Федеральное агентство связи

Федеральное государственное образовательное бюджетное учреждение высшего профессионального образования

ПОВОЛЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИЙ И ИНФОРМАТИКИ

# ЭЛЕКТРОННАЯ БИБЛИОТЕЧНАЯ СИСТЕМА



Самара

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО СВЯЗИ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

ПОВОЛЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ТЕЛЕКОММУНИКАЦИЙ И ИНФОРМАТИКИ

Кафедра «Программное обеспечение и управление
в технических системах»

# УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
## по дисциплине
# «МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ В ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМАХ»
## к практическим занятиям по теме
## «Решение двойственной задачи линейного программирования»

**для студентов очной и заочной формы обучения по специальностям 230105 – программное обеспечение вычислительной техники и автоматизированных систем, 230201 – информационные системы и технологии и направлениям подготовки бакалавриата 230100 – информатика и вычислительная техника, 230400 – информационные системы и технологии**

**Составитель:**
**К.ф.-м.н., доцент Вержаковская М.А.**

**САМАРА**
**ИУНЛ ПГУТИ**
**2011**

Вержаковская М.А. Учебно-методические указания по дисциплине «Методы оптимизации в информационных системах» к практическим занятиям по теме «Решение двойственной задачи линейного программирования» – Самара: ПГУТИ, 2011. – 34 с., ил.

Учебно-методические указания предназначены для студентов очной и заочной форм обучения по специальностям 230105 – программное обеспечение вычислительной техники и автоматизированных систем, 230201 – информационные системы и технологии, а также по направлениям подготовки бакалавриата 230100 – информатика и вычислительная техника, 230400 – информационные системы и технологии. Данные указания служат руководством для подготовки к практическим занятиям по дисциплине «Методы оптимизации в информационных системах» на тему «Решение двойственной задачи линейного программирования».

Учебно-методические указания подготовлены на кафедре «Программное обеспечение и управление в технических системах».

Методические указания рекомендованы к изданию методическим Советом ПГУТИ

Рецензент – заведующий кафедрой программного обеспечения и управления в технических системах ГОУВПО ПГУТИ, д.т.н., профессор Тарасов В.Н.

## СОДЕРЖАНИЕ

# ВВЕДЕНИЕ

Данный курс предназначен для студентов специальностей по направлениям «Программное обеспечение вычислительной техники и автоматизированных систем», «Информационные системы и технологии», изучающих дисциплину «Методы оптимизации в информационных системах».

Целью преподавания дисциплины «Методы оптимизации в информационных системах» является изучение теоретических основ моделирования и решения задач математического программирования. Цель преподавания дисциплины также состоит в усвоении роли методов оптимизации в повышении эффективности устройств автоматики и систем управления, формирования знаний и умений по постановке и решению оптимизационных задач.

Задачи дисциплины:

- обучить студентов основным методам решения оптимизационных задач;
- привить студентам устойчивые навыки математического моделирования с использованием ЭВМ;
- дать опыт проведения вычислительных экспериментов.

# 1 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

## 1.1 Пример прямой и двойственной задачи линейного программирования

Обратимся к задаче рационального использования ресурсов. Пусть для осуществления $l$ технологических процессов $T_1,\ldots,T_l$ предприятию требуется m ресурсов $S_1,\ldots, S_m$. Запасы ресурсов каждого вида ограничены и равны $b_1,\ldots,b_m$.

Известен расход ресурсов $\{a_{ij}\}$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,l}$ на единицу продукции по каждому технологическому процессу и стоимость единицы продукции каждого типа $c_j$, $j=\overline{1,l}$. Тогда, как нам известно, задача определения такого плана выпуска продукции $x_j$, при котором доход от ее реализации будет максимальным, является задачей линейного программирования:

$$\sum_{j=1}^{l} c_j x_j \to \max; \qquad (1.1)$$

$$\sum_{j=1}^{l} a_{ij} x_j \le b_i, i=\overline{1,m}; \qquad (1.2)$$

$$x_j \ge 0, \ j=\overline{1,l}$$

и ее решение может быть найдено симплекс-методом.

Зададимся вопросом, какова с точки зрения предприятия ценность имеющихся в его распоряжении ресурсов. При решении этого вопроса будем иметь в виду, что ресурсы, которые предприятие не может полностью использовать, имеют для него очень низкую ценность, в том смысле, что предприятие не будет нести даже небольшие расходы на увеличение запасов этих ресурсов. Заметим при этом, что рыночная цена этих ресурсов может быть большой (скажем дорогостоящее неиспользуемое или используемое не на полную мощность оборудование).

Наибольшую ценность будут иметь те ресурсы, которые в наибольшей степени ограничивают выпуск продукции, а следовательно и доход предприятия. Итак, можно считать, что каждый вид ресурса обладает некоторой, говорят, «теневой ценой», определяющей ценность данного ресурса для предприятия с точки зрения дохода от реализации выпускаемой продукции и зависящей от наличного запаса этого ресурса и потребности в нем для выпуска продукции.

Ясно, что варьируя план выпуска продукции, мы тем самым варьируем теневые цены используемых ресурсов, а потому ставится задача нахождения оптимальных теневых цен, которые соответствуют максимальному доходу предприятия, то есть оптимальному распределению ресурсов. Оптимальные теневые цены называют объективно обусловленными или оптимальными оценками. Построим математическую модель для определения оптимальных теневых цен.

Обозначим через $y_i$ теневую цену ресурса $S_i$ . Величины $y_i$ должны быть такими, чтобы теневая цена ресурсов, используемых в любом технологическом процессе, на производство единицы продукции не была меньше получаемого дохода от единицы продукции.

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_j \geq c_j, \; j = \overline{1, l}. \qquad (1.3)$$

Оптимальными теневыми ценами естественно считать такие, которые минимизируют общую теневую стоимость ресурсов, то есть величину

$$g^* = \sum_{i=1}^{m} \; b_i y_i \rightarrow \min. \qquad (1.4)$$

Задача нахождения минимума целевой функции (1.4) при условиях (1.3) представляет собой задачу линейного программирования и называется двойственной по отношению к задаче (1.1)–(1.2).

## 1.2 Общая формулировка прямой и двойственной задачи

Дадим достаточно общее определение двойственной задачи по отношению к прямой, заданной в виде:

$$f(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n \rightarrow \max \qquad (1.5)$$

при условиях

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + ... + a_{1n} x_n < R_1 > b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + ... + a_{2n} x_n < R_2 > b_2 \\ ... \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + ... + a_{mn} x_n < R_m > b_m \end{cases} \qquad (1.6)$$

Здесь:

$f(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n$ – целевая функция;

$R_i, \; i = \overline{1, m}$ – операции отношения =, ≥, ≤;

$c_i, \; i = \overline{1, n}; \; a_{ij}, i = \overline{1, m}, \; j = \overline{1, n}; \; b_i, \; i = \overline{1, m}$ – заданные константы.

Очевидно, что любую задачу линейного программирования можно представить в одной из двух указанных форм. Тогда двойственной по отношению к задаче (1.5)−(1.6) будем называть задачу:

$$f^*(y) = b_1 y_1 + b_2 y_2 + ... + b_n y_n \rightarrow \min \qquad (1.7)$$

при условиях

$$\begin{cases} a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + ... + a_{1n} y_n \geq c_1 \\ a_{21} y_1 + a_{22} y_2 + ... + a_{2n} y_n \geq c_2 \\ ... \\ a_{m1} y_1 + a_{m2} y_2 + ... + a_{mn} y_n \geq c_n \end{cases} \qquad (1.8)$$

и, если в прямой задаче $R_i \equiv (\leq)$, $i = \overline{1, n}$, то

$$y_1 \geq 0, \; y_2 \geq 0, \ldots, \; y_n \geq 0. \qquad (1.9)$$

Сформулируем правила построения двойственной задачи:

а) целевая функция исходной задачи (1.5)−(1.6) задается на максимум, а целевая функция двойственной задачи (1.7)−(1.9) – на минимум;

б) матрица системы сильных ограничений двойственной задачи получится из матрицы системы ограничений прямой задачи транспонированием;

в) число переменных двойственной задачи равно числу сильных ограничений прямой, а число ограничений в двойственной задаче равно числу переменных прямой;

г) коэффициентами при неизвестных в целевой функции двойственной задачи являются свободные члены системы сильных ограничений прямой задачи, а правыми частями системы сильных ограничений двойственной задачи – коэффициенты при неизвестных в целевой функции исходной задачи. Отметим, что если все $R_i \equiv (\le)$ и, следовательно, в двойственной задаче выполнены условия (1.9) – переменные неотрицательны, то пара задач (1.5)–(1.6) и (1.7)–(1.9) называется симметричной.

## 1.3 Свойства двойственной задачи

Приведем теоремы, устанавливающие зависимости между решениями прямой и двойственной задач.

**ТЕОРЕМА 1.** Значение целевой функции задачи (1.5)–(1.6) при любом допустимом плане $\boldsymbol{x}$ не превышает значения целевой функции задачи (1.7)–(1.9) при любом ее допустимом плане $\mathbf{y}$: $f(\boldsymbol{x}) \le f^*(\mathbf{y})$.

Если для каких-нибудь $\boldsymbol{x}$ и $\mathbf{y}$ значения целевых функций совпадают, т.е. $f(\boldsymbol{x}) = f^*(\mathbf{y})$, то $\boldsymbol{x}$ – оптимальное решение (1.5)–(1.6), $\mathbf{y}$ – оптимальное решение (1.7)–(1.9).

*Доказательство*. Пусть $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ – допустимое решение задачи (1.5)–(1.6), $\mathbf{y}=(y_1,y_2,\ldots,y_m)$ – допустимое решение задачи (1.7)–(1.9). Подставим решение $\boldsymbol{x}$ в ограничения (1.6), умножим первое равенство на $y_1$, второе на $y_2$,…, $m$–е на $y_m$ и сложим полученные равенства:

$$(a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n)y_1+(a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n)y_2+\ldots$$
$$+(a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mm}x_n)y_m=b_1y_1+b_2y_2+\ldots+b_my_m.$$

Перегруппируем слагаемые в левой части:

$$(a_{11}y_1+a_{21}y_2+\ldots+a_{m1}y_m)x_1+(a_{12}y_1+a_{22}y_2+\ldots+a_{m2}y_m)x_2+\ldots$$
$$+(a_{1n}y_1+a_{2n}y_2+\ldots+a_{mn}y_m)x_n=b_1y_1+b_2y_2+\ldots+b_my_m. \quad (1.10)$$

Так как y – допустимое решение задачи (1.7)–(1.9), то для любого j (j=1,2,…,n) , имеем:

$$a_{1j}y_1+a_{2j}y_2+\ldots+a_{mj}y_n \ge c_j.$$

Заменяя в (1.10) суммы, заключенные в скобки, соответствующими $c_j$ и учитывая, что $x_j \ge 0$ , получаем:

$$c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n\le b_1y_1+b_2y_2+\ldots+b_my_m,$$

или, что тоже самое $f(\boldsymbol{x})\le f^*(\mathbf{y})$. Первая часть теоремы доказана.

Пусть для каких-нибудь $\boldsymbol{x},\mathbf{y}$ имеем: $(\boldsymbol{c},\boldsymbol{x}')>(\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}},\mathbf{y})$. Допустим от противного, что $\boldsymbol{x}$ не является оптимальным решением задачи (1.5)–(1.6). Это значит, что есть такое другое допустимое решение $\boldsymbol{x}'$ задачи (1.5)–(1.6), что

$(\boldsymbol{c},\boldsymbol{x}')>(\boldsymbol{c},\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}},\mathbf{y})$,

а это противоречит первой части данной теоремы. Следовательно, при нашем условии $\boldsymbol{x}$ – оптимальное решение задачи (1.5)–(1.6). Аналогично показывается, что $\mathbf{y}$ – оптимальное решение задачи (1.7)–(1.9).Теорема доказана.

**ТЕОРЕМА 2.** Если одна из пар двойственных задач (1.5)–(1.6) или (1.7)–(1.9) имеет оптимальное решение, то и другая также имеет оптимальное решение, причем их оптимумы совпадают (max $f$ = min $f^*$).

*Если целевая функция одной из пары двойственных задач не ограничена (для прямой – сверху, а для двойственной − снизу), то допустимая область другой задачи пуста.*

*Доказательство*. Ввиду взаимной двойственности задач (1.5)–(1.6) и (1.7)–(1.9) достаточно провести доказательство, принимая за исходную одну из задач. Пусть, например, задача (1.5)–(1.6) имеет оптимальные решения, и $\boldsymbol{x}^{(0)}=(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\ldots,x_n^{(0)})$ – одно из них, найденное симплекс-методом, и $\boldsymbol{A}_{i_1},\boldsymbol{A}_{i_2},\ldots,\boldsymbol{A}_{i_m}$ – его базис. Тогда на последней итерации имеем $\alpha_j=z_j-c_j\ge 0$ (j=1,2,…,n) так что $z_j\ge c_j$, j=1,2,…,n, или, в векторной форме

$$(z_1,z_2,\ldots,z_n)\ge(c_1,c_2,\ldots,c_n). \qquad (1.11)$$

При рассмотрении симплекс-метода мы выяснили, что вектор $(z_1,z_2,\ldots,z_n)$ может быть найден по формуле

$$(z_1,z_2,\ldots,z_n)=(c_{i_1},c_{i_2},\ldots,c_{i_m})\,\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{c}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A},$$

где $\boldsymbol{B}^{-1}$– матрица, обратная к базисной матрице $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}_{i_1},\boldsymbol{A}_{i_2},\ldots,\boldsymbol{A}_{i_m})$, $\boldsymbol{A}$ –матрица системы ограничений-уравнений задачи (1.42): $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\ldots,\boldsymbol{A}_n)$.Следовательно, из (1.11) имеем:

$$(c_{i_1},c_{i_2},\ldots,c_{i_m})\,\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}\ \ge(c_1,c_2,\ldots,c_n)=\boldsymbol{c} \qquad (1.12)$$

Введем обозначение:

$$(c_{i_1},c_{i_2},\ldots,c_{i_m})\boldsymbol{B}^{-1}=\mathbf{y}=(y_1,y_2,\ldots,y_m).$$

Тогда неравенство (1.12) принимает вид

$$\mathbf{y}\boldsymbol{A}\ge\boldsymbol{c}.$$

Оно означает, что вектор $\mathbf{y}=\boldsymbol{c}_B\boldsymbol{B}^{-1}$ является допустимым решением задачи (1.7)–(1.9).

Докажем, что $\mathbf{y}$ – оптимальное решение задачи (1.7)–(1.9). Имеем:

$$(\mathbf{y},\boldsymbol{b})=((c_{i_1},c_{i_2},\ldots,c_{i_m}),\ \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b})=((c_{i_1},c_{i_2},\ldots,c_{i_m}),(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\ldots,x_m^{(0)}))=$$
$$=c_{i_1}x_{i_1}^{(0)}+c_{i_2}x_{i_2}^{(0)}+\ldots+c_{i_m}x_{i_m}^{(0)})=(\boldsymbol{c},\boldsymbol{x}^{(0)}).$$

Таким образом, значение целевой функции задачи (1.7)–(1.9) при её допустимом решении **y** совпадает с значением целевой функции задачи (1.5)–(1.6) при её допустимом решении $\boldsymbol{x}^{(0)}$. Согласно теореме 1 это означает, что **y** оптимальное решение задачи (1.7)–(1.9). Первая часть теоремы доказана.

Докажем вторую её часть. Пусть известно, что целевая функция, например, задачи (1.5)–(1.6) не ограничена сверху на допустимом множестве. Допустим, от противного, что задача (1.7)–(1.9) имеет при этом допустимое решение, и пусть **y** – одно из них. Ввиду неограниченности целевой функции задачи (1.5)–(1.6) найдётся такое допустимое её решение $\boldsymbol{x}$, для которого значение целевой функции будет больше числа $(\boldsymbol{b},\mathbf{y})$:

$$(\boldsymbol{c},\boldsymbol{x})>(\boldsymbol{b},\mathbf{y}),$$

что противоречит теореме 1. Теорема доказана.

При доказательстве первой части теоремы мы установили следующее: если $\boldsymbol{B}$ – базисная матрица оптимального опорного решения канонической задачи (1.5)–(1.6), то

$$\mathbf{y}=\boldsymbol{c}_B\boldsymbol{B}^{-1}$$

– оптимальное решение двойственной к (1.5)–(1.6) задачи (1.7)–(1.9). Этим фактом мы будем пользоваться в дальнейшем.

## 1.4 Пример построения двойственной задачи

Рассмотрим, в качестве примера, следующую задачу и двойственную к ней.

Прямая задача:

$$f(x)=5x_1+10x_2\to\max$$

$$\begin{cases}4x_1+3x_2\le 96\\5x_1+8x_2\le 144\\x_1+4x_2\le 48\end{cases}$$

$$x_1\ge 0, x_2\ge 0$$

Двойственная задача:

$$f(x)=96y_1+144y_2+48y_3\to\min$$

$$\begin{cases}4y_1+5y_2+y_3\ge 5\\3y_1+8y_2+4y_3\ge 10\end{cases}$$

$$y_1\ge 0, y_2\ge 0$$

Оптимальное решение прямой задачи, приведенное в последней симплекс таблице: $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}=(16,8,8,0,0)$ получено в базисе $\boldsymbol{A}_3$, $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$. Найдем матрицы $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{B}^{-1}$

$$B=\begin{pmatrix}1 & 4 & 3\\ 0 & 5 & 8\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix},\ B^{-1}=(1/12)\begin{pmatrix}12 & -13 & 17\\ 0 & 4 & -8\\ 0 & -1 & 5\end{pmatrix}$$

$\mathbf{y}^* = \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}\ \boldsymbol{B}^{-1} = (0,\ 5/6,\ 5/6)$;

$\max f = f(\boldsymbol{x}^*) = 160 = \min f^{\ *}(\mathbf{y}^*)$.

В том случае, когда среди векторов $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, …, $\boldsymbol{A}_{\mathrm{n}}$ прямой задачи(1.5)–(1.6) имеется m – единичных

$(\boldsymbol{A}_{\mathrm{j1}}, \boldsymbol{A}_{\mathrm{j2}}, \ldots, \boldsymbol{A}_{\mathrm{jm}})$, решение двойственной задачи может быть найдено проще, а именно, компоненты вектора

$y_k=\alpha_{jk}+c_{jk}$, $k = \overline{1,m}$;

$\mathbf{y}^*=(y_1,\ldots,y_m)^{\mathrm{T}}$,

где $\alpha_{jk}$ – элементы строки оценок в последней симплекс-таблице решения прямой задачи, а $c_{jk}$ – соответствующие коэффициенты целевой функции прямой задачи.

Рассмотрев предыдущий пример, можем убедиться, что поскольку в исходной задаче векторы $\boldsymbol{A}_3$, $\boldsymbol{A}_4$, $\boldsymbol{A}_5$ – единичные, то:

$$y_1=\alpha_3+c_3=0+0=0$$

$$y_2=\alpha_4+c_4=5/6+0=5/6$$

$$y_3=\alpha_5+c_5=5/6+0=5/6$$

$\mathbf{y}^*= (0;\ 5/6;\ 5/6)$.

# 2 ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

## 2.1 Задание на практическое занятие

### Тема практического занятия «Решение двойственной задачи линейного программирования»

Текст задания:

1. Построить двойственную задачу к прямой задаче линейного программирования.
2. Найти максимальное значение прямой задачи и минимальное значение двойственной задачи, доказать равенство этих значений.
3. Провести характеристику полученных результатов двойственной задачи.

## 2.2 Варианты заданий

Вариант заданий выдается преподавателем.

Таблица 2.2 – Варианты заданий

| Номер варианта | Задание | Номер варианта | Задание |
|---|---|---|---|
| 1 | $f(x)=x_1+2x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases}2x_1-x_2\ge 6\\ 2x_1+x_2\le 1\end{cases}$ $x_1\ge 0, x_2\ge 0$ | 2 | $f(x)=x_1+3x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases}-7x_1+4x_2\ge 28\\ x_1-3x_2\ge 15\end{cases}$ $x_1\ge 0, x_2\ge 0$ |
| 3 | $f(x)=x_1+3x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases}-x_1+x_2\ge 6\\ x_1-2x_2\ge 10\end{cases}$ $x_1\ge 0, x_2\ge 0$ | 4 | $f(x)=2x_1+3x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases}x_1-4x_2\ge 12\\ -4x_1+x_2\ge 4\end{cases}$ $x_1\ge 0, x_2\ge 0$ |
| 5 | $f(x)=x_1+x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases}x_1-2x_2\ge 14\\ -5x_1+3x_2\ge 15\end{cases}$ $x_1\ge 0, x_2\ge 0$ | 6 | $f(x)=3x_1+x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases}-7x_1+3x_2\ge 21\\ x_1-5x_2\ge 10\end{cases}$ $x_1\ge 0, x_2\ge 0$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 7 | $f(x)=5x_1+7x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases} 5x_1-6x_2 \le 30 \\ x_1-4x_2 \le 28 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$ | 8 | $f(x)=3x_1+2x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases} x_1-2x_2 \ge 6 \\ x_1+5x_2 \ge 8 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$ |
| 9 | $f(x)=3x_1+2x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases} 2x_1+x_2 \ge 12 \\ x_1+x_2 \le 1 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$ | 10 | $f(x)=2x_1+x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases} -2x_1+x_2 \ge 10 \\ x_1-x_2 \ge 8 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$ |
| 11 | $f(x)=3x_1+x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases} -x_1-2x_2 \ge 8 \\ -2x_1+x_2 \le 2 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$ | 12 | $f(x)=5x_1+4x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases} x_1-5x_2 \ge 20 \\ -x_1+x_2 \ge 9 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$ |
| 13 | $f(x)=x_1+x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases} -2x_1-x_2 \ge 6 \\ -x_1+3x_2 \le 9 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$ | 14 | $f(x)=x_1+x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases} 3x_1-4x_2 \ge 12 \\ x_1+x_2 \le 1 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$ |
| 15 | $f(x)=-2x_1-3x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases} -4x_1+2x_2 \ge 4 \\ x_1-x_2 \ge 6 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$ | 16 | $f(x)=x_1-x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases} 2x_1-3x_2 \ge 12 \\ x_1+x_2 \le 1 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$ |
| 17 | $f(x)=x_1+3x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases} 3x_1+4x_2 \le 12 \\ 2x_1-x_2 \ge 10 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$ | 18 | $f(x)=6x_1+x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases} -x_1+x_2 \ge 15 \\ x_1-3x_2 \ge 9 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$ |
| 19 | $f(x)=x_1+2x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases} x_1-6x_2 \ge 6 \\ -2x_1+x_2 \ge 2 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$ | 20 | $f(x)=4x_1+x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases} -6x_1+x_2 \ge 12 \\ x_1+2x_2 \le 10 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 21 | $f(x) = x_1 + 5x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases} -x_1 - x_2 \ge 12 \\ x_1 - 4x_2 \le 8 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$ | 22 | $f(x) = 2x_1 + x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases} x_1 - 5x_2 \ge 10 \\ x_1 - 2x_2 \le 6 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$ |
| 23 | $f(x) = 2x_1 + 3x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 10 \\ 2x_1 + x_2 \le 6 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$ | 24 | $f(x) = 3x_1 + 2x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \le 8 \\ x_1 + x_2 \ge 4 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$ |
| 25 | $f(x) = x_1 + 4x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 \ge 14 \\ -x_1 - x_2 \ge 6 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$ | 26 | $f(x) = x_1 + 3x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases} x_1 - 2x_2 \ge 6 \\ -x_1 + 3x_2 \ge 6 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$ |
| 27 | $f(x) = 2x_1 + x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 2 \\ x_1 + 2x_2 \ge 8 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$ | 28 | $f(x) = 6x_1 + 2x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases} -3x_1 + x_2 \ge 6 \\ -3x_1 + x_2 \le 1 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$ |
| 29 | $f(x) = 5x_1 + 2x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases} x_1 - 3x_2 \ge 9 \\ 3x_1 - x_2 \le 6 \\ 2x_2 \le 12 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$ | 30 | $f(x) = 2x_1 + x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases} -x_1 + x_2 \ge 1 \\ x_1 - 2x_2 \ge 1 \\ x_1 - x_2 \le 8 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$ |

## 2.3 Исходный код программы

*Входные данные:*

- N – число переменных;
- M – число ограничений;
- eps – точность;
- ip – признак вида задачи (если на максимум ,то ip = 1,если на минимум, то ip = 0);
- T[i] – коэффициенты целевой функции;
- S – массив из M–2 чисел, содержащий правые части системы;
- R – массив из (M–2)·N чисел, содержащий коэффициенты при неизвестных в системе ограничений.

*Выходные данные:*

– ip – признак окончания решения(ip = 1 – найдено оптимальное решение; ip = 2 – задача не имеет решения; ip = 3 – целевая функция не ограничена);
– nb – массив, содержащий номера переменных в массиве x;
– x – массив из M чисел, содержащий оптимальное решение;
– f – оптимальное значение целевой функции.

```
program  simplecs;
type mas=array[1..100] of real;
    mas1=array[1..100] of integer;
    var
        r,s,t,a,u,x,xk:mas;
        nb:mas1;
       i,l,k,z1,mi,m1,ni,ne,ip,m,n:integer;
        eps,tmin,teta:real;
procedure sol00(r,s,t:mas;var a,x:mas; n,m:integer);
  var k1,k2,k3,j,mj,l,i:integer;
  BEGIN
     l:=m-2;
  for j:=1 to n do
  begin
  mj:=m*j;
  a[mj]:=0;
  for i:=1 to l do
  begin
  k1:=m*(j-1)+i;
  k2:=l*(j-1)+i;
  a[k1]:=r[k2];
  a[mj]:=a[mj]-r[k2];
  end;
  end;
  for i:=1 to n do
  begin
  k3:=m*i-1;
  a[k3]:=t[i];
  end;
  x[m-1]:=0;
  x[m]:=0;
  for i:=1 to l do
  begin
  x[i]:=s[i];
  x[m]:=x[m]-x[i];
end;END;
 procedure sol01(var u:mas;m:integer);
 var i,j,l:integer;
```

```
 BEGIN
 for j:=1 to m do
 for i:=1 to m do
 begin
   l:=m*(j-1)+i;
   u[l]:=0;
   if (i-j)=0 then
   u[l]:=1;
   end;
   END;
procedure sol02(u,a:mas;m,n,j:integer;var del:real);
var i,im,ij:integer;
begin
del:=0;
for i:=1 to m do
begin
im:=i*m;
ij:=m*(j-1)+i;
del:=del+u[im]*a[ij];
end;
EnD;
procedure sol03(var tmin:real;a,u:mas;nb:mas1;m,n:integer;var k:integer);
             var  bul,i,j,m1:integer;
             del:real;
   begin
   tmin:=0;
   m1:=m-2;
   for j:=1 to n do
   begin
  bul:=1;
  i:=1;
  while (bul=1) and (i<=m1) do
  if (j-nb[i])=0  then bul:=2
  else
  i:=i+1;
  if bul<>2 then
  begin
  sol02(u,a,m,n,j,del);
  if (del-tmin)<=0 then
  begin
  tmin:=del;
  k:=j;
  end;
  end;
  end;
```

```
  end;
  procedure sol04(u,a:mas;m,n,k:integer;var xk:mas);
  var
     ij,jk,i,j:integer;
   begin
   for i:=1 to m do
   begin
   xk[i]:=0;
   for j:=1 to m do
   begin
   ij:=m*(j-1)+i;
   jk:=m*(k-1)+j;
   xk[i]:=xk[i]+u[ij]*a[jk];
   end;
   end;
   end;
procedure sol05(x,xk:mas;m:integer;var l:integer;var teta:real;eps:real);
var
  i,m1:integer;
  r:real;
 begin
  teta:=10000;
  m1:=m-2;
   for i:=1 to m1 do
   if(xk[i]-eps)>=0 then
   begin
   r:=x[i]/xk[i];
  if (r-teta)<=0 then
  begin
  teta:=r;
  l:=i;
  end;
  end;
  end;
 procedure sol06(var x,xk:mas;m,l:integer;var teta:real);
 var i:integer;
 begin
  for i:=1 to m do begin
  If (i-l)<>0 then
  x[i]:=x[i]-teta*xk[i]
  else
  x[i]:=teta;
  end;
  end;
 procedure sol07(var u:mas;m,l:integer;xk:mas);
```

```
 var
      m1,j,lj,i,ij:integer;
     begin
  m1:=m-2;
  for j:=1 to m1 do
  begin
  lj:=m*(j-1)+l;
  u[lj]:=u[lj]/xk[l];
  end;
  for i:=1 to m do
  for j:=1 to m1 do
  if (i-l)<>0 then
  begin
  ij:=m*(j-1)+i;
  lj:=m*(j-1)+l;
  u[ij]:=u[ij]-u[lj]*xk[i];
  end;
  end;
 procedure sol08(u,a:mas;m,j:integer;var del:real);
 var mi,ij,i:integer;
 begin
 del:=0;
  for i:=1 to m do
  begin
  mi:=m*i-1;
  ij:=m*(j-1)+i;
  del:=del+u[mi]*a[ij];
  end;
  end ;
procedure sol09(var tmin:real;var k:integer;a,u:mas;nb:mas1;m,n:integer);
var bul,m1,i,j:integer;
   del:real;
 begin
 tmin:=0;
 m1:=m-2;
 for j:= 1 to n do
 begin
 bul:=1;
 i:=1;
 while (bul=1)  and (i<=m1) do
 if (j-nb[i])=0 then
 bul:=2
 else
 i:=i+1;
 if bul<>2 then
```

```
   begin
   sol08(u,a,m,j,del);
   if (del-tmin)<=0 then
   begin
   tmin:=del;
   k:=j;
   end;
   end;
   end;
   end;
procedure sol10(var tmin:real;u,a:mas;nb:mas1;m,n:integer;var k:integer;
eps:real);
 var bul,m1,i,j:integer;
   del,del1:real;
   begin
       tmin:=0;
       m1:=m-2;
    for j:=1 to n do
      begin
        bul:=1;
        i:=1;
     while (bul=1) and (i<=m1) do
         if (j-nb[i])=0 then
           bul:=2
           else
     i:=i+1;
     if bul<>2 then
     begin
     sol02(u,a,m,n,j,del);
     sol08(u,a,m,j,del1);
     if (abs(del1)-eps)<=0 then
     if (del-tmin)<=0 then
     begin
     tmin:=del;
     k:=j;
     end;
     end;
     end;
     end;
BEGIN
  write(‘ n’);
  read(n);
  writeln(‘m’);readln(m);
  writeln(' (eps)=>');read(eps);
  writeln('ip(ip=1 if MAKS;ip=0 if MIN )=>');
```

```
 read(ip);
 for i:=1 to n do
 begin
   writeln('t[',i, ']= ');
   read(t[i]);
   end;
 for i:=1 to m-2 do
 begin
 writeln('s[',i, ']= ');
 read(s[i]);
 end;
 for i:=1 to (m-2)*n do
 begin
  writeln('r[',i, ']= ' );
 read(r[i]);end;
 sol00(r,s,t,a,x,n,m);
 if (ip-1)=0 then
 for i:=1 to n do
 begin
  mi:=m*i-1;
  a[mi]:=-a[mi];
end;
  sol01(u,m);
  m1:=m-2;
  for i:=1 to m1 do
  nb[i]:=100011+i;
  ni:=0;
  ne:=1;
3: sol03(tmin,a,u,nb,m,n,k);
2:   if (tmin+eps)>=0 then
  if (ne)=1 then
  if (x[m]+eps)>=0 then
  begin
  ne:=2;
  for i:=1 to m1 do
  if (nb[i]-10000)>0 then
  ne:=3 ;
  if ne=3 then
  begin
  sol10(tmin,u,a,nb,m,n,k,eps);
   goto 2;
   end  else
   begin
   sol09(tmin,k,a,u,nb,m,n);
   goto 2;
```

```
end;end else
begin
ip:=2;
goto 10;
end
else
if (ip-1)<>0 then
begin
x[m-1]:=-x[m-1];
ip:=1;
goto 10;
end
else
begin
ip:=1;
goto 10;
end
else
begin
sol04(u,a,m,n,k,xk);
sol05(x,xk,m,l,teta,eps);
if (teta+5-10000)<0 then
begin
sol06(x,xk,m,l,teta);
sol07(u,m,l,xk);
nb[l]:=k;
ni:=ni+1;
if ne<>1 then
if ne=2 then
begin
sol09(tmin,k,a,u,nb,m,n);
goto 2;
end
else
begin
sol10(tmin,u,a,nb,m,n,k,eps);
goto 2;
end
else
goto 3 ;end
 else
 begin
 ip:=3;
 goto 10;
 end; end;
```

```
10:  writeln('ip=',ip);
 if ip=1 then begin
    for i:=1 to m-2 do
        writeln('x[', nb[i], ']=',x[i]:13);
        for i:=1  to m-2  do
        writeln('nb[',i,']=',nb[i]);end;
        writeln('f=', x[m-1]:13);
        readln; readln;readln;
END.
```

## 2.4 Пример решения двойственной и прямой задач линейного программирования с помощью программы simplecs

**Пример**.

Построить двойственную задачу по отношению к прямой задаче линейного программирования:

$$f(\mathbf{x}) = 10x_1 + 14x_2 + 12x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 \le 180 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 \le 210 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 \le 244 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$$

**Решение:**

1. Построим двойственную задачу линейного программирования по отношению к прямой задаче.

$$f(\mathbf{x}) = 180y_1 + 210y_2 + 244y_3 \to \min$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + x_3 \ge 10 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 14 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 \ge 12 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$$

2. Решим прямую задачу линейного программирования:

$$f(\mathbf{x}) = 10x_1 + 14x_2 + 12x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 \le 180 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 \le 210 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 \le 244 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$$

*Входные данные:*

N = 6

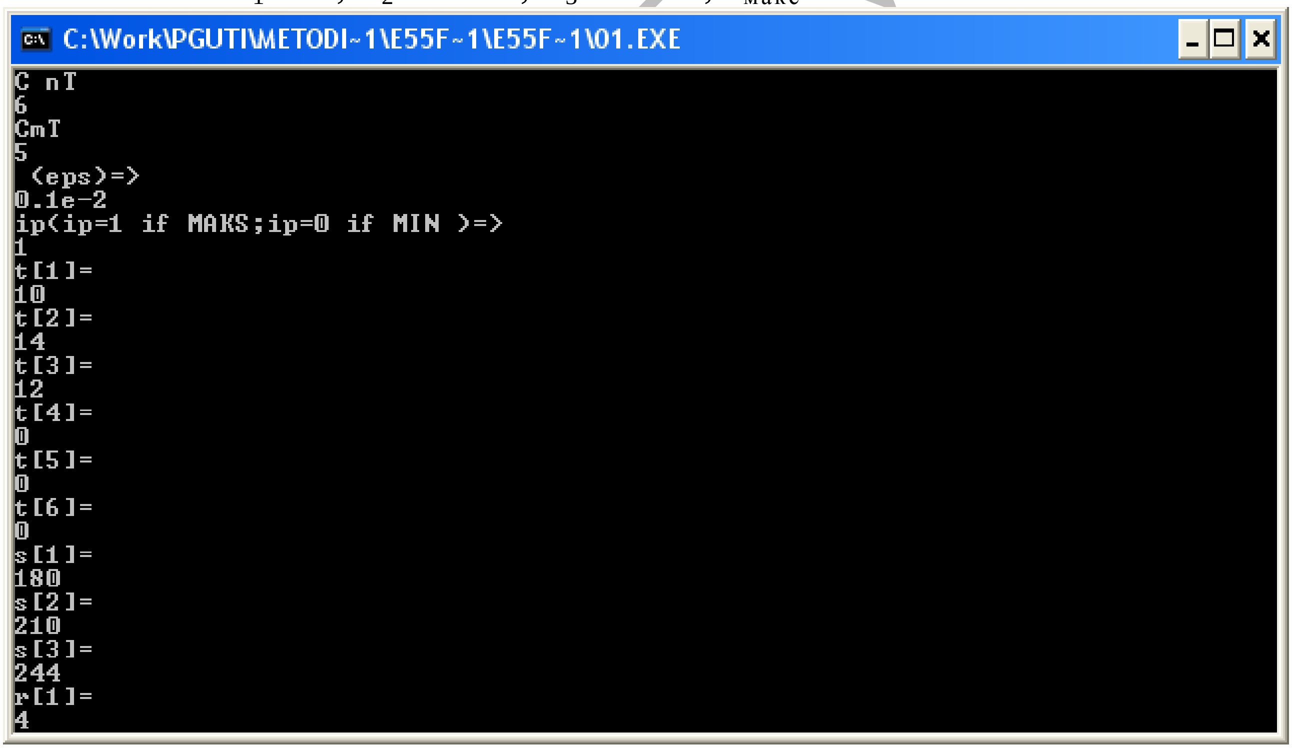
M = 5

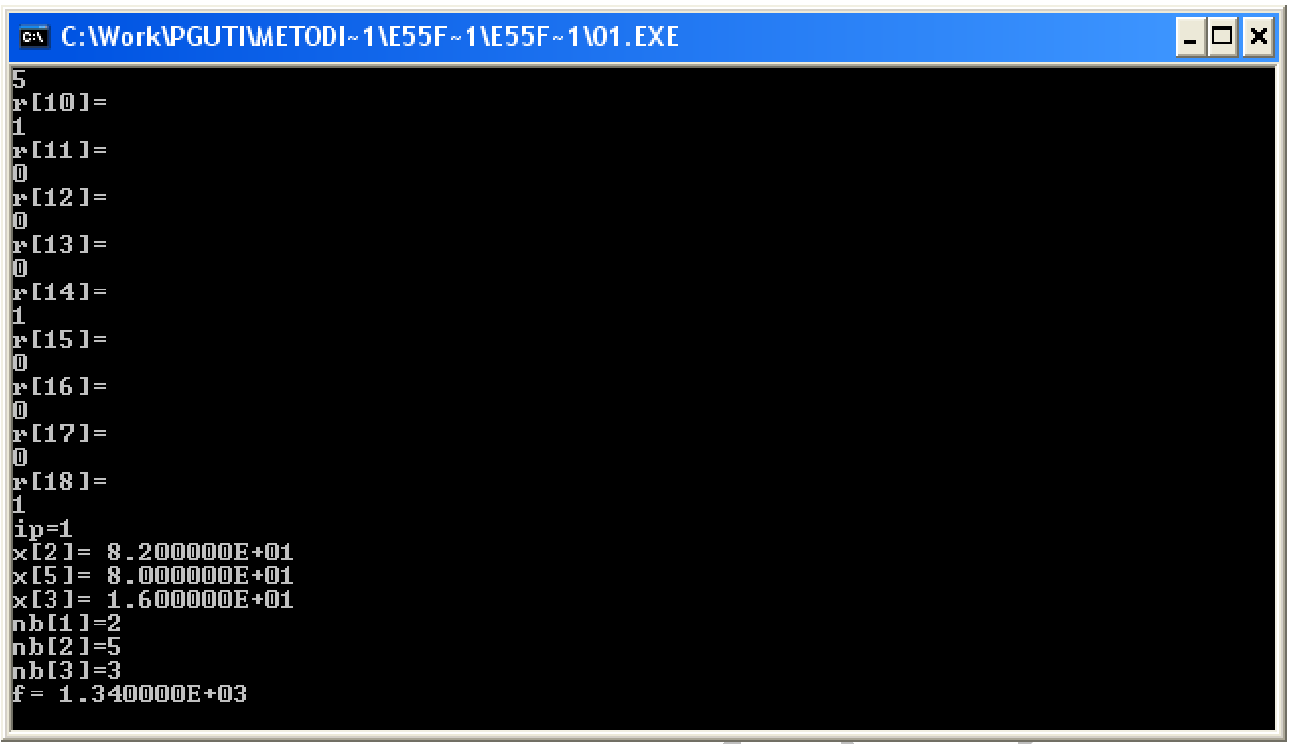
EPS = 0.1e–2

ip = 1

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| коэффициенты целевой функции | 10 | 14 | 12 | 0 | 0 | 0 | Вводить по строкам |
| свободные члены ограничений | 180 | 210 | 244 | | | | |
| коэффициенты 1-го ограничения | 4 | 2 | 1 | 1 | 0 | 0 | Вводить по столбцам |
| коэффициенты 2-го ограничения | 3 | 1 | 3 | 0 | 1 | 0 | |
| коэффициенты 3-го ограничения | 1 | 2 | 5 | 0 | 0 | 1 | |

*Выходные данные:*
ip = 1 (найдено оптимальное решение)
x(2) = 8.20E+01
x(5) = 8.00E+01
x(3) = 1.60E+01
*f* = 1.34E+03
Ответ: $x_1$ = 0, $x_2$ = 8.20, $x_3$ = 1.60, $f_{макс}$ = 1340.






…

Рисунок 1.5 – Решение задачи линейного программирования с помощью программы simplecs

3. Решим двойственную задачу линейного программирования:

$$f(\mathbf{x}) = 180y_1 + 210y_2 + 244y_3 \to \min$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + x_3 \ge 10 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 14 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 \ge 12 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$

*Входные данные:*

N = 6

M = 5

EPS = 0.1e–2

ip = 0

<table>
<tr><td></td><td>$x_1$</td><td>$x_2$</td><td>$x_3$</td><td>$x_4$</td><td>$x_5$</td><td>$x_6$</td><td></td></tr>
<tr><td>коэффициенты целевой функции</td><td>180</td><td>210</td><td>244</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td rowspan="2">Вводить по строкам</td></tr>
<tr><td>свободные члены ограничений</td><td>10</td><td>14</td><td>12</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>коэффициенты 1-го ограничения</td><td>4</td><td>3</td><td>1</td><td>-1</td><td>0</td><td>0</td><td rowspan="3">Вводить по столбцам</td></tr>
<tr><td>коэффициенты 2-го ограничения</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>0</td><td>-1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>коэффициенты 3-го ограничения</td><td>1</td><td>3</td><td>5</td><td>0</td><td>0</td><td>-1</td></tr>
</table>

*Выходные данные:*

ip = 1 (найдено оптимальное решение)

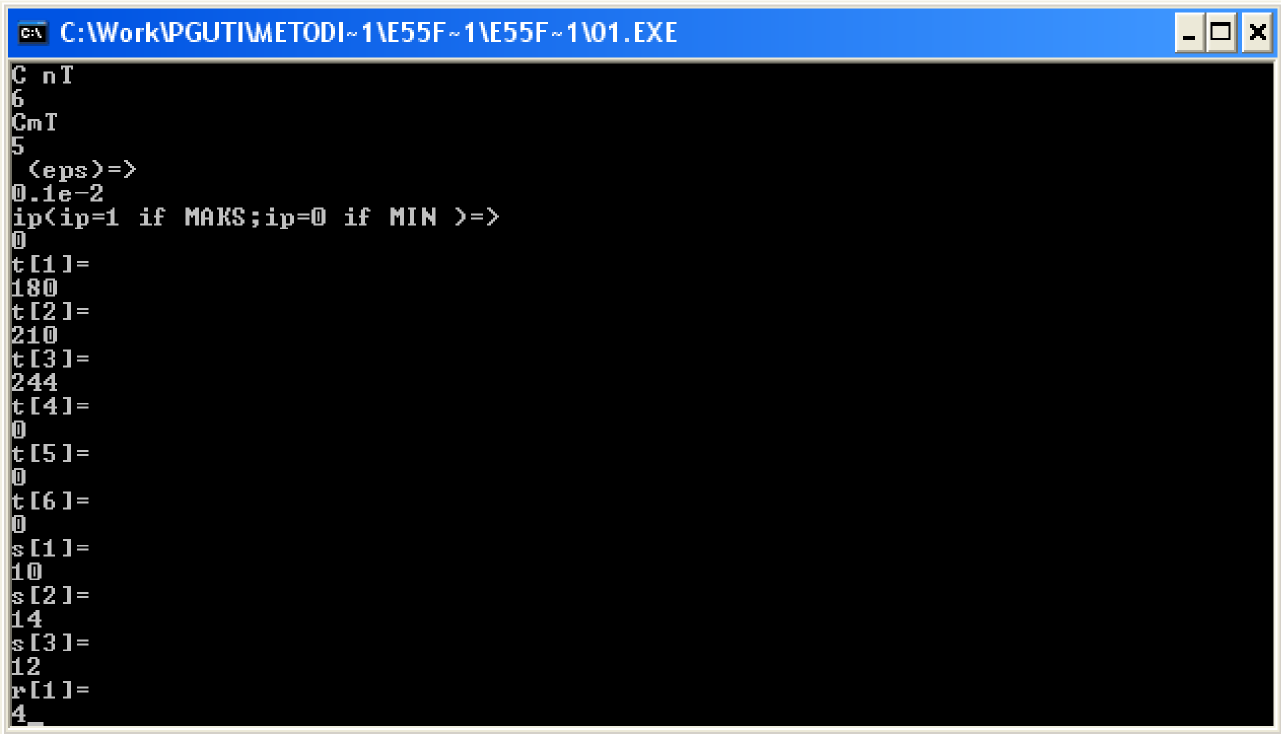
x(1) = 5.75E+00

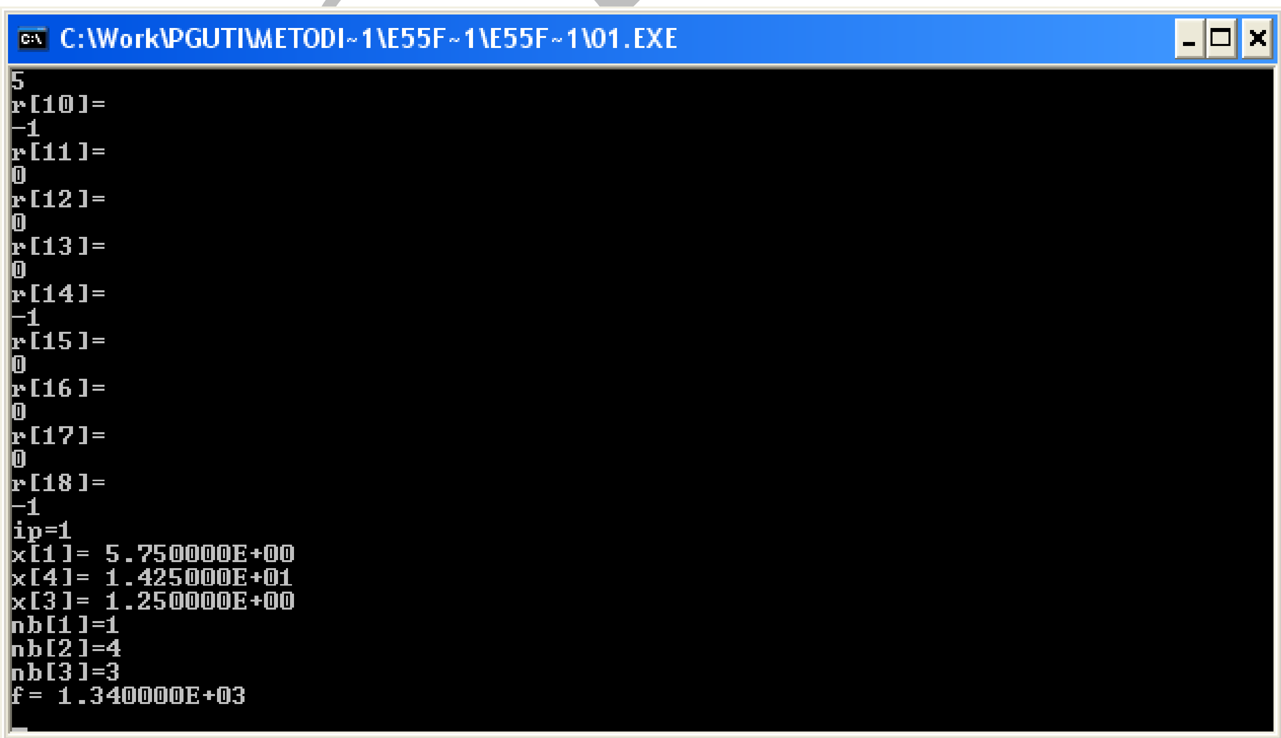
x(4) = 1.43E+01

x(3) = 1.25E+00

$f$ = 1.34E+03

Ответ: $y_1 = 5.75$, , $y_2 = 0$, $y_3 = 1.25$, $f_{мин} = 1340$.



4. Анализ результатов.

Здесь $y_1^*$, $y_3^*$, обозначают условные двойственные оценки единицы сырья 1-го и 3-го видов, отличные от 0. По оценкам можно судить, что сырье 1-го и 3-го видов полностью используется при оптимальном плане производства продукции.

Оценка $y_2^*=0$, поэтому 2-ой вид сырья не полностью используется при оптимальном плане производства продукции.

Подставим оптимальные двойственные оценки в систему ограничений двойственной задачи:

$23+1,25>10$

$11,5+2,5=14$

$5,75+6,25=12$.

Первое ограничение выполняется как строгое неравенство. Это означает, что двойственная оценка сырья, используемого на производство одного изделия 1-го вида, выше цены этого изделия и выпускать его невыгодно.

## 2.5 Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение задачи линейного программирования общего вида.
2. Что означает выражение «теневая цена»?
3. Как называют оптимальные теневые цены?
4. Дайте определение двойственной задачи линейного программирования?
5. Напишите общую формулировку прямой и двойственной задачи.
6. Сформулируйте правила построения двойственной задачи.
7. Перечислите теоремы устанавливающие зависимости между решениями прямой и двойственной задач.

### 2.6 Требования к оформлению

Лабораторная работа оформляется в текстовом процессоре MS Word в печатном виде.

Лабораторная работа выполняется на листах формата А4, которые должны быть сброшюрованы в виде папки.

**Параметры страницы.** Страницы должны иметь следующие поля: слева – 25 мм, справа – 20 мм, сверху и снизу – по 20 мм. Все страницы, за исключением *титульного листа* (номер 1), нумеруются сверху в центре в следующем порядке: страница 2 – *замечания руководителя* по пояснительной записке КР (оставляется пустой), страница 3 – *оглавление* с обязательным указанием номеров страниц разделов, страница 4 и т.д. – *содержательная часть КР*. В контрольной работы приводится *список источников информации*.

**Форматирование текста.** Текст лабороторной работы располагается на одной стороне листа. Стиль абзаца: шрифт Times New Roman размером в 14 пунктов, отступ первой строки 1,27 см, межстрочный интервал – одинарный, выравнивание по ширине, запрет висячих строк. Предусмотреть автоматический перенос слов и проверку орфографии.

Заголовки выполняются стилями: Заголовок 1, Заголовок 2, Заголовок 3 и т.д., учитывая, что размер шрифта каждого стиля должен отличаться от предыдущего на 1 или 2 пункта. Заголовок самого нижнего уровня иерархии должен иметь размер шрифта не менее размера шрифта абзаца. В каждом стиле заголовка должна быть выключена опция « Расстановка переносов».

**Оформление рисунков.** Рисунки выполняются в удобных для пользователя редакторах и импортируются в текст лабороторной работы. Все рисунки должны быть пронумерованы и содержать наименование и, при необходимости, пояснительный текст.

Форматирование рисунков необходимо производить так, чтобы все детали рисунка были различимы при печати, а надписи на рисунках имели размер шрифта примерно на 1 пункт меньше шрифта стиля абзаца.

Рисунки отбивают от текста сверху в пределах 1,5 кегельных, снизу – 3 кегельных (кегль – размер шрифта). Если подпись к рисунку располагается под ним, то ее отбивка от рисунка должна быть меньше, чем от следующего текста.

Общая высота рисунка с подписью и отбивками должна быть кратна кеглю основного шрифта, а для рисунков в оборку – кеглю шрифта, которым делается оборка.

**Оформление таблиц.** Основное поле таблицы заполняется шрифтом на 1 пункт меньше шрифта стиля абзаца; головки таблицы – заполняются шрифтом на 2 пункта меньше размера шрифта основного поля таблицы. Все таблицы должны быть пронумерованы и содержать наименование и при необходимости пояснительный текст.

**Оформление формул.** Набор формул производится с помощью формульного редактора Microsoft Equation, с установками форматирования «по умолчанию». В этом случае размер шрифта устанавливается автоматически. Для удобства организации ссылок на формулы, формулы нумеруются в естественном порядке, и лишь только те, на которые имеются ссылки по тексту.

**Оформление оглавления (содержания).** Кегль шрифта оглавления (содержания) понижают на один пункт по сравнению со шрифтом основного текста, сохраняя гарнитуру.

Слово «Оглавление» («Содержание») набирают прописным вариантом шрифта оглавления (содержания) или с выделением. Допустимо применение повышенного кегля шрифта, однако не выше кегля шрифта, старшей рубрики издания.

Оглавление создать автоматически «Вставка» – «Ссылка» – «Оглавление и указатели» – «Оглавление» (*применительно только при разметке Заголовок стилями, например Заголовок 1, Заголовок 2, Заголовок 3 и т.д.*). При составлении оглавления установить следующие свойства – показать номера страниц и номера страниц по правому краю. Заполнитель и формат оглавления выбирается по усмотрению студента.

**Оформление титульного листа.** Форма титульного листа приведена на рисунке 1.6.

Поволжский государственный университет
телекоммуникаций и информатики
Кафедра «Программное обеспечение и управление
в технических системах»

Сдана на проверку
«___»_____________2011 г.

Допустить к защите
«___»______________2011 г.

Лабораторная работа **№ 2**
по дисциплине
«Методы оптимизации в информационных системах»
на тему
«Решение двойственной задачи линейного программирования с помощью симплекс метода»

Пояснительная записка
на ____ листах

ВАРИАНТ ____

Студент группы ______
ФИО студента ________________

Самара 2011

Рисунок 1.6 – Форма титульного листа лабораторной работы

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. Тарасов В.Н., Бахарева Н.Ф. Математическое программирование. Теория. Алгоритмы. Программы. – Оренбург: ИПК ОГУ, 2007 – 222 с.
2. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах: Учеб. пособие для студентов эконом. спец. вузов. – М.: Высш. шк., 1986. – 319 с.
3. Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова Н.В. Вычислительные методы для инженеров: Учебное пособие. – М.: Высш. шк., 1994. – 554 с.
4. Аттетков А.В., Галкин С.В., Зарубин В.С. Методы оптимизации: Учебник для вузов. – М.: Изд-во МГТУ им. Баумана, 2001. – 440 с.
5. Базара М., Шетти К. Нелинейное программирование. Теория и алгоритмы. – М.: Мир, 1982. – 583с.
6. Банди Б. Методы оптимизации. Вводный курс: Пер. с англ. – М.: Радио и связь, 1988. – 128с.
7. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1988. – 552с.
8. Грешилов А.А. Прикладные задачи математического программирования М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1990. – 189 с.
9. Данциг Дж. Линейное программирование: Пер. с англ. - М.: Прогресс, 1966. – 600 с.
10. Еремин И.И., Астафьев И.Н. Введение в теорию линейного и выпуклого программирования. – М.: Наука, 1976. – 192 с.
11. Карманов В.Г. Математическое программирование. – М.: Наука, 1975. – 272с.
12. Линейное и нелинейное программирование. /Под ред. проф. И.Н. Ляшенко. – Киев.:ВИЩА ШКОЛА, 1975. – 371 с.
13. Мину М. Математическое программирование. Теория и алгоритмы: Пер с франц. – М.: Наука, 1990. – 487 с.
14. Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Федоров В.В. Курс методов оптимизации. – М.: Наука, 1986. – 328с.
15. Хедли Дж. Нелинейное и динамическое программирование: Пер. с англ. – М.: Мир, 1967. – 506с.
16. Юдин Д.Б., Гольштейн Е.Г. Линейное программирование. Теория, методы, приложения. – М.: Наука, 1969. – 424 с.