

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО СВЯЗИ
Федеральное государственное образовательное бюджетное учреждение
высшего профессионального образования
«ПОВОЛЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ТЕЛЕКОММУНИКАЦИЙ И ИНФОРМАТИКИ»

Кафедра Теоретических основ радиотехники и связи

Д.Н. Панин, Л.В. Адамович

ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Учебное пособие
Часть 2.

Самара
2015

УДК: 621.3.01(075.8) + 621.372(075.8)

БКК

П16

Рекомендовано к изданию методическим советом ПГУТИ,
Протокол № 21, от 15.04.2015

Панин, Д. Н.

Теория электрических цепей: учеб. пособие. Ч.1[Текст] / Д. Н. Панин, Л. В. Адамович; ПГУТИ, Каф. ТОРС – Самара: ПГУТИ, 2015. – 43 с.

Учебное пособие «Теория электрических цепей» содержит теоретический материал и варианты решения задач по курсу ТЭЦ, изучаемые во второй части курса ТЭЦ. Разработано в соответствии с ФГОС ВПО по направлениям подготовки «Инфокоммуникационные технологии и системы связи», «Радиотехника», «Информационная безопасность телекоммуникационных систем» и предназначено для студентов 2 курса студентов ФБТО для практических занятий и самостоятельной подготовки.

Содержание

Общие указания.....	4
Выбор варианта к выполнению контрольной работы.....	4
Основные теоретические сведения для решения задачи № 1.....	5
Основные теоретические сведения к решению задачи № 2.....	25
Приложение № 1	30
Приложение № 2	39
Литература.....	43

Общие указания

«Теория электрических цепей» (ТЭЦ) – первый специальный курс, являющийся основой важнейших научных дисциплин в ВУЗе связи и базой, на которой строится подготовка инженеров по радиосвязи, радиовещанию и телевидению, автоматической и многоканальной электросвязи. Данный курс базируется на материале, изученном в курсах «Математика», «Физика», «Информатика». Теория электрических цепей изучается на I и II курсе. Настоящие методические указания посвящены разделам дисциплины, изучаемым в I семестре.

Выбор варианта

Контрольные задания составлены в 100 вариантах (см. приложения). Каждый студент выполняет контрольную работу в аудиторной форме по одному из вариантов. Номер варианта задания выдается непосредственно перед выполнением контрольной работы лично преподавателем.

Методические указания к решению задачи № 1

В задаче № 1 основное внимание уделяется методам анализа переходных процессов в линейных электрических цепях (классический метод, операторный метод).

Возникновение переходных процессов обусловлено коммутацией в цепях с реактивными элементами. В резистивных цепях переходные процессы не наблюдаются. Коммутация – включение, выключение; переключение параметров схемы или скачкообразное изменение воздействующего сигнала.

Момент коммутации называется начальным моментом времени ($t = 0$). В момент коммутации действуют два закона коммутации:

I закон коммутации – ток в индуктивности до коммутации в установившемся режиме равен току в индуктивности в момент коммутации и с этого момента начинает плавно изменяться, т.е.

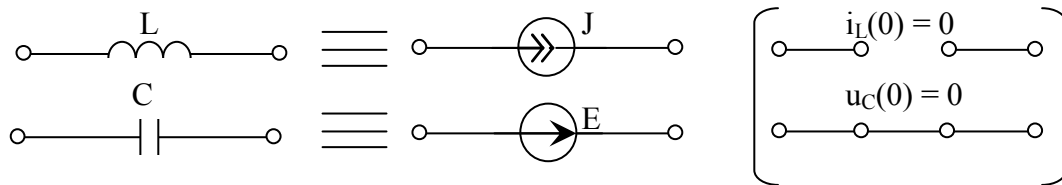
$$i_L(0_-) = i_L(0) = i_L(0_+).$$

II закон коммутации – напряжение на ёмкости до коммутации в установившемся режиме равно напряжению на ёмкости в момент коммутации и с этого момента начинает плавно изменяться, т.е.

$$u_C(0_-) = u_C(0) = u_C(0_+).$$

С помощью законов коммутации определяются начальные условия для тока в индуктивности и напряжения на емкости. Под начальными условиями понимают значения токов и напряжений в момент коммутации. Начальные условия, определяемые с помощью законов коммутации, называют независимыми начальными условиями, т.е. $i_L(0), u_C(0)$. Остальные являются зависимыми начальными условиями – определяются по законам Кирхгофа по схеме замещения, составленной в момент коммутации $t = 0$. В момент коммутации ($t = 0$) в общем случае

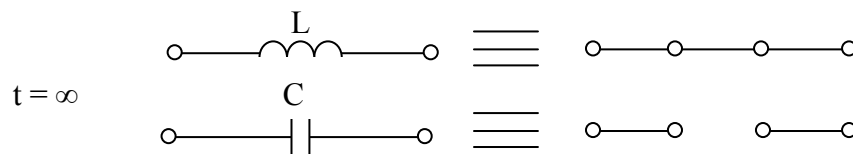
индуктивность можно заменить источником тока с $J = i_L(0)$, а емкость – источником напряжения с $E = u_C(0)$. Когда $i_L(0) = 0$ и $u_C(0) = 0$ индуктивность заменяется обрывом, а емкость – коротким замыканием.



Для качественной оценки переходного процесса важно знать и конечные условия.

Конечные условия – это значение токов и напряжений в установившемся режиме при $t = \infty$.

Схемы замещения реактивных элементов в установившемся режиме постоянного тока:



Сущность классического метода состоит в составлении и решении дифференциального уравнения для мгновенных значений токов и напряжений на основании законов Кирхгофа. Порядок дифференциального уравнения « n » определяется числом независимых начальных условий.

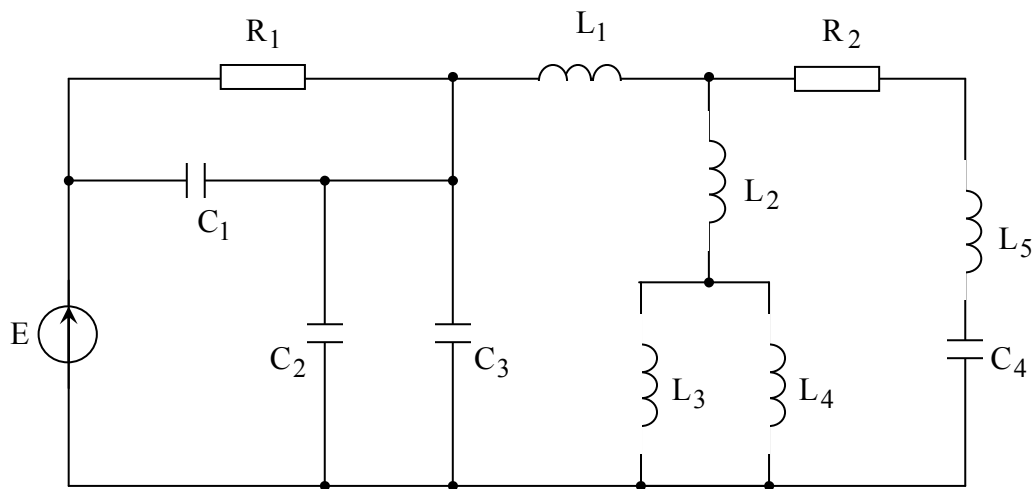
Другой способ по формуле: $n = n_{LC} - n_C - n_L$,

где n_{LC} – число реактивных элементов, n_C – число независимых емкостных контуров, n_L – число независимых индуктивных узлов.

Независимый емкостной контур – контур, образованный только ёмкостями или ёмкостями и независимыми источниками напряжения.

Независимый индуктивный узел – узел, к которому подключены только индуктивности или индуктивности и независимые источники тока.

Например:



$$n_{LC} = 9, n_C = 2, n_L = 1.$$

В общем случае дифференциальное уравнение можно представить в виде:

$$a_n \cdot \frac{d^n f(t)}{dt} + a_{n-1} \cdot \frac{d^{n-1} f(t)}{dt} + \dots + a_1 \cdot \frac{df(t)}{dt} + a_0 f(t) = s(t),$$

где a_0, \dots, a_n – коэффициенты, определяющие параметры цепи, $f(t)$ – переходная величина (реакция цепи), $s(t)$ – приложенное внешнее воздействие от источника.

Решение данного уравнения ищется в виде: $f(t) = f_{cb}(t) + f_{пр}(t)$.

$f_{cb}(t)$ – свободная составляющая, определяется из однородного дифференциального уравнения:

$$a_n \cdot \frac{d^n f_{cb}(t)}{dt} + a_{n-1} \cdot \frac{d^{n-1} f_{cb}(t)}{dt} + \dots + a_1 \cdot \frac{df_{cb}(t)}{dt} + a_0 f_{cb}(t) = 0.$$

$f_{пр}(t)$ – принужденная составляющая определяется из неоднородного дифференциального уравнения в зависимости от вида воздействия, либо методами расчета цепей в установившемся режиме при $t = \infty$.

По виду ОДУ получим характеристическое уравнение, осуществив замену:

$$\frac{d}{dt} \rightarrow p.$$

Характеристическое уравнение: $a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + \dots + a_1 \cdot p + a_0 = 0$.

Пусть p_k – корни характеристического уравнения, при этом, если p_k – отрицательные, вещественные и различные, то

$$f_{св}(t) = A_1 \cdot e^{p_1 \cdot t} + A_2 \cdot e^{p_2 \cdot t} + \dots + A_n \cdot e^{p_n \cdot t},$$

где $A_1 \dots A_n$ – постоянные интегрирования, которые определяются из начальных условий.

Определение постоянных интегрирования из начальных условий сильно осложняет расчёт переходных процессов классическим методом. По мере усложнения электрических схем и возрастания порядка дифференциальных уравнений трудности, связанные с нахождением постоянных интегрирования, увеличиваются. Для инженерной практики более удобным является метод решения линейных дифференциальных уравнений, при котором заданные начальные условия включаются в исходные уравнения и для нахождения искомых функций не требуется дополнительно определять постоянные интегрирования.

Идея операторного метода заключается в том, что из области функций действительного переменного решение переносится в область функций комплексного переменного $p = \sigma + j\omega$, где операции принимают более простой вид, а именно: вместо исходных дифференциальных или интегро-дифференциальных уравнений получаются алгебраические уравнения; затем полученный решением алгебраических уравнений результат «интерпретируется», т.е. производится обратный переход в область функций действительного переменного.

Введем понятия: $f(t)$ – оригинал, $F(p)$ – изображение. Оригинал и изображение представляют собой пару функций действительного переменного t и комплексного переменного p , связанных преобразованиями Лапласа.

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-p t} dt \text{ – прямое преобразование Лапласа.}$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(p) e^{p t} dp \text{ – обратное преобразование Лапласа.}$$

Если изображение $F(p)$ представить в виде дробно-рациональной функции:

$$F(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{a_n p^n + \dots + a_0}{b_m p^m + \dots + b_0},$$

то соответствующий оригинал можно определить по теореме разложения (Хевисайда):

$$f(t) = \sum_{k=1}^m \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)} e^{p_k t},$$

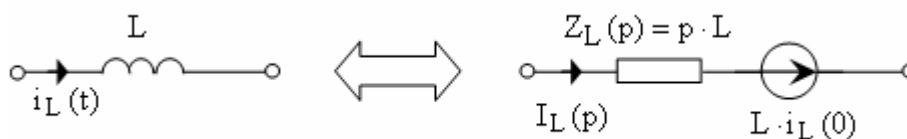
где p_k – простые корни характеристического уравнения:

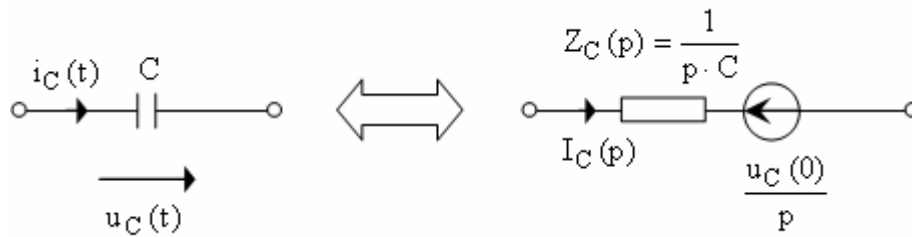
$$F_2(p) = b_m p^m + \dots + b_0 = 0.$$

Основные этапы анализа переходных процессов операторным методом

1. Анализ цепи до коммутации и определение независимых начальных условий.
2. Составление операторной схемы замещения цепи после коммутации.

Операторная схема замещения описывает операторные изображения токов и напряжений и составляется после коммутации. При составлении операторной схемы замещения необходимо помнить, как замещаются реактивные элементы (индуктивность и ёмкость):





$Z_L(p) = p \cdot L$ – операторное сопротивление индуктивного элемента,

$Z_C(p) = \frac{1}{p \cdot C}$ – операторное сопротивление ёмкостного элемента.

3. Составление уравнений в операторной форме.
4. Решение уравнений относительно изображений искомых токов и напряжений.
5. Определение оригиналов искомых токов и напряжений.

Приведём примеры решения некоторых задач.

Пример № 1

Классическим методом определить переходное напряжение на ёмкости $u_C(t)$.

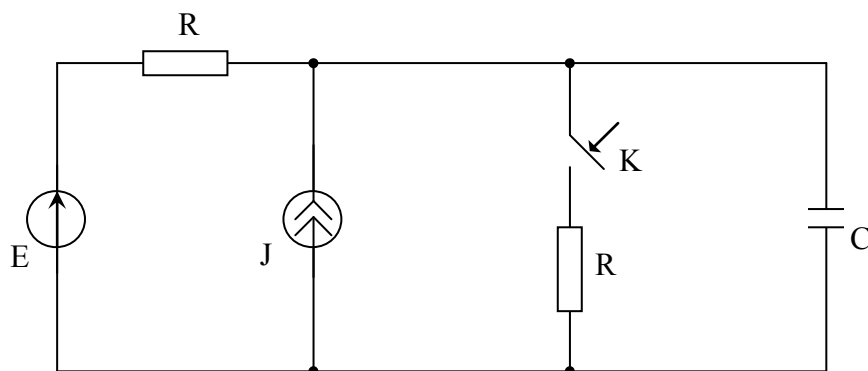


Рис. 1 Исходная схема до коммутации

Решение

1. Определим напряжение на ёмкости $u_C(0_-)$ по схеме замещения до коммутации в установившемся режиме постоянного тока (рис. 2). В этой схеме ёмкость мы должны заменить участком холостого хода, поскольку в

режиме постоянного тока (частота равна нулю) емкостной элемент обладает бесконечно большим сопротивлением.

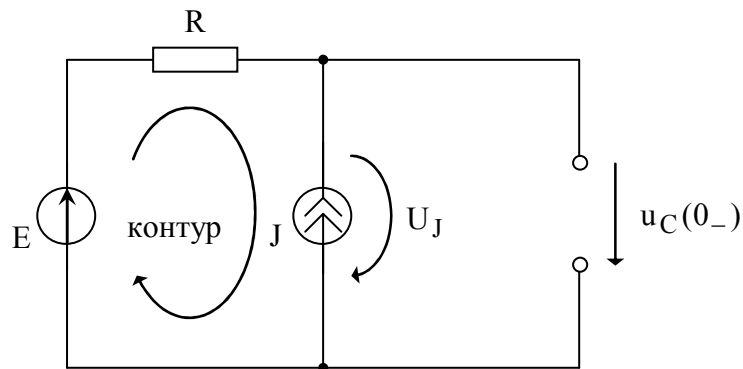


Рис. 2 Схема замещения до коммутации в установившемся режиме

На основании закона Кирхгофа легко определяем:

$$E = u_C(0_-) - J \cdot R, \quad u_C(0_-) = E + J \cdot R.$$

Согласно II закону коммутации напряжение на ёмкости в момент коммутации:

$$u_C(0) = u_C(0_-) = E + J \cdot R \text{ — независимое начальное условие.}$$

2. Далее необходимо составить дифференциальное уравнение для независимой переменной $u_C(t)$. Анализируем схему после коммутации, которая описывает мгновенные значения переходных токов и напряжений (рис. 3).

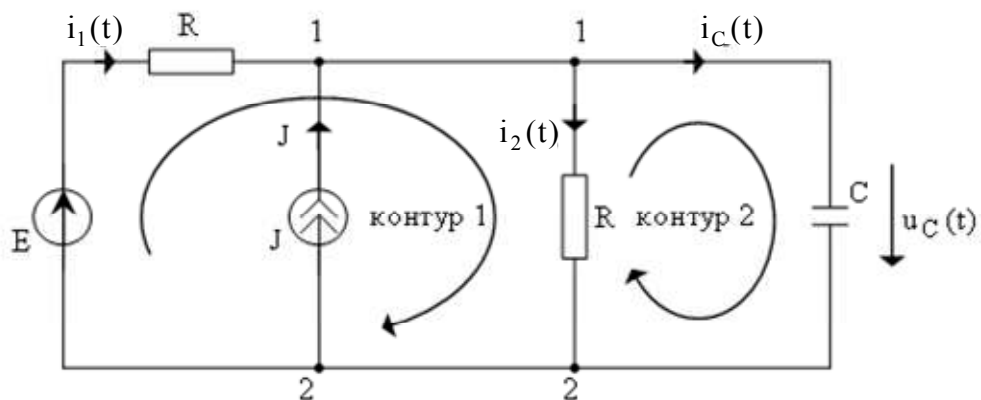


Рис. 3 Послекоммутационная схема для мгновенных значений токов и напряжений

Составим три уравнения на основании законов Кирхгофа.

$$E = i_1(t) \cdot R + i_2(t) \cdot R, \quad 0 = u_C(t) - i_2(t) \cdot R, \quad i_1(t) + J = i_2(t) + i_C(t).$$

Из второго уравнения следует, что $i_2(t) = \frac{u_C(t)}{R}$;

Из первого уравнения следует, что $i_1(t) = \frac{E}{R} - i_2(t) = \frac{E - u_C(t)}{R}$.

Используя третье уравнение, получим:

$$\frac{E - u_C(t)}{R} + J = \frac{u_C(t)}{R} + i_C(t), \quad R \cdot i_C(t) + 2 \cdot u_C(t) = E + J \cdot R, \quad \text{т.к. } i_C(t) = C \cdot \frac{du_C(t)}{dt}, \quad \text{то}$$

$$R \cdot C \cdot \frac{du_C(t)}{dt} + 2 \cdot u_C(t) = E + J \cdot R - \text{неоднородное дифференциальное}$$

уравнение (НДУ).

Решение НДУ будем искать в виде двух составляющих (свободной и принуждённой):

$$u_C(t) = u_{C\text{св}}(t) + u_{C\text{пр}}(t).$$

Свободную составляющую переходной величины определяем по виду однородного дифференциального уравнения (ОДУ).

$$R \cdot C \cdot \frac{du_{C\text{св}}(t)}{dt} + 2 \cdot u_{C\text{св}}(t) = 0 - \text{однородное дифференциальное уравнение}$$

(ОДУ)

Составим характеристическое уравнение, осуществляя символическую

замену $p \rightarrow \frac{d}{dt}$

$$R \cdot C \cdot p + 2 = 0 - \text{характеристическое уравнение.}$$

Определим корень характеристического уравнения: $p = -\frac{2}{R \cdot C}$ – вещественный и отрицательный.

Решение для свободной составляющей будем искать в виде:

$$u_{C\text{св}}(t) = A \cdot e^{p \cdot t} = A \cdot e^{-\frac{2}{R \cdot C} \cdot t}, \quad \text{где } A = \text{const}.$$

3. Определим принуждённую составляющую переходной величины по схеме замещения составленной после коммутации в установившемся режиме постоянного тока (рис. 4).

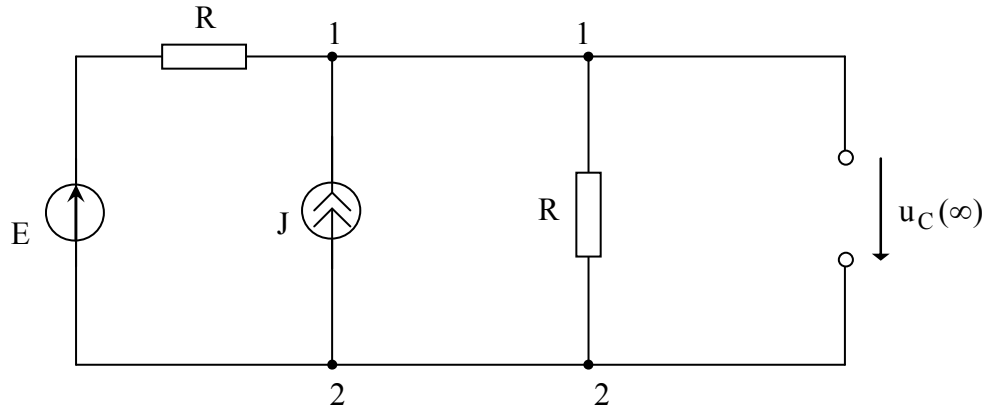


Рис. 4 Схема замещения после коммутации в установившемся режиме

Анализируем данную схему методом узловых напряжений (МУН). В качестве базисного выбираем узел 2, т.е. его узловое напряжение будет равным нулю. Таким образом, искомое напряжение на емкостном элементе после коммутации в установившемся режиме будет равно узловому напряжению узла 1, т.е. $u_C(\infty) = U_1$. Составим по МУН уравнение для определения U_1 .

$$U_1 \cdot \left[\frac{1}{R} + \frac{1}{R} \right] = E \cdot \frac{1}{R} + J, \text{ откуда } U_1 = u_{Cпр}(t) = \frac{1}{2} \cdot (E + J \cdot R).$$

4. Таким образом, общий вид реакции (переходное напряжение на ёмкости) определяется в виде:

$$u_C(t) = A \cdot e^{-\frac{2}{R \cdot C} \cdot t} + \frac{1}{2} \cdot (E + J \cdot R).$$

В этом выражении остаётся неизвестная константа A , её определяем из независимого начального условия $u_C(0) = E + J \cdot R$. Составим уравнение:

$$E + J \cdot R = A + \frac{1}{2} \cdot (E + J \cdot R), \text{ откуда } A = \frac{1}{2} \cdot (E + J \cdot R).$$

Осуществим подстановку этой константы в общий вид реакции, и запишем окончательный ответ.

$$u_C(t) = A \cdot e^{-\frac{2}{R \cdot C} t} + \frac{1}{2} \cdot (E + J \cdot R) = \frac{1}{2} \cdot (E + J \cdot R) \cdot e^{-\frac{2}{R \cdot C} t} + \frac{1}{2} \cdot (E + J \cdot R) = \frac{1}{2} \cdot (E + J \cdot R) \cdot \left[1 + e^{-\frac{2}{R \cdot C} t} \right]$$

Ответ: $u_C(t) = \frac{E + J \cdot R}{2} \cdot \left\{ 1 + e^{-\frac{2}{R \cdot C} t} \right\}, \text{В.}$

Пример № 2

Операторным методом определить переходное напряжение на ёмкости $u_C(t)$.

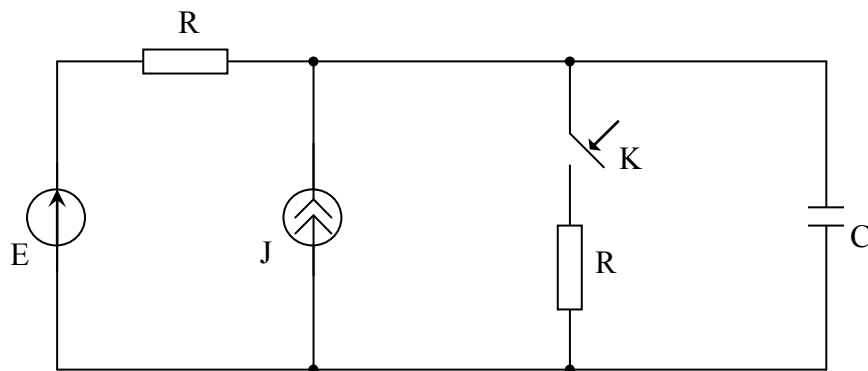


Рис. 5 Исходная схема до коммутации

Решение

1. Определим напряжение на ёмкости $u_C(0_-)$ (см. пример № 1).

$u_C(0) = u_C(0_-) = E + J \cdot R$ – независимое начальное условие.

2. Составим операторную схему замещения. При составлении операторной схемы замещения руководствуются следующими правилами:

- схема отражает послекоммутационное состояние цепи (коммутирующие устройства не показываются);

- ёмкость C заменяется последовательным соединением операторного сопротивления $1/pC$ и источника ЭДС с величиной равной $u_C(0)/p$, где $u_C(0)$ – начальное значение напряжения на ёмкости, направление источника ЭДС противоположно направлению тока в ёмкости;

- источники напряжения и тока заменяются их операторными изображениями.

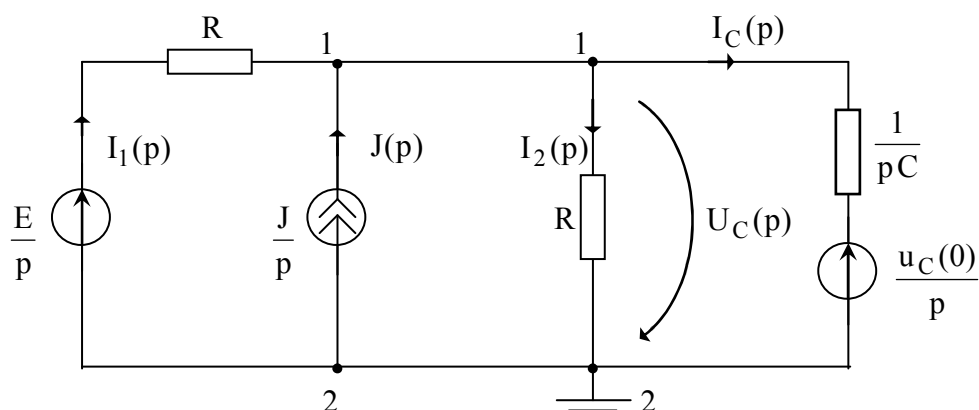


Рис. 6 Операторная схема замещения

Для расчета операторной схемы замещения применимы все известные методы расчета разветвленных цепей: метод уравнений Кирхгофа (метод токов ветвей), метод контурных токов, метод узловых напряжений и т.д. Нужно в каждом случае выбрать такой расчетный метод, при котором получается наименьшее число уравнений. Это зависит от конфигурации схемы замещения и от того, какая величина является искомой. Для нашего случая наиболее удобен метод узловых операторных напряжений. По рис. 6 определим количество уравнений $N_{\text{мун}}$, составляемых по методу узловых операторных напряжений: $N_{\text{мун}} = N_{\text{уз}} - 1 = 2 - 1 = 1$. За базисный принимаем узел 2, т.е. его операторное узловое напряжение $U_2(p) = 0$. Составим уравнение для определения операторного узлового напряжения $U_1(p)$ узла 1:

$$U_1(p) \left[\frac{1}{R} + \frac{1}{R} + pC \right] = \frac{E}{pR} + \frac{J}{p} + \frac{u_C(0)}{p} pC, \quad U_1(p) \left[\frac{2}{R} + pC \right] = \frac{E}{pR} + \frac{J}{p} + \frac{u_C(0)}{p} pC.$$

После несложных алгебраических преобразований получим:

$$U_1(p) = \frac{E + JR + pu_C(0)RC}{p(2 + pRC)}.$$

По операторной схеме замещения (рис. 6) легко видеть, что искомое операторное изображение напряжения на ёмкости определяется выражением вида:

$$U_C(p) = U_1(p) - U_2(p) = \frac{E + JR + pu_C(0)RC}{p(2 + pRC)}.$$

3. Определим по найденному операторному изображению $U_C(p)$ соответствующий оригинал $u_C(t)$ согласно теореме разложения (Хевисайда). Для этого представим $U_C(p)$ в виде дробно-рациональной функции:

$$U_C(p) = \frac{E + JR + pu_C(0)RC}{p(2 + pRC)} = \frac{F_1(p)}{F_2(p)},$$

где $F_1(p) = E + JR + pu_C(0)RC$, $F_2(p) = p(2 + pRC)$.

Определим корни уравнения: $F_2(p) = p(2 + pRC) = 0$, откуда $p_1 = 0$,

$$p_2 = -\frac{2}{RC}.$$

Определим производную функции $F_2(p)$: $F_2'(p) = \frac{dF_2(p)}{dp} = 2 + 2pRC$.

Согласно теореме разложения искомый оригинал $u_C(t)$ определяется выражением:

$$u_C(t) = \frac{F_1(p_1)}{F_2'(p_1)} e^{p_1 t} + \frac{F_1(p_2)}{F_2'(p_2)} e^{p_2 t} = \frac{E + JR}{2} + \frac{E + JR - 2u_C(0)}{-2} e^{-\frac{2}{RC}t}.$$

Поскольку $u_C(0) = E + JR$, преобразуем последнее соотношение:

$$u_C(t) = \frac{E + JR}{2} + \frac{E + JR - 2E - 2JR}{-2} e^{-\frac{2}{RC}t} = \frac{E + JR}{2} + \frac{E + JR}{2} e^{-\frac{2}{RC}t} = \frac{E + JR}{2} \left\{ 1 + e^{-\frac{2}{RC}t} \right\}$$

Ответ: $u_C(t) = \frac{E + JR}{2} \left\{ 1 + e^{-\frac{2}{RC}t} \right\}, В.$

Пример № 3

Классическим методом определить переходный ток в индуктивности $i_L(t)$.

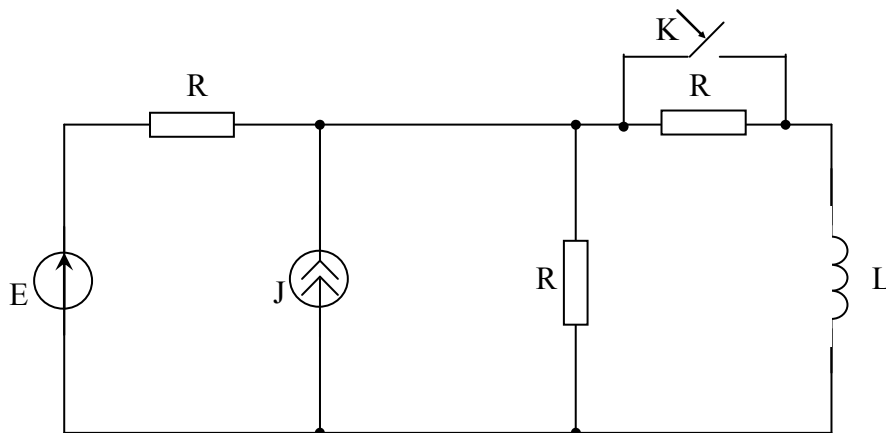


Рис. 7 Исходная схема до коммутации

Решение

1. Определим ток в индуктивности $i_L(0_-)$ по схеме замещения до коммутации в установившемся режиме постоянного тока (рис. 8). В этой схеме индуктивность мы должны заменить участком короткого замыкания, поскольку в режиме постоянного тока (частота равна нулю) индуктивный элемент обладает бесконечно малым сопротивлением.

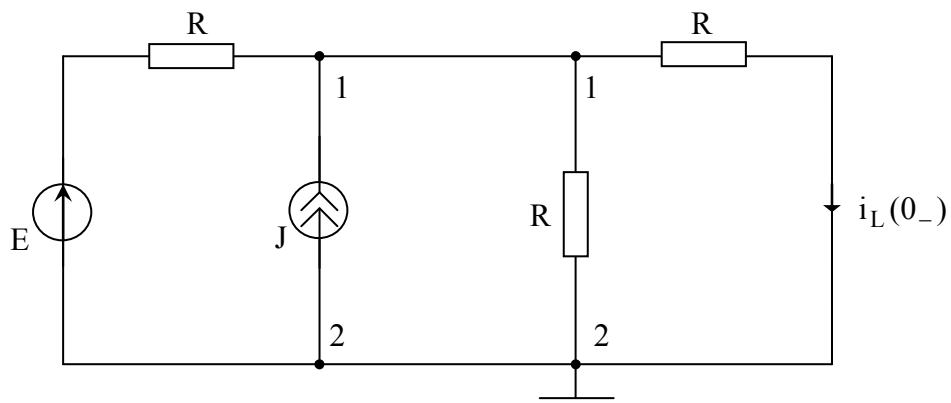


Рис. 8 Схема замещения до коммутации в установившемся режиме

Для определения тока $i_L(0_-)$ выбираем один из методов анализа в установившемся режиме, пусть это будет метод узловых напряжений (МУН). Узел 2 принимаем за базисный, поэтому его узловое напряжение

будет равным нулю ($U_2 = 0$). Составим уравнение для определения узлового напряжения первого узла U_1 :

$$U_1 \left[\frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R} \right] = \frac{E}{R} + J, \text{ откуда } U_1 = \frac{1}{3}(E + JR).$$

По закону Ома определяем искомый ток $i_L(0_-) = \frac{U_1 - U_2}{R} = \frac{E}{3R} + \frac{J}{3}$.

Согласно I закону коммутации ток в индуктивности в момент коммутации:

$$i_L(0) = i_L(0_-) = \frac{E}{3R} + \frac{J}{3} - \text{независимое начальное условие.}$$

2. Далее необходимо составить дифференциальное уравнение для независимой переменной $i_L(t)$. Анализируем схему после коммутации, которая описывает мгновенные значения переходных токов и напряжений (рис. 9).

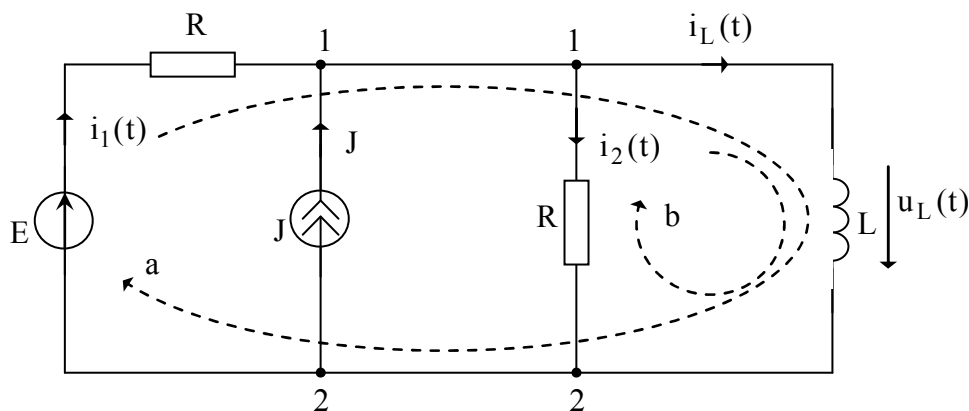


Рис. 9 Послекоммутационная схема для мгновенных значений токов и напряжений

По законам Кирхгофа необходимо составить три уравнения, т.к.

$$N_{\text{МТВ}} = N_{\text{вет}} - N_J = 4 - 1 = 3.$$

$$E = i_1(t)R + u_L(t) \text{ (для контура а), } 0 = u_L(t) - i_2(t)R \text{ (для контура б),}$$

$$i_1(t) + J = i_2(t) + i_L(t).$$

Из второго уравнения следует, что $i_2(t) = \frac{u_L(t)}{R}$;

Из первого уравнения следует, что $i_1(t) = \frac{E - u_L(t)}{R}$.

Используя третье уравнение, получим:

$$\frac{E - u_L(t)}{R} + J = \frac{u_L(t)}{R} + i_L(t), \quad 2 \frac{u_L(t)}{R} + i_L(t) = \frac{E}{R} + J, \quad \text{т.к. } u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}, \text{ то}$$

$$2 \frac{L}{R} \frac{di_L(t)}{dt} + i_L(t) = \frac{E}{R} + J - \text{неоднородное дифференциальное уравнение}$$

первого порядка (НДУ).

Решение НДУ будем искать в виде двух составляющих (свободной и принуждённой):

$$i_L(t) = i_{L\text{св}}(t) + i_{L\text{пр}}(t).$$

Свободную составляющую переходной величины определяем по виду однородного дифференциального уравнения (ОДУ).

$$2 \frac{L}{R} \frac{di_{L\text{св}}(t)}{dt} + i_{L\text{св}}(t) = 0 - \text{однородное дифференциальное уравнение (ОДУ)}.$$

Составим характеристическое уравнение, осуществляя символическую замену $p \rightarrow \frac{d}{dt}$

$$2 \frac{L}{R} p + 1 = 0 - \text{характеристическое уравнение.}$$

Определим корень характеристического уравнения: $p = -\frac{R}{2L}$ –

вещественный и отрицательный.

Решение для свободной составляющей будем искать в виде:

$$i_{L\text{св}}(t) = A \cdot e^{p \cdot t} = A \cdot e^{-\frac{R}{2L} \cdot t}, \quad \text{где } A = \text{const}.$$

3. Определим принуждённую составляющую переходной величины по схеме замещения составленной после коммутации в установившемся режиме постоянного тока (рис. 10).

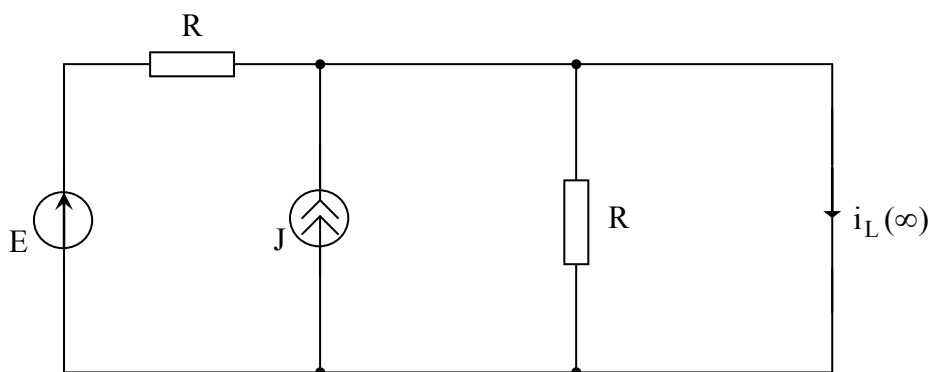


Рис. 10 Схема замещения после коммутации в установившемся режиме

Анализируем данную схему одним из методов анализа цепей в установившемся режиме, пусть это будет метод суперпозиции. Согласно этому методу необходимо определить реакцию цепи (в данном случае ток в индуктивности) от каждого воздействия в отдельности (в данном случае источник ЭДС и источник тока). Истинный ток в индуктивном элементе будет определяться суммой этих реакций. Итак, определим реакцию $i_{1L}(\infty)$ от источника ЭДС, при этом исключив из схемы источник тока. Поскольку внутреннее сопротивление источника тока равно бесконечности, мы обязаны на его месте изобразить холостой ход (рис. 11).

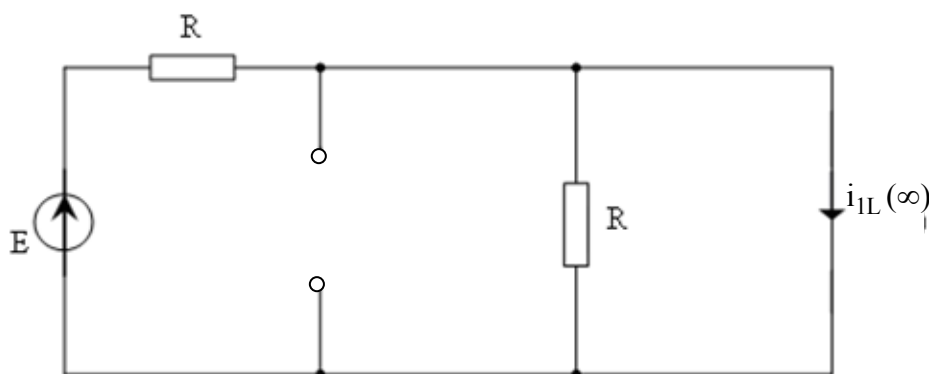


Рис. 11 Схема по определению реакции от источника ЭДС

По схеме (рис. 11) видно, что реакция тока в индуктивности от источника ЭДС определяется выражением вида: $i_{1L}(\infty) = \frac{E}{R}$.

Далее определим реакцию $i_{2L}(\infty)$ от источника тока, при этом исключаем из схемы источник ЭДС. Поскольку внутреннее сопротивление источника ЭДС равно нулю, на его месте будет короткое замыкание (рис. 12).

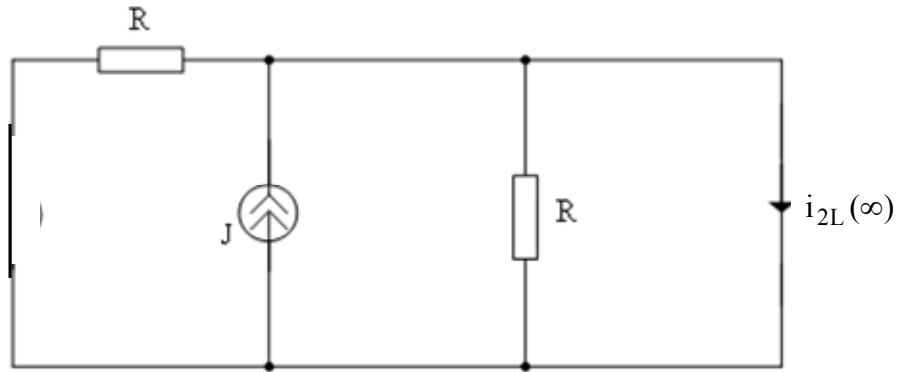


Рис. 12 Схема по определению реакции от источника тока

По схеме (рис. 12) видно, что реакция тока в индуктивности от источника тока определяется выражением вида: $i_{2L}(\infty) = J$.

Истинный ток в индуктивности (принужденная составляющая)

определяется как сумма реакций: $i_{Lnp}(t) = i_L(\infty) = i_{1L}(\infty) + i_{2L}(\infty) = \frac{E}{R} + J$.

4. Переходный ток в индуктивности определяется в виде:

$$i_L(t) = A e^{-\frac{R}{2L}t} + \frac{E}{R} + J.$$

В этом выражении остаётся неизвестная константа A , её определяем из независимого начального условия $i_L(0) = i_L(0_-) = \frac{E}{3R} + \frac{J}{3}$. Составим

уравнение:

$$\frac{E}{3R} + \frac{J}{3} = A + \frac{E}{R} + J, \text{ откуда } A = -\frac{2}{3} \left[\frac{E}{R} + J \right].$$

Осуществим подстановку этой константы в общий вид реакции, и запишем окончательный ответ.

$$i_L(t) = -\frac{2}{3} \left[\frac{E}{R} + J \right] e^{-\frac{R}{2L}t} + \frac{E}{R} + J = \left[\frac{E}{R} + J \right] \left[1 - \frac{2}{3} e^{-\frac{R}{2L}t} \right].$$

$$\text{Ответ: } i_L(t) = \left[\frac{E}{R} + J \right] \left[1 - \frac{2}{3} e^{-\frac{R}{2L}t} \right].$$

Пример № 4

Операторным методом определить переходный ток в индуктивности $i_L(t)$.

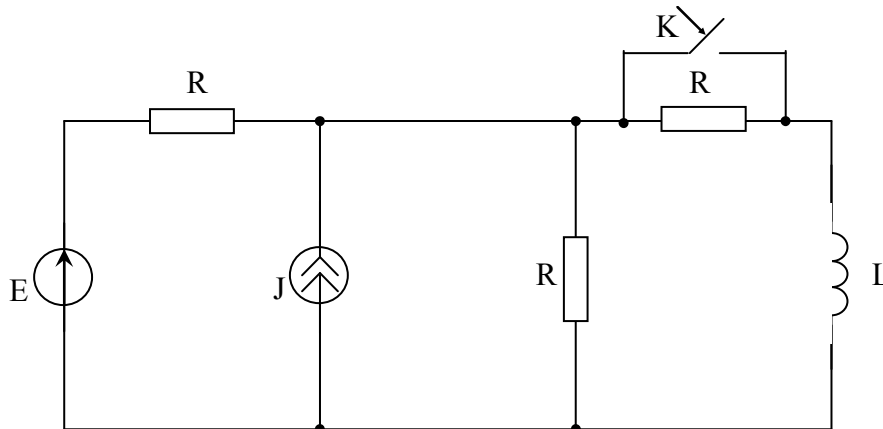


Рис. 13 Исходная схема до коммутации

Решение

1. Определим ток в индуктивности $i_L(0_-)$ (см. пример № 3).

$$i_L(0_-) = i_L(0) = \frac{E}{3R} + \frac{J}{3} \text{ — независимое начальное условие.}$$

2. Составим операторную схему замещения. При составлении операторной схемы замещения руководствуются следующими правилами:

- схема отражает послекоммутационное состояние цепи (коммутирующие устройства не показываются);
- индуктивность L заменяется последовательным соединением операторного сопротивления pL и источника ЭДС с величиной равной $Li_L(0)$, где $i_L(0)$ — начальное значение тока в индуктивности; направление источника ЭДС совпадает с направлением тока в индуктивности;
- источники напряжения и тока заменяются их операторными изображениями.

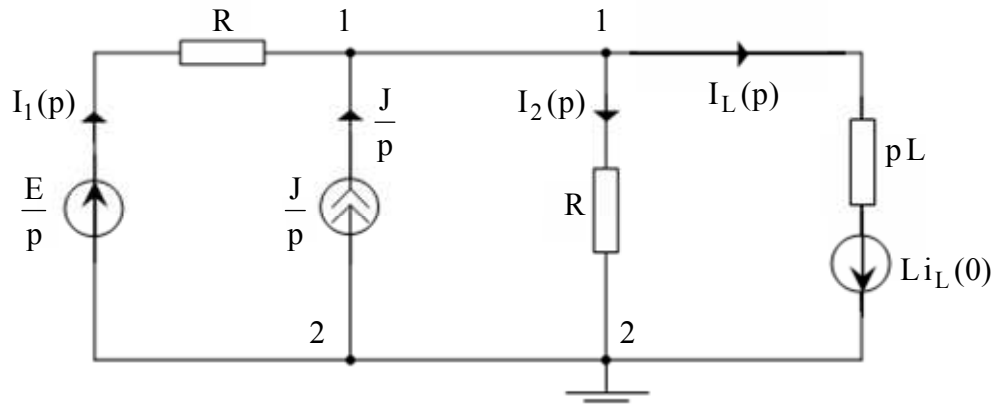


Рис. 14 Операторная схема замещения

Очевидно, что метод узловых операторных напряжений наиболее удобный для расчета операторной схемы замещения. По рис. 14 определим количество уравнений $N_{\text{МУН}}$, составляемых по методу узловых операторных напряжений: $N_{\text{МУН}} = N_{\text{уз}} - 1 = 2 - 1 = 1$. За базисный принимаем узел 2, т.е. его операторное узловое напряжение $U_2(p) = 0$. Составим уравнение для определения операторного узлового напряжения $U_1(p)$ узла 1:

$$U_1(p) \left[\frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{pL} \right] = \frac{E}{pR} + \frac{J}{p} - Li_L(0) \frac{1}{pL}, \quad U_1(p) \frac{2pL + R}{RpL} = \frac{1}{p} \left[\frac{E}{R} + J - i_L(0) \right].$$

Для удобства алгебраических преобразований введем обозначение:

$$J_0 = \frac{E}{R} + J - i_L(0). \quad \text{Поскольку } i_L(0) = \frac{E}{3R} + \frac{J}{3}, \text{ то легко видеть}$$

$$J_0 = \frac{E}{R} + J - \frac{E}{3R} - \frac{J}{3} = \frac{2E}{3R} + \frac{2}{3}J.$$

С учетом этого можно записать: $U_1(p) \frac{2pL + R}{RL} = J_0$, откуда $U_1(p) = \frac{J_0 RL}{2pL + R}$.

Определим операторное изображение тока в индуктивности:

$$I_L(p) = \frac{U_1(p) - U_2(p) + Li_L(0)}{pL} = \frac{\frac{J_0 RL}{2pL + R} + Li_L(0)}{pL} = \frac{R(J_0 + i_L(0)) + 2pLi_L(0)}{p(2pL + R)}.$$

$$\text{Т.к. } J_0 = \frac{2E}{3R} + \frac{2}{3}J, \text{ то } I_L(p) = \frac{E + JR + 2pLi_L(0)}{p(2pL + R)}.$$

3. Определим по операторному изображению тока в индуктивности $I_L(p)$ соответствующий оригинал тока в индуктивности $i_L(t)$, используя теорему разложения (Хевисайда). Для этого представим $I_L(p)$ в виде дробно-рациональной функции:

$$I_L(p) = \frac{E + JR + 2pLi_L(0)}{p(2pL + R)} = \frac{F_1(p)}{F_2(p)},$$

где $F_1(p) = E + JR + 2pLi_L(0)$, $F_2(p) = p(2pL + R)$.

Определим корни уравнения: $F_2(p) = p(2pL + R) = 0$, откуда $p_1 = 0$, $p_2 = -\frac{R}{2L}$.

Определим производную функции $F_2(p)$: $F_2'(p) = \frac{dF_2(p)}{dp} = 4pL + R$.

Согласно теореме разложения искомый оригинал $i_L(t)$ определяется выражением:

$$i_L(t) = \frac{F_1(p_1)}{F_2'(p_1)} e^{p_1 t} + \frac{F_1(p_2)}{F_2'(p_2)} e^{p_2 t} = \frac{E + JR}{R} + \frac{E + JR - i_L(0)R}{-R} e^{-\frac{R}{2L}t}.$$

Поскольку $i_L(0) = \frac{E}{3R} + \frac{J}{3}$, преобразуем последнее соотношение к виду:

$$i_L(t) = \frac{E + JR}{R} - \frac{2}{3} \frac{E + JR}{R} e^{-\frac{R}{2L}t} = \frac{E + JR}{R} \left[1 - \frac{2}{3} e^{-\frac{R}{2L}t} \right] = \left[\frac{E}{R} + J \right] \left[1 - \frac{2}{3} e^{-\frac{R}{2L}t} \right].$$

Ответ: $i_L(t) = \left[\frac{E}{R} + J \right] \left[1 - \frac{2}{3} e^{-\frac{R}{2L}t} \right]$.

Методические указания к решению задачи № 2

В задаче № 2 студент по схеме своего варианта (см. приложение № 2) должен определить:

1. Операторную передаточную функцию по напряжению
2. Комплексную передаточную функцию по напряжению
3. Амплитудно-частотную характеристику (АЧХ)
4. Фазочастотную характеристику (ФЧХ)
5. Переходную характеристику по напряжению
6. Импульсную характеристику по напряжению
7. Реакцию цепи на внешнее воздействие произвольной формы

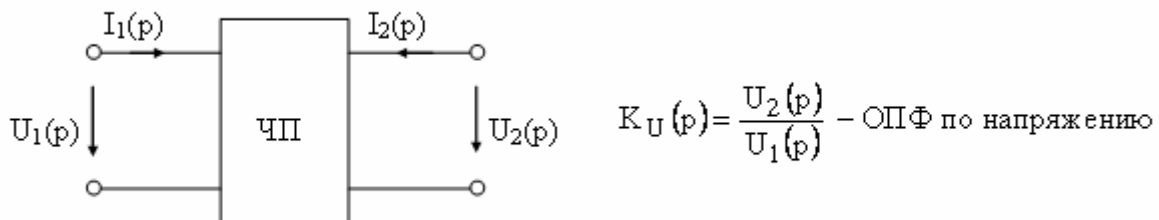
Выбор варианта к задаче № 2 осуществляется следующим образом:

m – номер схемы, n – номер рисунка, на котором изображен вид внешнего воздействия.

Например, студент, выполняющий задачу № 2 по 25 варианту, должен выбрать $m = 2$ и $n = 5$.

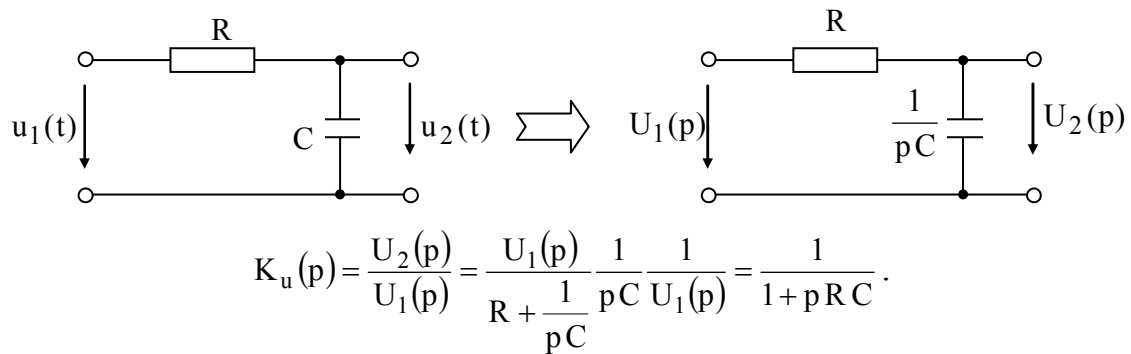
Для решения задачи № 2 ознакомимся с краткими теоретическими сведениями.

Операторная передаточная функция (ОПФ) определяется как отношение изображения выходной реакции цепи к изображению входного воздействия.



$$K_U(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} - \text{ОПФ по напряжению}$$

Например, определим ОПФ по напряжению следующей цепи:



При подстановке $p = j\omega$, можно определить комплексную передаточную функцию $H(j\omega)$, и как следствие АЧХ и ФЧХ цепи.

$$K_u(p) = \frac{1}{1 + pRC}, \text{ осуществляя подстановку } p = j\omega, \text{ получим:}$$

$$H_u(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC}.$$

$$H_u(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} - \text{АЧХ}; \quad \phi_u(\omega) = -\arctg \omega RC - \text{ФЧХ}.$$

Переходная характеристика $h(t)$ – реакция линейной электрической цепи на входное воздействие в виде функции Хевисайда.

$$h_u(t) \Leftrightarrow \frac{K_U(p)}{p} - \text{переходная характеристика по напряжению.}$$

Импульсная характеристика $g(t)$ – реакция линейной электрической цепи на входное воздействие в виде δ - функции Дирака.

$$g_u(t) = \delta(t)h_u(0) + \frac{dh_u(t)}{dt} - \text{импульсная характеристика по напряжению.}$$

$$\text{Поскольку } K_u(p) = \frac{1}{1 + pRC}, \text{ то } h_u(t) \Leftrightarrow \frac{K_u(p)}{p} = \frac{1}{p(1 + pRC)}.$$

$$\text{Определим оригинал по теореме разложения: } F(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{1}{p(1 + pRC)} -$$

изображение.

$$\text{Корни полинома знаменателя: } p_1 = 0, \quad p_2 = -\frac{1}{RC}.$$

Определим производную: $[F_2(p)]' = 2pRC + 1$, причем $[F_2(p_1)]' = 1$,

$$[F_2(p_2)]' = -1.$$

Переходная характеристика по напряжению:

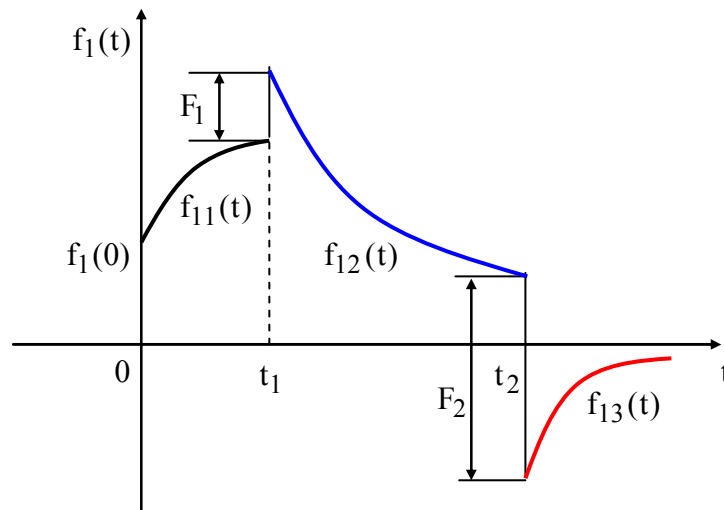
$$h_u(t) = \frac{1}{1} e^{0t} + \frac{1}{(-1)} e^{-\frac{t}{RC}} = 1 - e^{-\frac{t}{\tau_C}}, \text{ где } \tau_C = RC.$$

Импульсная характеристика по напряжению:

$$g_u(t) = h_u(0)\delta(t) + \frac{dh_u(t)}{dt} = \frac{1}{\tau_C} e^{-\frac{t}{\tau_C}}.$$

С помощью интеграла Дюамеля можно определить реакцию цепи на заданное внешнее воздействие и в том случае, когда внешнее воздействие на цепь описывается кусочно-непрерывной функцией, т.е. функцией, которая имеет конечное число конечных разрывов. В этом случае интервал интегрирования необходимо разбить на несколько промежутков в соответствии с интервалами непрерывности функции и учесть реакцию цепи на конечные скачки функции в точках разрыва.

Например, задано воздействие в виде:



Определим реакцию $f_2(t)$ при помощи интеграла Дюамеля:

$$f_2(t) = f_1(0)h(t) + \int_0^t f_1'(\tau)h(t - \tau) d\tau.$$

Выделяем следующие интервалы

1. Интервал 1: $t < 0$, $f_2(t) = 0$.

2. Интервал 2: $0 \leq t < t_1$, $f_2(t) = f_1(0)h(t) + \int_0^t f_{11}'(\tau)h(t-\tau)d\tau$.

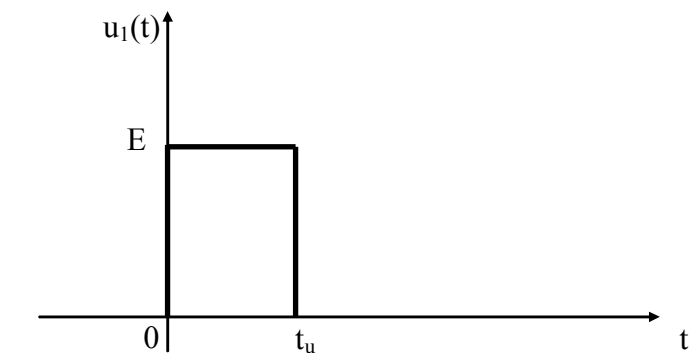
3. Интервал 3: $t_1 \leq t < t_2$,

$$f_2(t) = f_1(0)h(t) + \int_0^{t_1} f_{11}'(\tau)h(t-\tau)d\tau + F_1 h(t-t_1) + \int_{t_1}^t f_{12}'(\tau)h(t-\tau)d\tau.$$

4. Интервал 4: $t \geq t_2$,

$$f_2(t) = f_1(0)h(t) + \int_0^{t_1} f_{11}'(\tau)h(t-\tau)d\tau + F_1 h(t-t_1) + \int_{t_1}^{t_2} f_{12}'(\tau)h(t-\tau)d\tau - F_2 h(t-t_2) + \int_{t_2}^t f_{13}'(\tau)h(t-\tau)d\tau.$$

Пусть к последовательной RC-цепи приложено напряжение в виде одиночного прямоугольного импульса.



Входное воздействие в виде прямоугольного импульса

Здесь t_u – длительность прямоугольного импульса.

Определим реакцию RC-цепи с помощью интеграла Дюамеля.

В интервале времени $0 \leq t < t_u$

$$u_2(t) = u_1(0)h_u(t) + \int_0^t u_1'(\tau)h_u(t-\tau)d\tau = E h_u(t) = E \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau C}} \right), \text{ В}$$

В интервале времени $t \geq t_u$

$$u_2(t) = u_1(0)h_u(t) + \int_0^{t_u} u_1'(\tau)h_u(t-\tau)d\tau - E h_u(t-t_u) + \int_{t_u}^t u_1'(\tau)h_u(t-\tau)d\tau = E h_u(t) - E h_u(t-t_u)$$

Проведем преобразования:

$$u_2(t) = E \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau C}} \right) - E \left(1 - e^{-\frac{t-t_u}{\tau C}} \right) = -E e^{-\frac{t}{\tau C}} + E e^{-\frac{t}{\tau C}} e^{\frac{t_u}{\tau C}} = E \left(e^{\frac{t_u}{\tau C}} - 1 \right) e^{-\frac{t}{\tau C}}.$$

Окончательно ответ можно записать в следующем виде:

$$u_2(t) = \begin{cases} E \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau C}} \right), & \text{В при } 0 \leq t < t_u \\ E \left(e^{\frac{t_u}{\tau C}} - 1 \right) e^{-\frac{t}{\tau C}}, & \text{В при } t \geq t_u \end{cases}$$

Приложение № 1

Варианты (метод анализа, искомая переходная величина)				Номер схемы
00 класс, $u_C(t)$	25 класс, $i_C(t)$	50 опер., $u_C(t)$	75 опер., $i_C(t)$	1
01 класс, $u_C(t)$	26 класс, $i_C(t)$	51 опер., $u_C(t)$	76 опер., $i_C(t)$	2
02 класс, $i_L(t)$	27 класс, $u_L(t)$	52 опер., $i_L(t)$	77 опер., $u_L(t)$	3
03 класс, $i_L(t)$	28 класс, $u_L(t)$	53 опер., $i_L(t)$	78 опер., $u_L(t)$	4
04 класс, $i_L(t)$	29 класс, $u_L(t)$	54 опер., $i_L(t)$	79 опер., $u_L(t)$	5
05 класс, $i_L(t)$	30 класс, $u_L(t)$	55 опер., $i_L(t)$	80 опер., $u_L(t)$	6
06 класс, $i_L(t)$	31 класс, $u_L(t)$	56 опер., $i_L(t)$	81 опер., $u_L(t)$	7
07 класс, $i_L(t)$	32 класс, $u_L(t)$	57 опер., $i_L(t)$	82 опер., $u_L(t)$	8
08 класс, $u_C(t)$	33 класс, $i_C(t)$	58 опер., $u_C(t)$	83 опер., $i_C(t)$	9
09 класс, $u_C(t)$	34 класс, $i_C(t)$	59 опер., $u_C(t)$	84 опер., $i_C(t)$	10
10 класс, $i_L(t)$	35 класс, $u_L(t)$	60 опер., $i_L(t)$	85 опер., $u_L(t)$	11
11 класс, $i_L(t)$	36 класс, $u_L(t)$	61 опер., $i_L(t)$	86 опер., $u_L(t)$	12
12 класс, $i_L(t)$	37 класс, $u_L(t)$	62 опер., $i_L(t)$	87 опер., $u_L(t)$	13
13 класс, $u_C(t)$	38 класс, $i_C(t)$	63 опер., $u_C(t)$	88 опер., $i_C(t)$	14
14 класс, $u_C(t)$	39 класс, $i_C(t)$	64 опер., $u_C(t)$	89 опер., $i_C(t)$	15
15 класс, $u_C(t)$	40 класс, $i_C(t)$	65 опер., $u_C(t)$	90 опер., $i_C(t)$	16
16 класс, $i_L(t)$	41 класс, $u_L(t)$	66 опер., $i_L(t)$	91 опер., $u_L(t)$	17
17 класс, $i_L(t)$	42 класс, $u_L(t)$	67 опер., $i_L(t)$	92 опер., $u_L(t)$	18
18 класс, $i_L(t)$	43 класс, $u_L(t)$	68 опер., $i_L(t)$	93 опер., $u_L(t)$	19
19 класс, $i_L(t)$	44 класс, $u_L(t)$	69 опер., $i_L(t)$	94 опер., $u_L(t)$	20
20 класс, $u_C(t)$	45 класс, $i_C(t)$	70 опер., $u_C(t)$	95 опер., $i_C(t)$	21
21 класс, $u_C(t)$	46 класс, $i_C(t)$	71 опер., $u_C(t)$	96 опер., $i_C(t)$	22
22 класс, $u_C(t)$	47 класс, $i_C(t)$	72 опер., $u_C(t)$	97 опер., $i_C(t)$	23
23 класс, $u_C(t)$	48 класс, $i_C(t)$	73 опер., $u_C(t)$	98 опер., $i_C(t)$	24
24 класс, $u_C(t)$	49 класс, $i_C(t)$	74 опер., $u_C(t)$	99 опер., $i_C(t)$	25

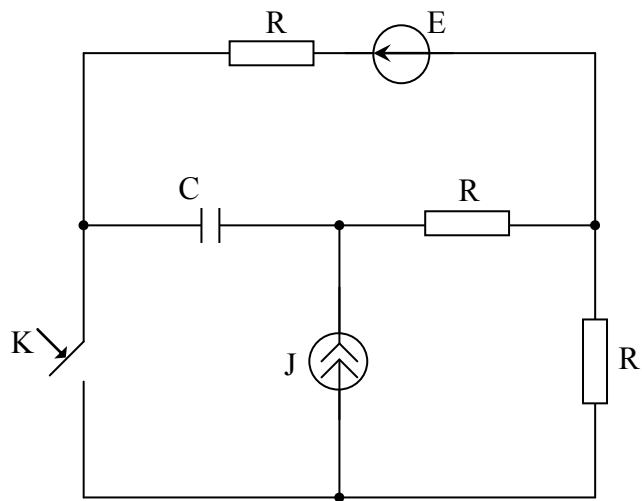


Схема № 1

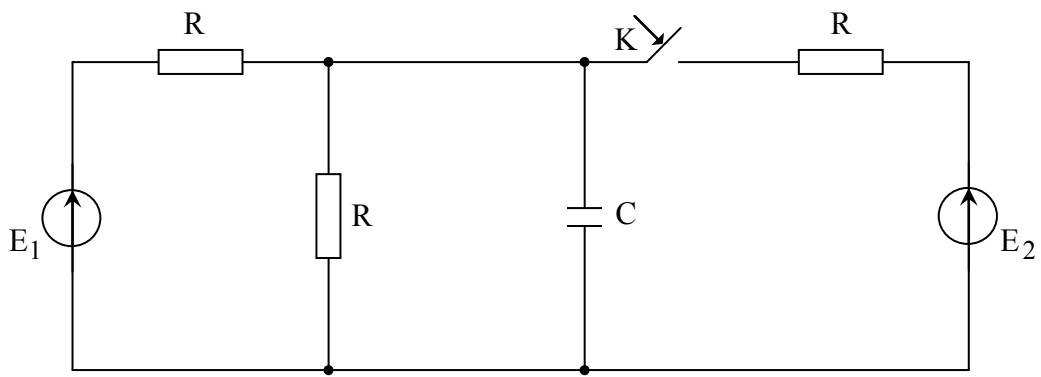


Схема № 2

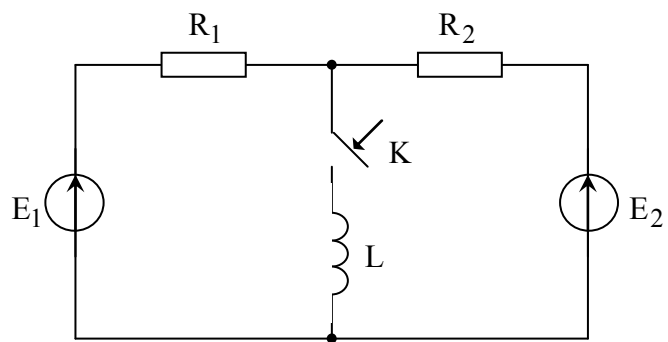


Схема № 3

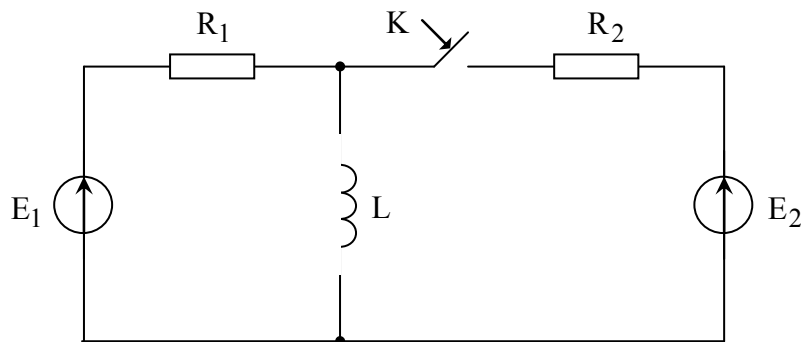


Схема № 4

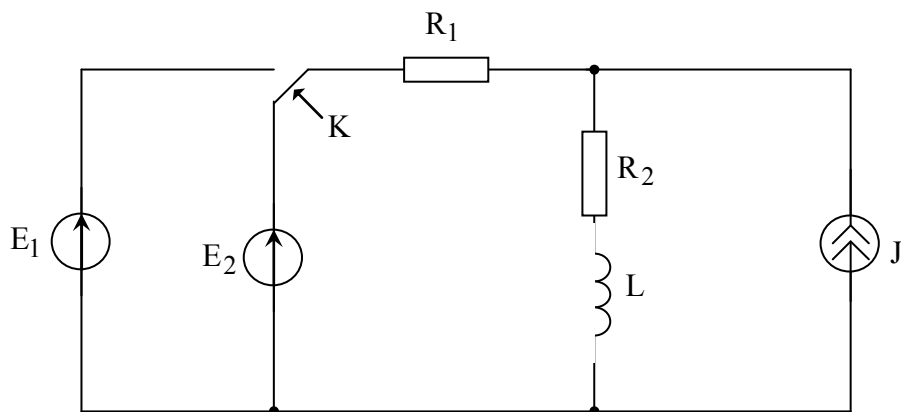


Схема № 5

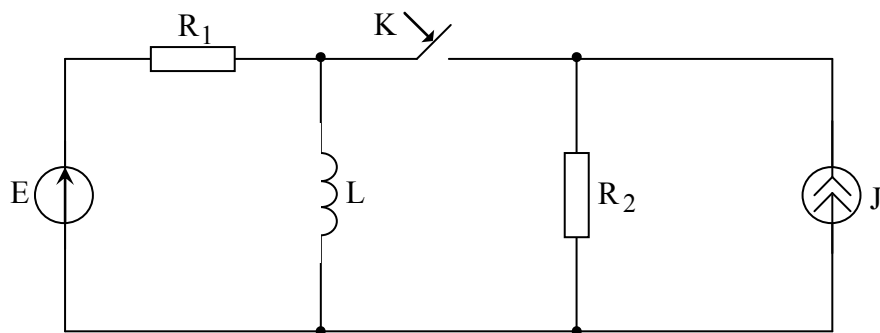


Схема № 6

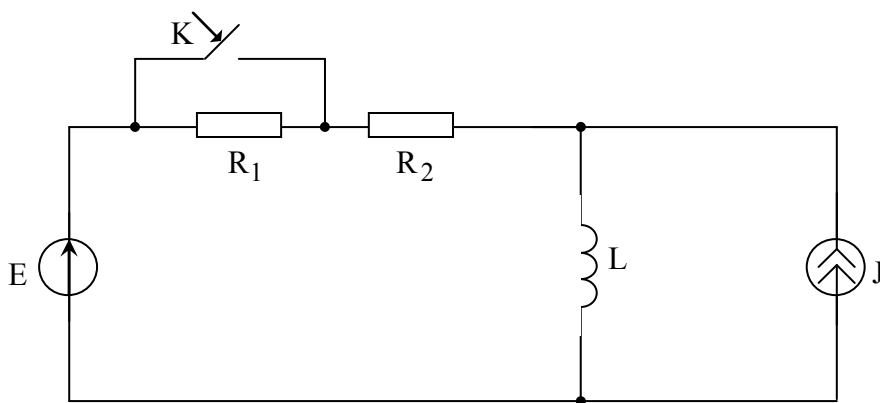


Схема № 7

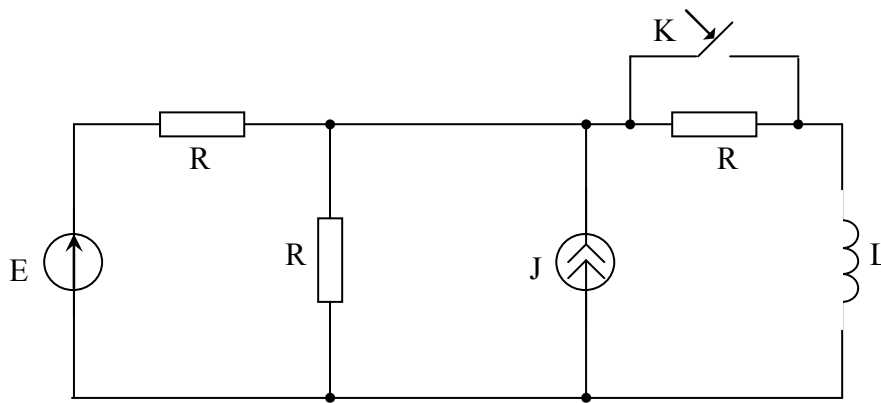


Схема № 8

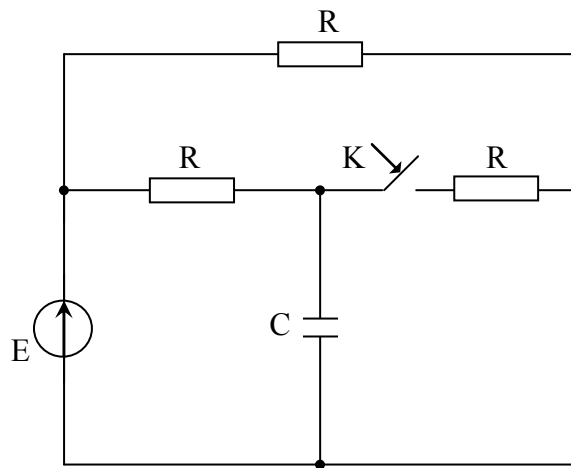


Схема № 9

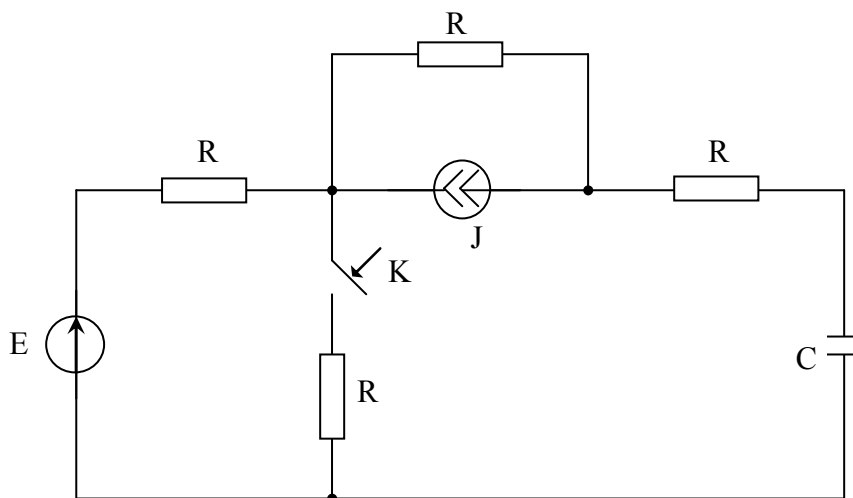


Схема № 10

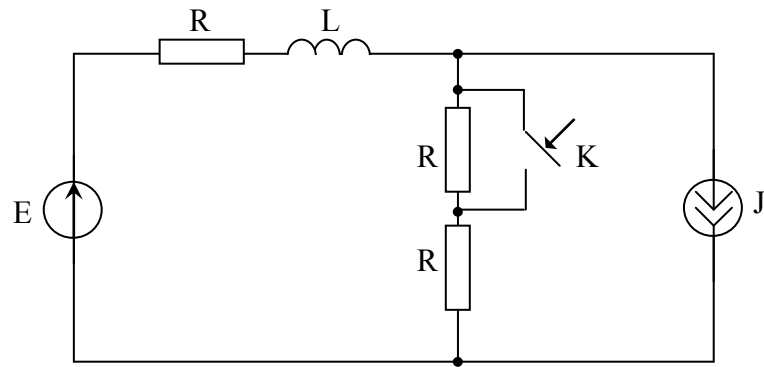


Схема № 11

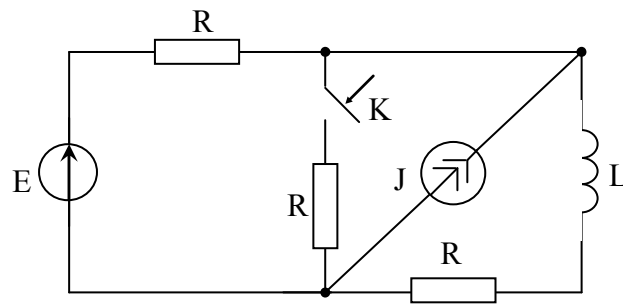


Схема № 12

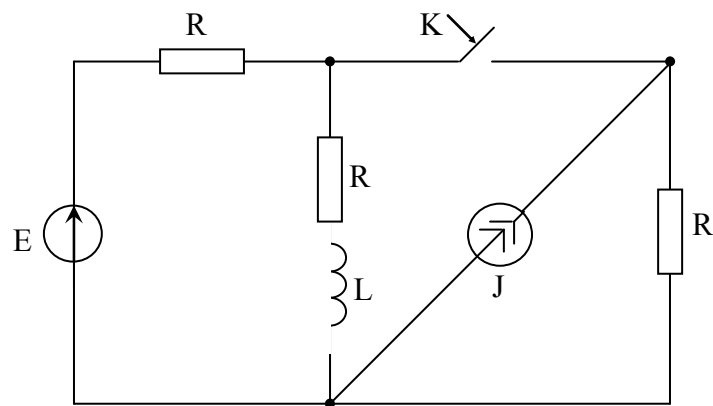


Схема № 13

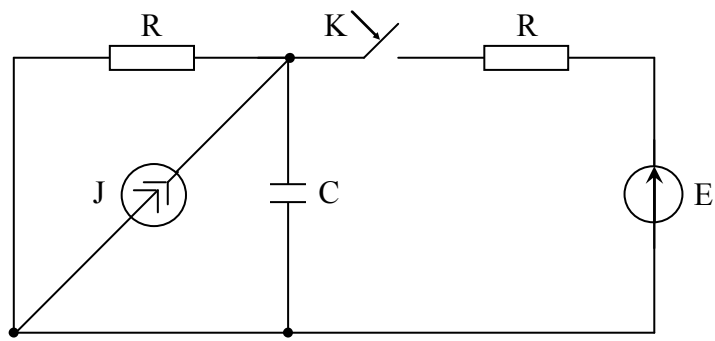


Схема № 14

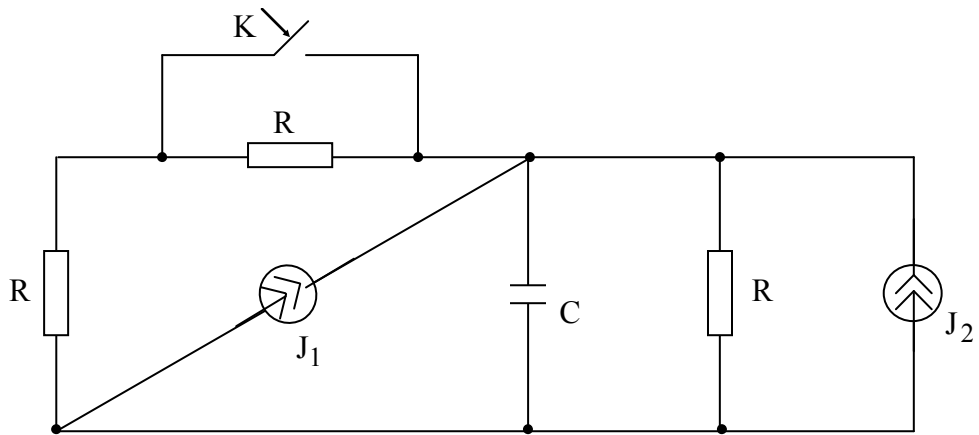


Схема № 15

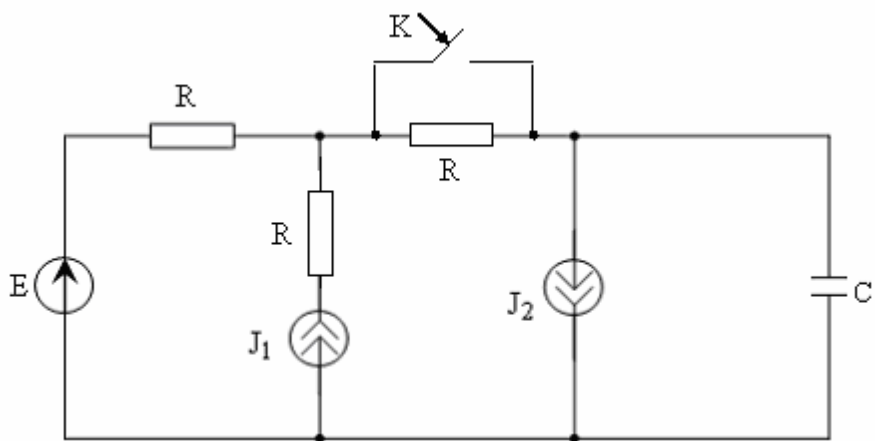


Схема № 16

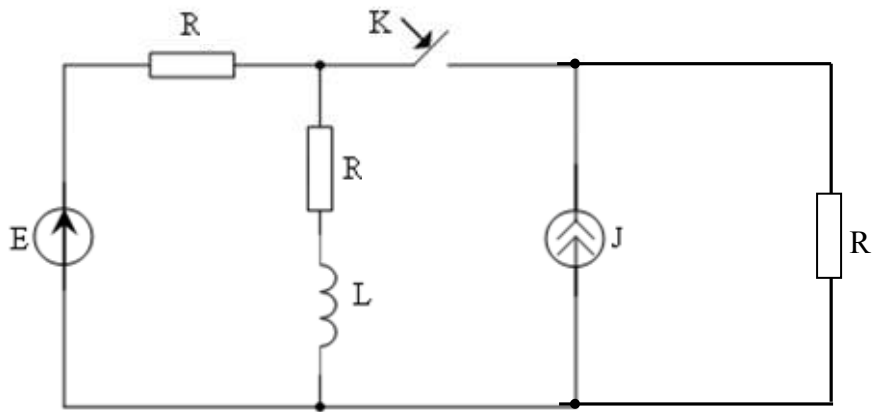


Схема № 17

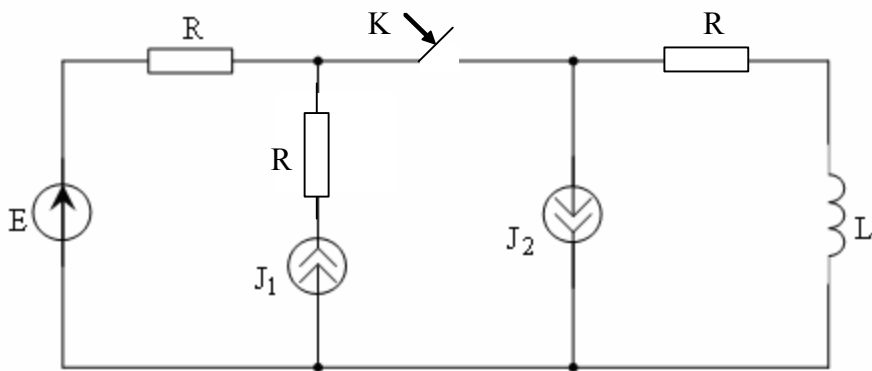


Схема № 18

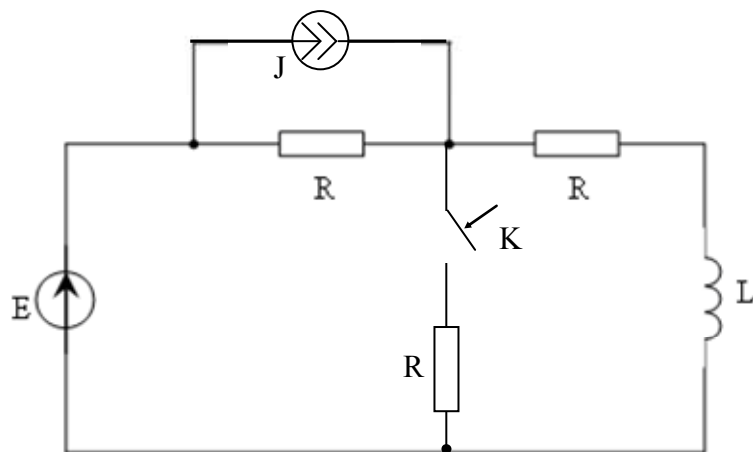


Схема № 19

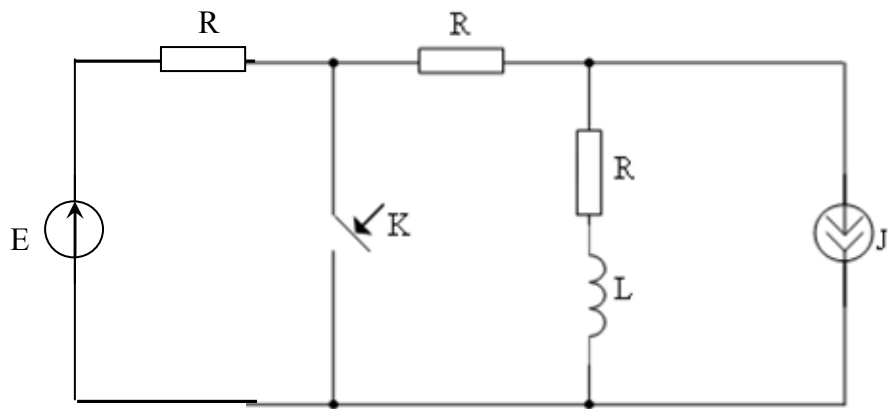


Схема № 20

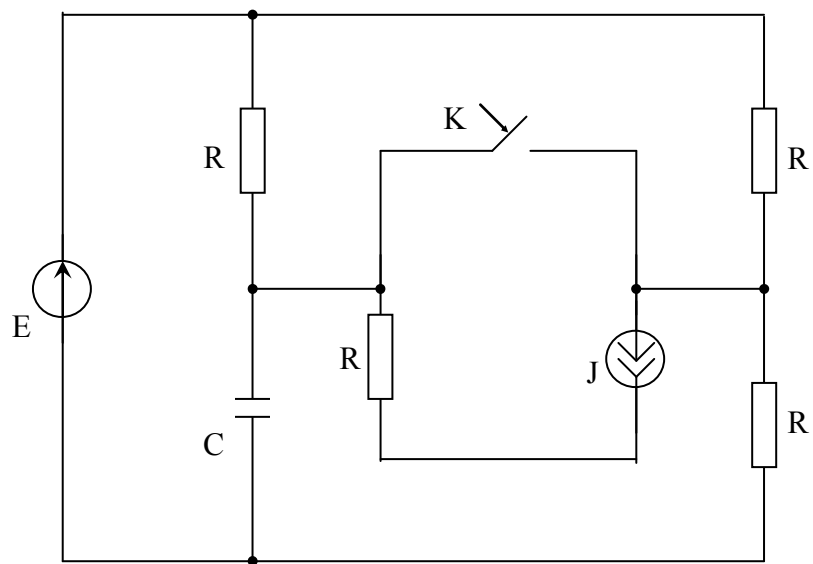


Схема № 21

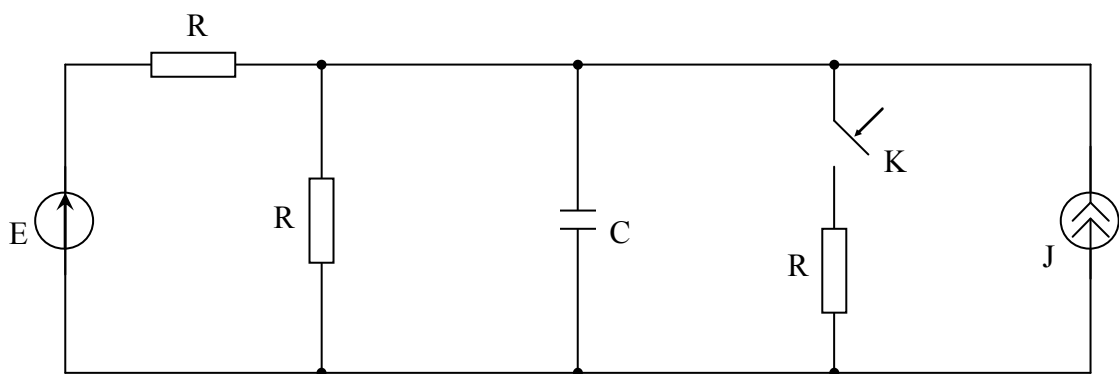


Схема № 22

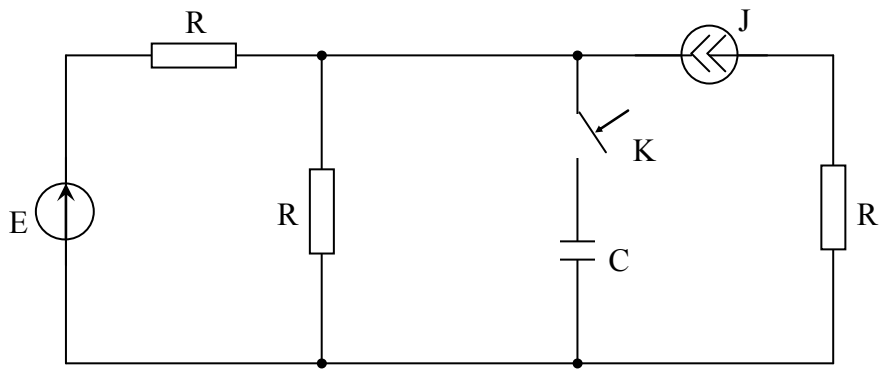


Схема № 23

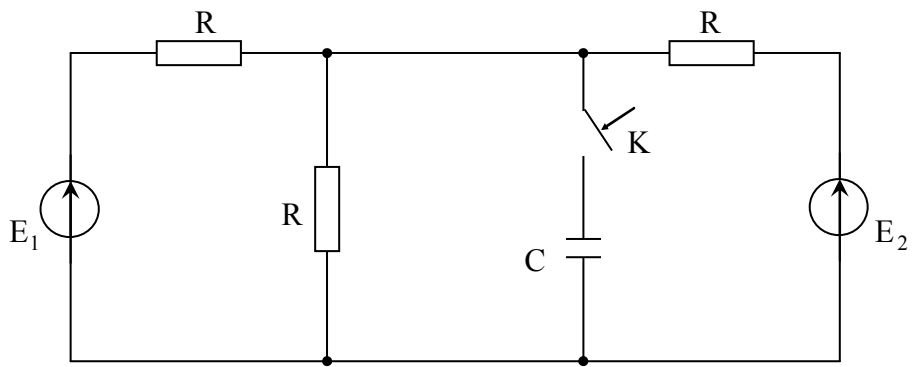


Схема № 24

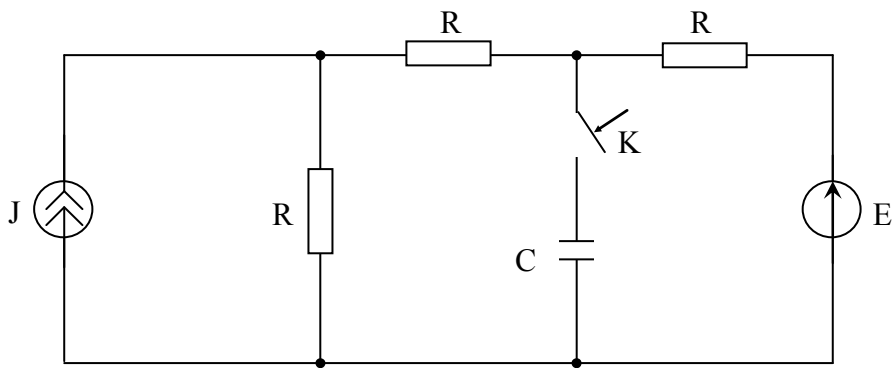
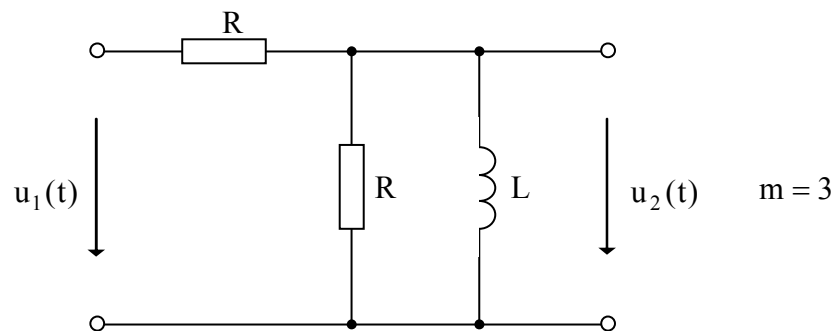
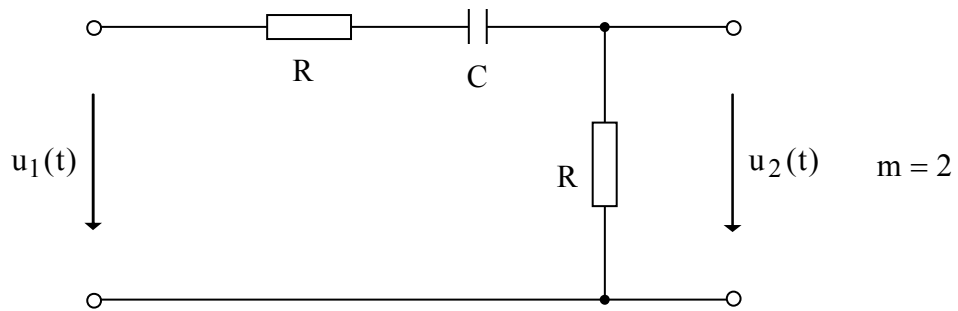
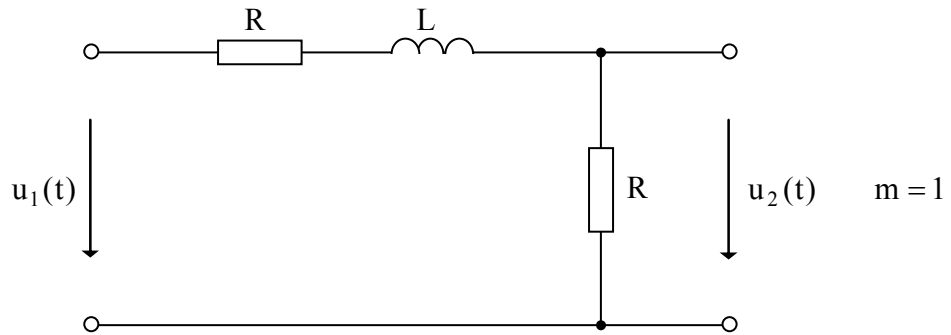
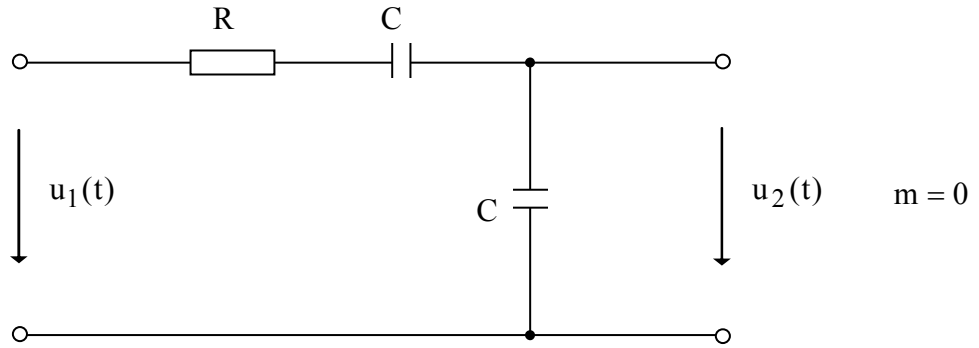
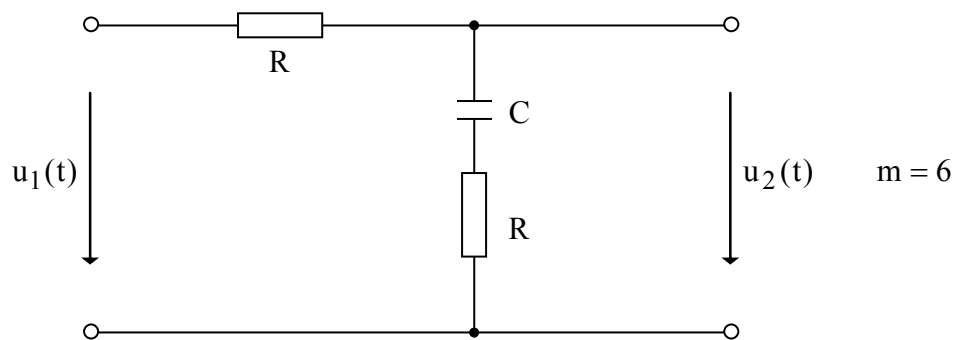
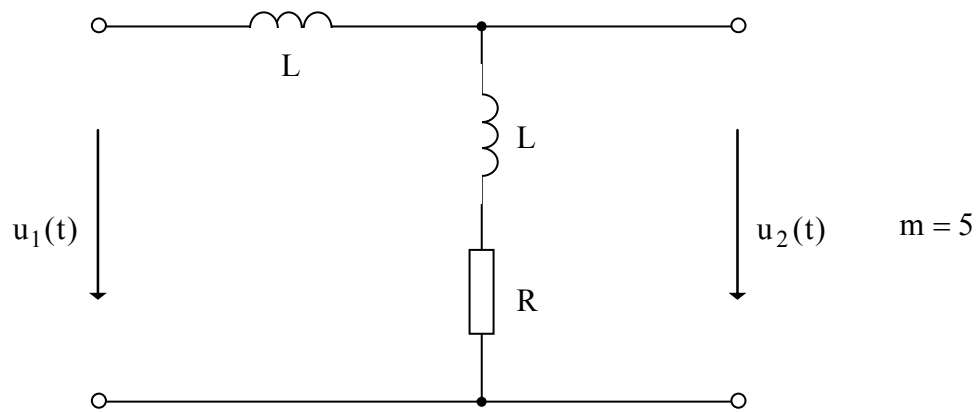
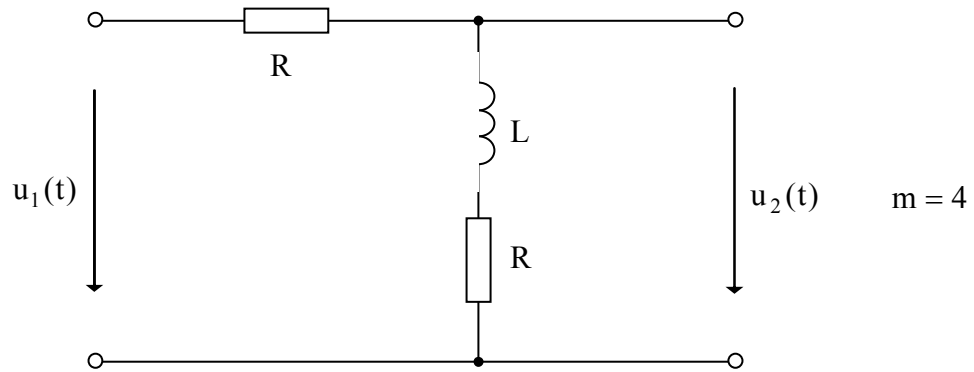
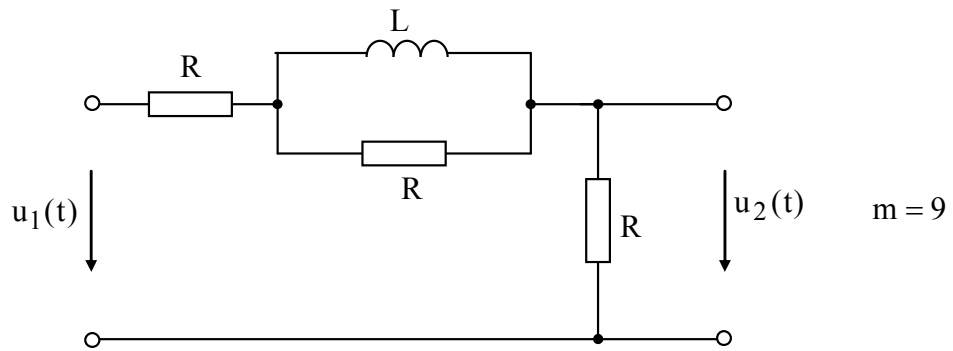
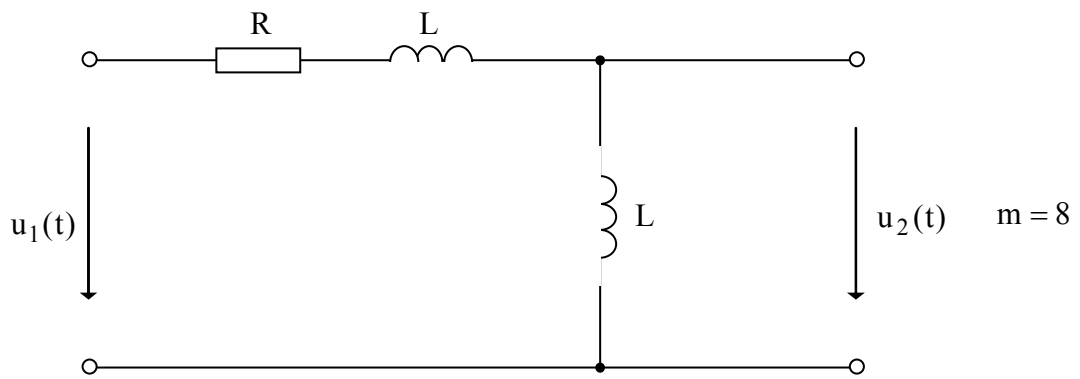
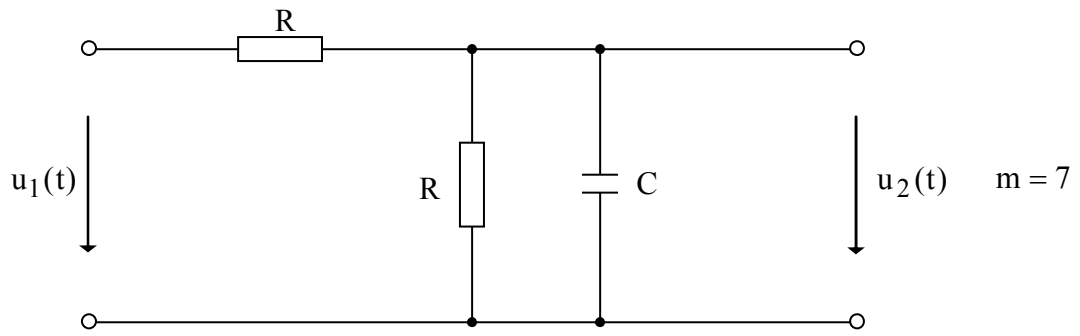
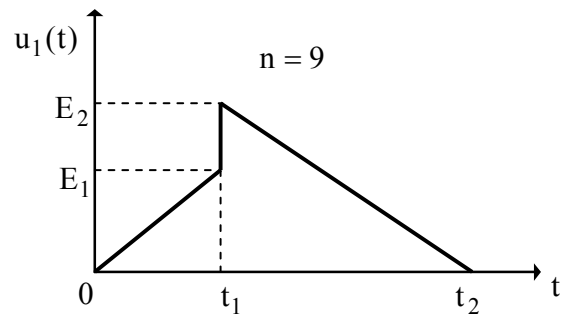
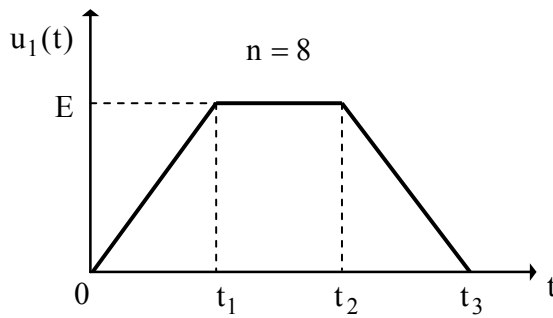
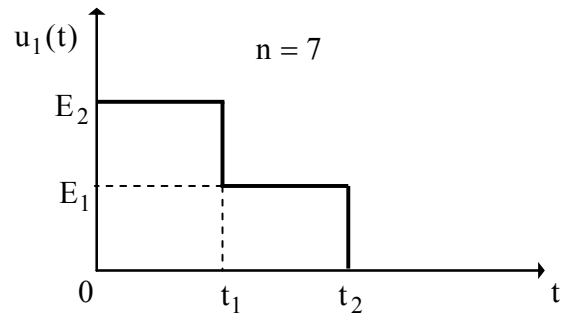
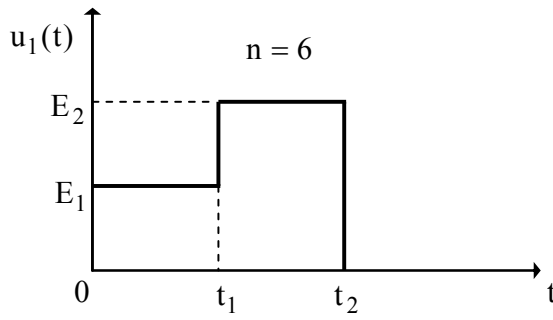
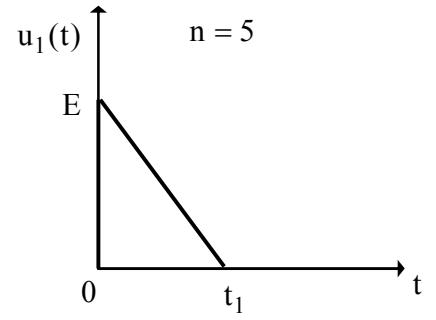
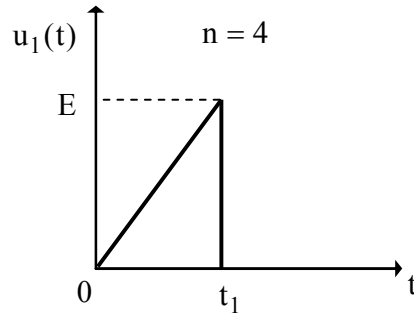
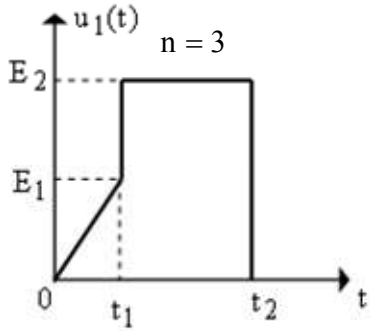
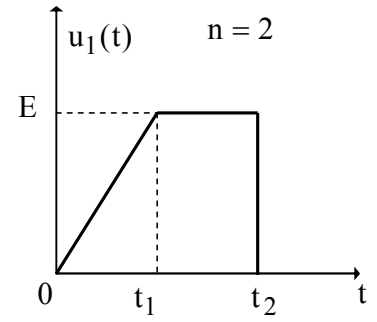
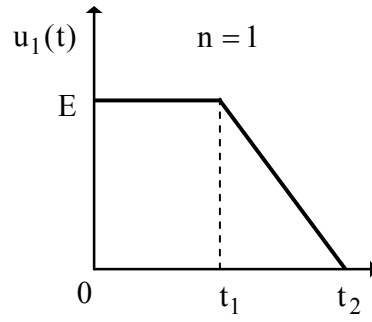
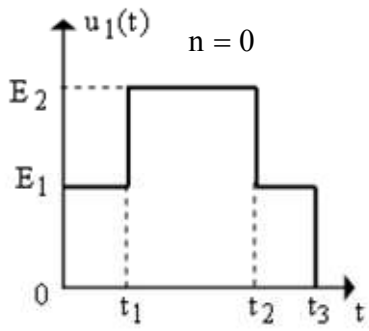


Схема № 25









Литература

1. Бакалов, В. П. Основы теории цепей [Текст] / В. П.Бакалов, В.Ф Дмитриков, Б. И. Крук– М.: Радио и связь, 2000, - с. 592.
2. Бакалов, В. П. Теория электрических цепей [Текст] / В. П.Бакалов, Б. И. Крук, О. Б. Журавлева – Новосибирск: Сиб ГАТИ, 1998,- с. 197.
3. Белецкий, А. Ф. Теория линейных электрических цепей[Текст] / А. Ф. Белецкий,– М.: Радио и связь, 1986, - с. 544.
4. Атабеков, Г. И. Теоретически основы электротехники. Часть I: Линейные электрические цепи [Текст]/Г. И. Атабеков – М.: Энергия, 1978, - с. 592.
5. Атабеков, Г. И. Задачник по теории линейных электрических цепей [Текст] Г. И. Атабеков – М.: Высшая школа, 1982, с. 488.
6. Попов, В. П. Основы теории цепей[Текст] /В. П.Попов – М.: Высшая школа, 2000, - с. 575.