + 18x_2 - 19x_3 \le 150$ $21x_1^2 - 25x_2 + 24x_3 \le 240$ $-48x_1 + 30x_2 + 56x_3 \le 180$
19	$Z = 14x_1 + 12x_2^2 + 14x_3$	$14x_1 + 18x_2 - 19x_3 \le 150$ $21x_1^2 - 25x_2 + 24x_3 \le 240$ $-48x_1 + 30x_2 + 56x_3 \le 180$
20	$Z = 14x_1^2 + 12x_2 + 14x_3$	$14x_1 + 18x_2 - 19x_3 \le 150$ $21x_1 - 25x_2 + 24x_3 \le 240$ $-48x_1 + 30x_2^2 + 56x_3 \le 180$
21	$Z = 14x_1^2 + 12x_2 + 14x_3$	$14x_1 + 18x_2^2 - 19x_3 \le 150$ $21x_1^2 - 25x_2 + 24x_3 \le 240$ $-48x_1 + 30x_2^2 + 56x_3 \le 180$
22	$Z = 15x_1^2 + 25x_2 + 35x_3$	$30x_1 + 40x_2 - 50x_3 \le 70$ $10x_1 - 20x_2 + 20x_3 \le 30$ $-20x_1 + 30x_2 + 40x_3 \le 50$
23	$Z = 15x_1 + 25x_2^2 + 35x_3$	$30x_1 + 40x_2 - 50x_3 \le 70$ $10x_1^2 - 20x_2 + 20x_3 \le 30$ $-20x_1 + 30x_2 + 40x_3 \le 50$
24	$Z = 15x_1 + 25x_2 + 35x_3$	$30x_1 + 40x_2^2 - 50x_3 \le 70$ $10x_1^2 - 20x_2 + 20x_3 \le 30$ $-20x_1 + 30x_2 + 40x_3 \le 50$
25	$Z = 15x_1^2 + 25x_2 + 35x_3$	$30x_1 + 40x_2 - 50x_3 \le 70$ $10x_1 - 20x_2^2 + 20x_3 \le 30$ $-20x_1 + 30x_2 + 40x_3 \le 50$
26	$Z = 15x_1 + 12x_2^2 + 14x_3$	$15x_1^2 + 18x_2 - 31x_3 \le 150$ $21x_1 - 25x_2 + 28x_3 \le 24$ $-48x_1 + 30x_2 + 56x_3 \le 18$
27	$Z = 13x_1^2 + 12x_2 + 14x_3$	$13x_1 + 18x_2 - 19x_3 \le 120$

		$24\ x_1 - 25\ x_2 + 24\ x_3 \le 240$ $-48\ x_1 + 30\ x_2 + 49\ x_3 \le 480$
28	$Z = 10x_1 + 5\ x_2^2 + 45x_3$	$30x_1 + 40x_2^2 - 50\ x_3 \le 70$ $10x_1 - 20\ x_2 + 20\ x_3 \le 30$ $-20x_1 + 30x_2 + 40\ x_3 \le 50$
29	$Z = 15x_1 + 12\ x_2^2 + 14\ x_3$	$15\ x_1 + 18\ x_2^2 - 31\ x_3 \le 150$ $21\ x_1 - 25\ x_2 + 28\ x_3 \le 24$ $-48\ x_1 + 30\ x_2 + 56\ x_3 \le 18$
30	$Z = 15x_1 + 12\ x_2 + 14\ x_3$	$15\ x_1^2 + 18\ x_2 - 31\ x_3 \le 150$ $21\ x_1 - 25\ x_2^2 + 28\ x_3 \le 24$ $-48\ x_1 + 30\ x_2 + 56\ x_3 \le 18$
31	$Z = 3x_1 + 4x_2 + 2x_3$	$15\ x_1^2 + 16x_2 - 17\ x_3 \le 120$ $18\ x_1^2 - 19x_2 + 20\ x_3 \le 130$ $-21x_1 + 22x_2 + 23\ x_3 \le 140$
32	$Z = 3x_1 + 4x_2 + 2x_3$	$15\ x_1 + 16\ x_2 - 17\ x_3 \le 120$ $18\ x_1 - 19\ x_2^2 + 20\ x_3 \le 130$ $-21\ x_1^2 + 22x_2 + 23\ x_3 \le 140$

Примечание. Во всех вариантах считать $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$.

3.5 Задание 5. Решение задач НПР градиентным методом

Решить задачу минимизации целевой функции Z градиентным методом. Определить начальную точку и шаг итерации. Исходные данные необходимо выбрать из таблицы 5 в соответствии со своим вариантом.

Таблица 5

№ вар.	ЦФ	Ограничения
1	$Z = -12x_1 - 8x_2 + x_1^2 + x_2^2 + 36$	$4x_1 + 3x_2 \le 48$ $x_1^2 - 5x_1 + x_2^2 \le 30$
2	$Z = -12x_1 - 8x_2 + 2x_1^2 + 2x_2^2 + 36$	$x_1 + x_2 \le 12$ $x_1 - 2x_2 \le 15$
3	$Z = -3x_1 - 2x_2 + x_1^2 + x_2^2 + 9$	$2x_1 + 10x_2\ 60$ $x_1^2 - 2x_2 \le 80$
4	$Z = -4x_1 - 2x_2 + x_1^2 + x_2^2 + 9$	$2x_1 + 10x_2 \le 40$ $x_1^2 - 2x_2 \le 10$
5	$Z = -6x_1 - 5x_2 + x_1^2 + x_2^2 + 40$	$8x_1 + 4x_2 \ge 32$ $2x_1^2 - 5x_2 \le 100$
6	$Z = -3x_1 - 6x_2 + x_1^2 + x_2^2 + 18$	$6x_1 + 12x_2 \ge 24$ $2x_1^2 - x_2 \le 10$
7	$Z = -8x_1 - 16x_2 + x_1^2 + x_2^2 + 24$	$12x_1 + 8x_2 \ge 24$ $x_1^2 - x_2 \le 10$
8	$Z = -8x_1 - 8x_2 + x_1^2 + x_2^2 + 24$	$7x_1 + 8x_2 \ge 56$ $4x_1^2 - 8x_2 \le 32$
9	$Z = -3x_1 - 7x_2 + x_1^2 + x_2^2 + 21$	$3x_1 + x_2 \le 21$ $7x_1^2 - x_2 \le 13$
10	$Z = -9x_1 - 6x_2 + x_1^2 + x_2^2 + 40$	$5x_1 + 4x_2 \ge 20$ $3x_1^2 - x_2 \ge 12$
11	$Z = -18x_1 - 3x_2 + x_1^2 + x_2^2 + 40$	$5x_1 + 4x_2 \ge 20$

		$3x_1^2 - x_2 \geq 12$
12	$Z = -18x_1 - 6x_2 + 3x_1^2 + x_2^2 + 40$	$4x_1 + 8x_2 \geq 20$ $8x_1^2 - x_2 \geq 24$
13	$Z = -7x_1 - 3x_2 + x_1^2 + x_2^2 + 24$	$19x_1 + 6x_2 \geq 36$ $8x_1^2 - x_2 \geq 11$
14	$Z = -14x_1 - 3x_2 + x_1^2 + x_2^2 + 24$	$19x_1 + 6x_2 \geq 36$ $x_1^2 - x_2 \leq 50$
15	$Z = -32x_1 - 8x_2 + 4x_1^2 + x_2^2 + 24$	$17x_1 - x_2 \geq 47$ $2x_1^2 - x_2 \leq 64$
16	$Z = -32x_1 - 4x_2 + 4x_1^2 + 2x_2^2 + 48$	$16x_1 - x_2 \geq 12$ $2x_1^2 - 4x_2 \leq 64$
17	$Z = -6x_1 - 24x_2 + x_1^2 + 2x_2^2 + 16$	$12x_1 - 2x_2 \geq 24$ $6x_1^2 - x_2 \leq 70$
18	$Z = -6x_1 - 24x_2 + x_1^2 + 4x_2^2 + 48$	$48x_1 - 2x_2 \geq 24$ $6x_1^2 - 3x_2 \leq 70$
19	$Z = -5x_1 - 20x_2 + x_1^2 + 4x_2^2 + 48$	$36x_1 - x_2 \geq 24$ $3x_1^2 - 2x_2 \leq 70$
20	$Z = -10x_1 - 40x_2 + x_1^2 + 4x_2^2 + 48$	$18x_1 - x_2 \geq 24$ $3x_1^2 - 7x_2^2 \leq 70$
21	$Z = -13x_1 - 40x_2 + x_1^2 + 4x_2^2 + 60$	$13x_1 - 2x_2 \geq 24$ $4x_1^2 - 5x_2^2 \leq 70$
22	$Z = -11x_1 - 80x_2 + x_1^2 + 4x_2^2 + 60$	$11x_1 - 2x_2 \geq 21$ $7x_1^2 - 5x_2^2 \leq 50$
23	$Z = -12x_1 - 40x_2 + x_1^2 + 2x_2^2 + 40$	$14x_1 - 2x_2 \geq 22$ $7x_1^2 - 5x_2^2 \leq 30$
24	$Z = -9x_1 - 40x_2 + x_1^2 + 4x_2^2 + 21$	$19x_1 - 2x_2 \geq 26$ $6x_1 - 5x_2^2 \leq 33$
25	$Z = -15x_1 - 40x_2 + x_1^2 + 8x_2^2 + 31$	$16x_1 - 2x_2 \geq 21$

		$9x_1 - 7x_2^2 \le 38$
26	$Z = x_1^2 + x_2^2 - 16x_1 - 12x_2$	$-x_1 + x_2 \le 2$ $x_1 - x_2 \le 4$ $x_1 + x_2 \ge 8$ $x_1 + x_2 \le 16$
27	$Z = -10x_1 - 4x_2 + 5x_1^2 + 2x_2^2 + 55$	$2x_1 - 3x_2 \le 30$ $5x_1^2 - 10x_1 + 20$ $x_2^2 \le 50$
28	$Z = -20x_1 - 4x_2 + 5x_1^2 + 2x_2^2 + 55$	$2x_1 - x_2^2 \le 60$ $5x_1^2 - 10x_1 + 20$ $x_2^2 \le 55$
29	$Z = -8x_1 - 8x_2 + 2x_1^2 + 2x_2^2 + 60$	$4x_1 - 2x_2^2 \le 30$ $12x_1^2 - 10x_1 + 2$ $x_2^2 \le 55$
30	$Z = -6x_1 - 6x_2 + 2x_1^2 + 2x_2^2 + 60$	$4x_1 - 2x_2^2 \le 60$ $12x_1^2 - 20x_1 + 2$ $x_2^2 \le 55$
31	$Z = -6x_1 - 12x_2 + 6x_1^2 + 4x_2^2 + 40$	$5x_1 + 2x_2^2 \le 80$ $12x_1^2 - 20x_1 + 6$ $x_2^2 \le 36$
32	$Z = -8x_1 - 2x_2 + 2x_1^2 + x_2^2 + 20$	$10x_1 + 8x_2^2 \le 80$ $6x_1^2 + 6x_2 \le 36$

Примечание. Во всех вариантах считать $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$.

4. Методические указания

4.1. Методические указания к заданию 1

Рассмотрим пример графического и аналитического решения задачи НПР.

Пусть дана целевая функция (ЦФ):

$$Z = (x_1 - 7)^2 + (x_2 - 4)^2, \tag{4.1}$$

а также ограничения:

$$\begin{gathered} x_1 + x_2 \le 10, \\ 2x_1 + x_2 \ge 12, \\ x_1 - x_2 \ge 2, \\ x_1 - x_2 \le 4 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{gathered}$$

Требуется найти максимум и минимум целевой функции.

Графическое решение

Чтобы найти решение графически, вначале следует изобразить многоугольник (полигон) допустимых решений. Построение области допустимых решений (ОДР) осуществляется так же, как в задачах линейного программирования [1, 2].

Напомним, что для построения ОДР вначале следует записать уравнение $x_1 + x_2 = 10$. Оно получается из первого неравенства заменой знака «≤ » на знак «=». Для построения прямой линии $x_1 + x_2 = 10$ достаточно иметь две точки. Первую точку удобно взять при $x_1 = 0$, а вторую точку при $x_2 = 0$. Используя остальные ограничения, аналогично строят другие прямые линии.

Нетрудно заметить, что прямые $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$ (пятое и шестое ограничения) являются осями координат x_1 и x_2.

Затем следует отметить стрелками полуплоскости, которые удовлетворяют заданным неравенствам. Направление стрелок определяют знаки неравенств [1, 2]. Область, удовлетворяющая всем четырем неравенствам, будет областью допустимых решений (трапеция ABCD). На рис. 4.1.1 ОДР выделена серым цветом.

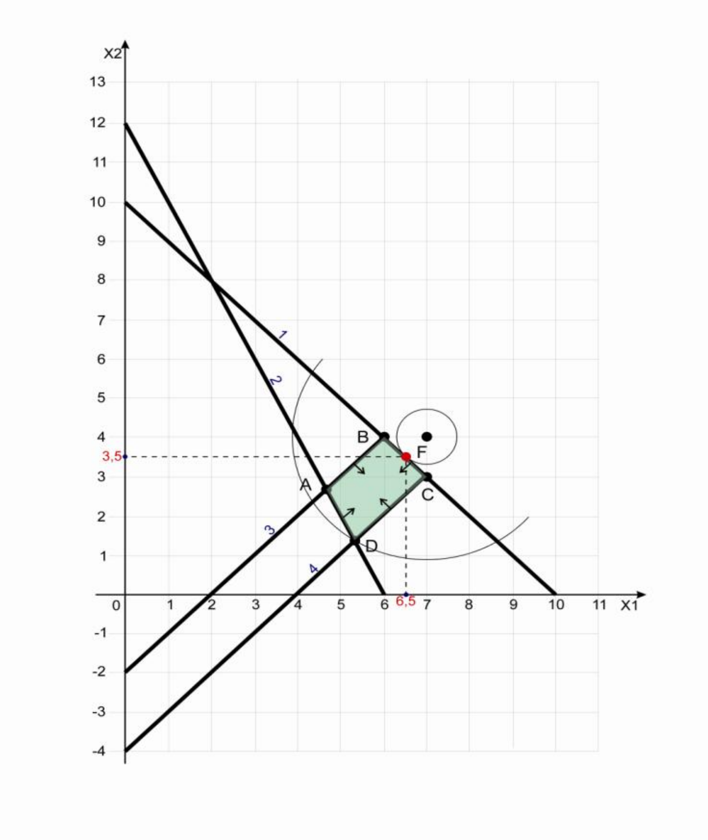


Рисунок 4.1.1. Графическое решение задачи НПР

Теперь необходимо построить график ЦФ. Для этого с помощью уравнения (4.1) следует отметить центр окружности. В данном примере (в соответствии с целевой функцией) центр окружности имеет такие координаты: $x_1 = 7$ и $x_2 = 4$. Затем с помощью циркуля нужно построить несколько окружностей, увеличивая радиус до тех пор, пока окружность не коснется ближайшей точки ОДР. В этой точке будет минимум ЦФ. Затем с помощью циркуля следует найти наиболее удаленную от центра окружности точку ОДР. В этой точке будет максимум ЦФ.

Из рисунка 4.1.1 видно, что минимум ЦФ находится в точке F, а максимум – в точке D. По графику нужно определить приблизительные значения координат точки F: x_1 = 6,5, x_2 = 3,5. Значение целевой функции в этой точке $Z = 0{,}5$. Ориентировочное значения координат точки D: x_1 = 5,3, x_2 = 1,4, а приближенное значение ЦФ в этой точке $Z = 9{,}65$.

Аналитическое решение

Определим аналитически координаты точки F, в которой имеется минимум ЦФ. В этой точке наблюдается равенство угловых коэффициентов прямой $x_1 + x_2 = 10$ и касательной к графику целевой функции. Уравнение $x_1 + x_2 = 10$ можно записать в виде:

$$x_2 = 10 - x_1. \qquad (4.2.)$$

Из уравнения $x_2 = 10 - x_1$ находим, что угловой коэффициент прямой в точке F равен -1.

Как известно, угловой коэффициент касательной равен производной от функции в точке касания [4]. Угловой коэффициент касательной к окружности в точке F определим с помощью ЦФ как значение производной от функции x_2 по переменной x_1.

В точке касания прямой ВС и окружности радиус окружности будет равен некоторому значению R. Уравнение окружности запишется в виде:

$$(x_1 - 7)^2 + (x_2 - 4)^2 = R^2. \qquad (4.3)$$

Переменную x_2 можно рассматривать как неявную функцию от переменной x_1, то есть

$$x_2 = \varphi(x_1).$$

Дифференцируя уравнение окружности (4.3) по x_1, получим

$$2(x_1 - 7) + 2(x_2 - 4)\, x_2' = 0. \qquad (4.4)$$

Выразим из уравнения (4.4) x_2' (это и есть угловой коэффициент касательной):

$$x_2' = -(x_1 - 7) / (x_2 - 4). \qquad (4.5)$$

Так как угловой коэффициент касательной (4.5) равен тангенсу угла наклона прямой $x_2 = 10 - x_1$, то значение производной (4.5) нужно приравнять к – 1 (такой коэффициент стоит перед $- x_1$ в уравнении 4.2).

В результате получим:

$$-(x_1 - 7) / (x_2 - 4) = -1. \qquad (4.6)$$

После очевидных преобразований уравнения (4.6) получим:

$$x_1 - x_2 = 3. \qquad (4.7)$$

Решая систему линейных уравнений, состоящую из уравнений (4.2) и (4.7),

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 10 \\ x_1 - x_2 = 3 \end{cases}$$

найдем точное значение координат точки F:

$$x_1 = 6{,}5;\ x_2 = 3{,}5. \qquad (4.8)$$

Подставляя найденные значения координат (4.8) в выражение для ЦФ (4.1), получим минимальное значение ЦФ $Z = 0{,}5$.

Как видно из рисунка 4.1.1 максимум ЦФ наблюдается в точке D, которая лежит на пересечении прямых линий AD и CD (это ограничения 2 и 4). Для нахождения координат точки D нужно решить систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 12 \\ x_1 - x_2 = 4 \end{cases}$$

В результате решения данной СЛАУ получаем значения координат точки D: $x_1 = 5{,}333(3)$; $x_2 = 1{,}333(3)$.

Значение ЦФ в этой точке $Z = 9{,}888(8)$.

Примечание.
Если уравнение ЦФ задано в виде:

$$A x_1^2 + B x_1 + A x_2^2 + C x_2 + D = 0,$$

то координаты центра окружности нужно определить с помощью формул:

$$x_1 = -\frac{B}{2A}; \quad x_2 = -\frac{C}{2A}.$$

4.2. Методические указания к заданию 2

Ниже приведен текст программы для математической системы Mathcad с комментариями (полужирный шрифт). Программа предназначена для нахождения минимума ЦФ при заданных ограничениях.

Зададим ЦФ:
$Z(x1, x2) := (x1-7)^2 + (x2-4)^2$
Зададим произвольные начальные значения переменным:
x1 := 0
x2 := 0
Начало блока вычислений
Given
Опишем ограничения:
$x_1+x_2 \leq 10$
$2x_1+x_2 \geq 12$
$x_1-x_2 \geq 2$
$x_1-x_2 \leq 4$
$x_1 \geq 0$
$x_2 \geq 0$
Выполним операцию минимизации:
P: = Minimize (Z, x1, x2)
Выведем на экран значения найденных переменных:
$P = \begin{pmatrix} 6.5 \\ 3.5 \end{pmatrix}$
Вычислим целевую функцию:
$Z(P_0, P_1) = 0.5$

Итак, оптимальные значения переменных:
$x_1 = 6{,}5$, $x_2 = 3{,}5$. Минимальное значение ЦФ Z = 0,5

Для нахождения максимума ЦФ достаточно оператор P: = Minimize (Z, x1, x2) заменить оператором P: = Maximize (Z, x1, x2).

4.3. Методические указания к заданию 3

Пусть дана целевая функция:

$$Z = x_1^2 - 4x_1 + x_2^2 - 6x_2,$$

а также ограничения:

$$x_1 + 0{,}5x_2 = 8$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$

Графическое решение

Для графического решения задачи следует построить график прямой линии $x_1 + 0{,}5x_2 = 8$. Затем нужно определить координаты центра окружности (точка А): $x_1 = 2$; $x_2 = 3$. Из центра окружности следует провести дугу, которая коснется прямой линии в точке В.

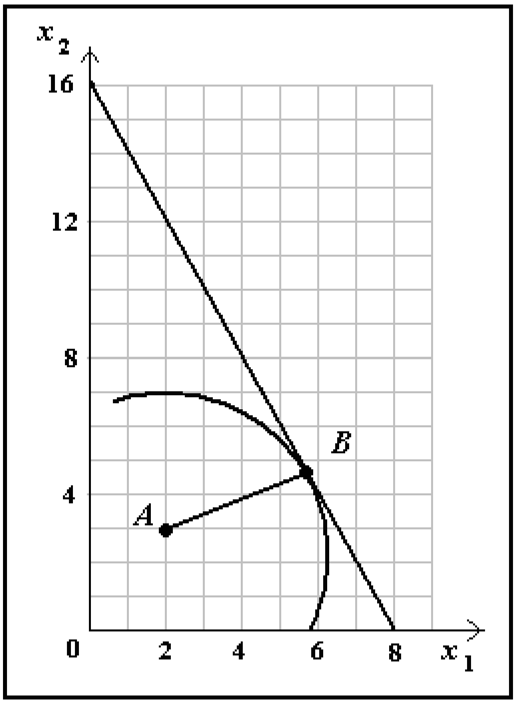


Рисунок 4.3.1. Определение минимума ЦФ

По графику следует определить значения координат точки оптимума (здесь целевая функция минимальна):

$$x_1 = 5{,}5;\ x_2 = 4{,}4;\ Z = 1{,}21.$$

Аналитическое решение

Найдем точное решение задачи НПР **методом множителей Лагранжа**. Вначале необходимо сформировать функцию Лагранжа:

$$F(x_1, x_2, \lambda) = x_1^2 - 4x_1 + x_2^2 - 6x_2 + \lambda (8 - x_1 - 0{,}5x_2)$$

Затем следует найти производные от функции Лагранжа по x_1, x_2 и λ:

$$\partial F/\partial x_1 = 2x_1 - 4 - \lambda$$
$$\partial F/\partial x_2 = 2x_2 - 6 - 0{,}5\lambda$$
$$\partial F/\partial \lambda = 8 - x_1 - 0{,}5x_2$$

Далее найденные производные нужно приравнять к нулю и решить полученную систему линейных алгебраических уравнений.

$$\begin{cases} 2x_1 - 4 - \lambda = 0 \\ 2x_2 - 6 - 0{,}5\lambda = 0 \\ 8 - x_1 - 0{,}5x_2 = 0 \end{cases}$$

Решение данной СЛАУ дает такие результаты:
$\lambda = 7{,}2$;
$x_1 = 5{,}6$;
$x_2 = 4{,}8$.
Точное значение целевой функции составляет $Z = 3{,}2$.

4.4. Методические указания к заданию 4

Задачи математического программирования можно решать с помощью системы Mathcad. Ниже приведен пример программы для решения трехмерной задачи НПР с комментариями (полужирный шрифт).

Зададим ЦФ:
Z(x1,x2, x3) := 3x1 + 4 x_2^2 + 2x3
Зададим произвольные начальные значения переменным:
x1 := 0
x2 := 0
x3 := 0
Начало блока вычислений
Given
Опишем ограничения:
x1 ≥ 0
x2 ≥ 0
x3 ≥ 0
$15\, x_1^2 + 16\, x_2^2 - 17\, x_3 \leq 120$
$18\, x_1^2 - 19\, x_2^2 + 20\, x_3 \leq 130$
$-21\, x_1^2 + 22\, x_2^2 + 23\, x_3 \leq 140$
Выполним операцию максимизации:
P: = Maximize(Z,x1,x2,x3)
Выведем на экран значения найденных переменных:

$$P = \begin{pmatrix} 0.835 \\ 0 \\ 5.873 \end{pmatrix}$$

Вычислим целевую функцию:
$Z(P_0,\ P_1, P_2) = 14.25$

Итак, оптимальные значения переменных: x1 = 0.835, x2 = 0, x3 = 5,873. Максимальное значение ЦФ Z = 14.25.

Построим трехмерный график, который показывает ограничения и оптимальное положение графика целевой функции.

Присвоим значение ЦФ переменной R:
$R := Z(P_0,\ P_1, P_2)$
Создадим циклы для изменения переменных x_1 и x_2:
$x1 := 0..P_0 + 5$
$x2 := 0..P_1 + 5$
Выразим переменную x_3 из трех ограничений и целевой функции:

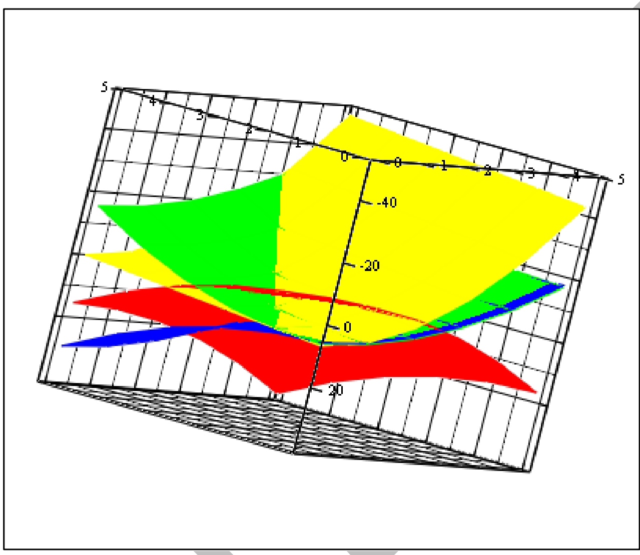
$$x31_{x1,\,x2} := \frac{120 - 15x1^2 - 16x2^2}{-17}$$

$$x32_{x1,\,x2} := \frac{130 - 18x1^2 - 19x2^2}{20}$$

$$x33_{x1,\,x2} := \frac{140 + 21x1^2 - 22x2^2}{23}$$

$$x3_{x1,\,x2} := \frac{R - \left|3x1 + 4x2^2\right|}{2}$$

Графическая иллюстрация полученного решения



x31, x32, x33, x3

Рисунок 4.4.1. - Трехмерный график

4.5. Методические указания к заданию 5

Предположим, что требуется найти минимум целевой функции **градиентным методом:**

$$Z = x_1^2 + x_2^2 - 8x_1 - 6x_2 + 32 \qquad (4.5.1)$$

при ограничениях

$$x_1^2 - 5x_1 + x_2^2 \le 30 \qquad (4.5.2)$$

$$x_1 \ge 0;\ \ x_2 \ge 0$$

Градиентом функции Z(x_1, x_2,…, x_n) в точке M_0 называется вектор, координаты которого равны значениям частных производных функции Z(x_1, x_2,…, x_n) в точке M_0 [8]:

$$grad\ Z(M_0) = \left\{ \frac{\partial Z}{\partial x_1}(M_0), \frac{\partial Z}{\partial x_2}(M_0), \ldots, \frac{\partial Z}{\partial x_n}(M_0) \right\}.$$

Градиент показывает направление наибольшего роста функции (подъема). Этот вектор направлен по нормали к поверхности (линии) уровня в этой точке.

Наглядной иллюстрацией задачи поиска локального максимума может служить процесс восхождения на самую высокую точку горы. Например, нужно подняться из точки В в точку А Сокольих гор (город Самара). При этом ограничения нужно трактовать, как некоторые территории, на которые заходить нельзя.

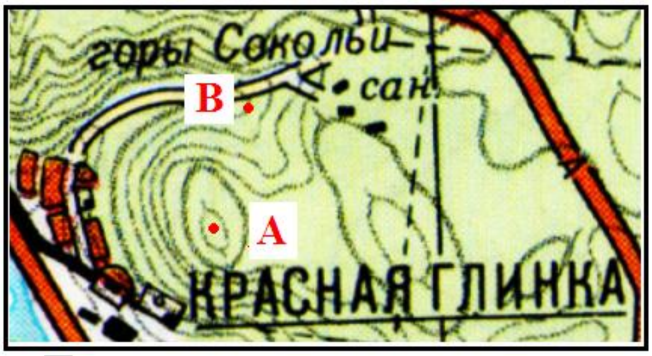


Рис. 4.5.1. Сокольи горы

Градиентный метод позволяет отыскать наиболее короткий путь, на котором скорость изменения высоты с изменением расстояния будет наибольшей. Следующий рисунок показывает траекторию перемещения к вершине некоторой «математической горы».

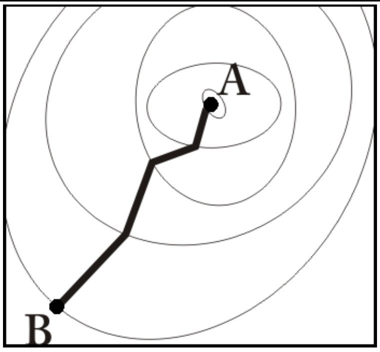


Рис. 4.5.2. «Математическая гора»

Антиградиент показывает направление наискорейшего уменьшения целевой функции (спуска). Наглядной иллюстрации для трехмерной целевой функции может служить поиск самого глубокого места в озере (реке, овраге). Вычисление антиградиента ведется по той же формуле, что и вычисление градиента, но знак перед функцией меняется на противоположный.

Следует иметь в виду, что градиентный метод предназначен для поиска локального, а не глобального (наибольшего) экстремума.

Градиентный метод поиска экстремальной точки предполагает последовательное уточнение координат оптимума путем многократных вычислений. Такие многократные вычисления называются **итерационным процессом**. Градиентный метод является приближенным (численным) методом. Завершаются вычисления в тот момент, когда точность достигает необходимого значения. Необходимую точность вычислений задает исследователь (программист).

Итерационные вычисления могут начинаться в любой точке области допустимых решений. Завершаются вычисления в тот момент, когда значение градиента (антиградиента) становится практически равным нулю или когда значения ЦФ, определенные на соседних итерациях, оказываются почти одинаковыми.

Возьмем произвольную точку, например $M_0(2; 5)$. Данная точка принадлежит ОДР, так как, при подстановке координат точки M_0 в ограничения (4.5.2), условия неравенств выполняются:

$$x_1^2 - 5x_1 + x_2^2 = 2^2 - 5 \cdot 2 + 5^2 = 19 \le 30$$

Для нахождения антиградиента следует найти частные производные целевой функции Z (4.5.1) по переменным x_1 и x_2:

$$-\frac{\partial Z}{\partial x_1} = 8 - 2x_1$$
$$-\frac{\partial Z}{\partial x_2} = 6 - 2x_2$$

Итак, значение антиградиента в произвольной точке определяется выражением:

$$-\nabla Z(M_i) = (8 - 2x_1;\ 6 - 2x_2). \qquad (4.5.3)$$

Подставляя координаты начальной точки M_0 в (4.5.3), получим конкретное значение антиградиента:

$$-\nabla Z(M_0) = (4; -4).$$

В предыдущих формулах знак ∇ может читаться так: набла, набла-оператор, оператор Гамильтона или гамильтониан.

Поскольку найденное значение антиградиента $-\nabla Z(M_0) \neq 0$ (существенно отличается от нуля), то точка M_0 не является точкой минимума.

На следующей итерации по известным координатам начальной точки $M_0(2; 5)$ и найденному антиградиенту (4.5.3) вычисляют координаты новой точки $M_1(x_1; x_2)$:

$$x_1 = 2 + 4h;\quad x_2 = 5 - 4h. \qquad (4.5.4)$$

Для определения координат новой точки в формуле (4.5.4) нужно задать величину параметра h. Если значение h выбрать большим, то координаты оптимальной точки будут найдены с большой погрешностью. При уменьшении параметра h точность расчетов возрастает, однако существенно растет объем вычислительных операций.

Оптимальное значение параметра h, при котором приращение целевой функции ΔZ на данной итерации будет максимальным, находят из соотношения [5]:

$$\frac{d\Delta Z}{dh} = \nabla Z(M_0) \cdot \nabla Z(M_1) = 0\,. \qquad (4.5.5)$$

Подставляя в (4.5.5) данные рассматриваемого примера, получим:

$$d\Delta Z/dh = (4; -4) \cdot [8 - 2(2 + 4h);\ 6 - 2(5 - 4h)] =$$

$$(4; -4) \cdot (4 - 8h; -4 + 8h) = (16 - 32h + 16 - 32h) =$$

$$32 - 64h = 0 \qquad (4.5.6)$$

Из соотношения (4.5.6) несложно определить оптимальное значение параметра $h = 0{,}5$, при котором изменение ΔZ целевой функции Z на данной итерации достигает наибольшей величины.

Определим координаты новой точки с учетом найденного оптимального значения параметра h:

$$M_1 = (2 + 4h; 5 - 4h) = (2 + 4\cdot 0{,}5;\ 5 - 4\cdot 0{,}5) = (4; 3).$$

Проверим принадлежность новой точки области допустимых решений:

$$x_1^2 - 5x_1 + x_2^2 = 16 - 20 + 9 = 5 \leq 30.$$

Выполненная проверка показывает, что координаты новой точки M_1 принадлежат области допустимых решений.

Для вычисления антиградиента в точке M_1 подставим её координаты в формулу (4.5.3):

$$-\nabla Z(M_1) = (8 - 2x_1; 6 - 2x_2) = (8 - 2\cdot 4; 6 - 2\cdot 3) = (0; 0).$$

Расчеты показывает, что значение антиградиента в точке M_1 равно нулю. Значит, точка M_1 является искомой точкой минимума. Значение ЦФ в точке минимума составляет:

$$Z = x_1^2 + x_2^2 - 8x_1 - 6x_2 + 32 = 16+9-32-18+32= 7.$$

Ответ: координаты точки минимума $x_1 = 4$, $x_2 = 3$, минимальное значение ЦФ Z = 7.

Результаты расчетов удобно представить с помощью таблицы.

Таблица 6

Точки	x_1	x_2	Проверка неравенств	Производная по x_1	Производная по x_2	Градиент	h
M_0	2	5	19 < 30	$8 - 2x_1$	$6 - 2x_2$	(4; -4)	0,5
M_1	4	3	5 < 30	$8 - 2x_1$	$6 - 2x_2$	(0; 0)	-

Литература

1. Алексеев А.П. Информатика 2007. – М.: СОЛОН-ПРЕСС, 2007. – 608 с.
2. Алексеев А.П., Сухова Е.Н. Линейное программирование. – Самара: ПГАТИ, 2004. – 41 с.
3. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах.- М.: Высш. шк, 1993.- 336 с.
4. Алексеев А.П., Камышенков Г.Е. Использование ЭВМ для математических расчетов. – Самара: Парус, 1998.- 190 с.
5. Калихман И.Л. Сборник задач по математическому программированию. – М.: Высшая школа, 1975. – 270 с.
6. Невежин В.П., Кружилов С.И. Сборник задач по курсу «Экономико-математическое моделирование». – М.: ОАО «Издательский Дом «Городец», 2005. – 320 с.
7. Математический энциклопедический словарь. Гл. редактор Ю.В.Прохоров. - М.: Советская энциклопедия, 1988.- 847 с.
8. Справочник по математике для экономистов. Под ред. В.И.Ермакова. – М.: Высш. школа, 1987.- 336 с.