

## Математическое моделирование волноводных систем с частичным твердотельным заполнением: нелинейные и дифракционные процессы

Е.Ю. Альтшулер

*Рассмотрены методы математического моделирования нелинейной дифракции в волноведущих структурах и сравнительная эффективность их реализаций. Теоретически анализируется дифракция электромагнитной волны на полупроводниковых вставках, частично заполняющих поперечное сечение прямоугольного волновода. На основе результатов численных расчетов исследовано ограничение мощности сильной электромагнитной волны в волноводе, частично заполненном полупроводниковой плазмой в условиях ударной ионизации (обратимого электрического пробоя) полупроводникового материала.*

### Введение

Строгие (электродинамические) методы математического моделирования дифракционных процессов разнообразны. Они включают конечно-разностные (сеточные) методы в спектральной и временной областях (типа FDTD), вариационные и проекционные формулировки (методы Рунге, моментов, Галеркина, коллокаций, Третьяка, конечных элементов, граничных элементов), которые в общем случае можно определить как методы обобщенных взвешенных невязок (МОВН) [например, 1], а также различные методы интегральных уравнений (ИУ) и интегродифференциальных уравнений (ИДУ) [например, 3-11]. Используются поверхностные и объемные ИУ и ИДУ. Первые формулируются как относительно тока, так и относительно электрического или магнитного полей, а также и потенциалов в виде уравнений Фредгольма. Эти уравнения могут быть записаны в форме уравнений Фредгольма первого и второго рода [2-7]. Методами регуляризации или полуобращения интегрального оператора уравнений 1-го рода преобразуются в уравнения второго рода с выделением внеинтегральных слагаемых. Поверхностные ИУ получают «сшиванием» ЭМ-полей на основе функций Грина, формул Грина, векторных интегральных теорем, лемм электродинамики, формул Стрэттона-Чу и ряда других подходов. Второй класс представляют объемные

интегральные уравнения (ОИУ). Они также имеют форму трехмерных уравнений Фредгольма второго рода и могут быть сформулированы как для полей  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ , так и относительно каждого из полей и относительно различных потенциалов [12-14]. Их также можно преобразовать на основе вышеупомянутых теорем и формул. При этом понижается особенность ядер, а уравнения могут нагружаться поверхностными интегралами. ОИУ также формулируются для потенциалов, зарядов и других физических величин. Численная реализация методов зависит от того, на основе каких операторов построен алгоритм: дифференциальных, интегральных, интегродифференциальных.

Относительно просто решаются одномерные задачи дифракции. Они формулируются в виде задачи Коши, для решения которой есть много прямых стандартных методов интегрирования [15], а также методов: матриц передачи, ВКБ, интегрирование методом рядов, метод ИУ неоднородных линий и интегральных уравнений, например, на основе уравнения Риккати [15, 17].

Перечисленные методы широко применяются к линейным дифракционным задачам, но ряд из них может быть использован и для решения нелинейных проблем. Анализ нелинейных задач становится все более актуальным с развитием техники в СВЧ-, КВЧ-, терагерцовом и оптическом диапазонах. Публикаций по решению нелинейных задач дифракции ЭМ-волн по сравнению с линейными случаями мало [17-27], а сама проблема такой дифракции находится в стадии становления.

Е.Ю. Альтшулер

г. Саратов, Саратовский государственный университет

Данная работа посвящена в основном нелинейным дифракционным процессам применительно к полупроводниковым элементам в волноводах. Рассмотрение ведется на примере прямоугольного волновода (ПВ), но результаты могут быть обобщены для других структур и линий передачи с **нелинейными элементами**. Нелинейные задачи дифракции сильных электромагнитных волн возникают в теории плазмы [16-18], физике твердого тела [19,23,26,27], оптике, магнитостатике [25], квантовой электронике [21], а обобщенно – в нелинейной электродинамике неоднородных сред и структур. В общем случае нелинейность приводит к многочастотности и нестационарности. Нестационарное решение задачи универсально и не дает существенных усложнений алгоритма при переходе от линейных моделей к нелинейным [11]. Часто нелинейная задача может рассматриваться как одночастотная в спектральной области [18-23]. Пример – прохождение (туннелирование) монохроматической ЭМ-волны через газоразрядную или полупроводниковую плазму [16-18], где «греющее» поле приводит к зависимости диэлектрической проницаемости (ДП) от усредненного за период квадрата электрического поля.

В данной работе рассмотрен монохроматический нелинейный случай в спектральной области.

Для одномерных нелинейных задач хорошо развиты приближенные методы [16,18,28,29] и широко используются прямые явные и неявные одношаговые, многошаговые и многозначные численные методы интегрирования обыкновенных ДУ типа МРК, Штермера, Адамса-Мултона, Гира и другие [15]. Для жестких задач наиболее эффективны неявные схемы метода Рунге-Кутты, метод Гира (многошаговый неявный метод интегрирования назад переменного порядка в представлении Нордсика), а также схемы Розенброка с комплексными коэффициентами, которые предпочтительнее метода Гира. Указанные прямые методы интегрирования обыкновенных ДУ эффективны и достаточно просты. Решение координатных трехмерных задач методами типа интегральных соотношений и следующими из них методами (полос, прямых, неполным методом Галеркина) также возможно с использованием подобных алгоритмов.

Цель работы – анализ методов нелинейной дифракции на полупроводниковых элементах в ПВ и получение численных результатов для процессов в пассивных и активных структурах

в условиях греющей ЭМ-волны и ударной ионизации (обратимого электромагнитного пробоя). Дифракция ЭМ-волны на линейных и нелинейных структурах эквивалентна задачам туннелирования в квантовой механике, оптике и в ряде других случаев (например, [21, 22]).

## 1. Методы моделирования линейной дифракции ЭМ-волны на твердотельных элементах в прямоугольном волноводе

Линейная дифракция соответствует независимости материальных уравнений от ЭМ-поля. Обычно полупроводниковые структуры описываются как диэлектрические. Для полупроводниковых структур спектральную диэлектрическую проницаемость введем классическим образом:

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_r(\omega) - \omega_p^2 / [\omega(\omega - j\omega_c)]. \quad (1)$$

Полупроводниковую плазму считаем однокомпонентной. Формулировка линейной задачи с произвольным распределением полупроводника в ПВ несложно получается многими из рассмотренных методов. Если область включения состоит из стыков однородных по  $z$  подобластей, то эффективны методы многомодовых матриц передачи или рассеяния (но при решенной задаче о таком многомодовом дескрипторе). Много публикаций имеется для метода поперечных сечений (неполного метода Галеркина) [30-32] и сходных походов (метода Канторовича [32] и др.). Метод поперечных сечений использовался как в форме базиса частично заполненного волновода, так и в форме основного базиса – базиса незаполненного волновода [30-31]. Методы сшивания и ПИУ эффективно реализуются численно для включений в виде прямоугольного параллелепипеда, когда собственные волны частично заполненного ПВ необходимо определять численно для одного поперечного сечения.

Приведем соотношения для метода Галеркина. ЭМ-поля внутри прямоугольной области  $0 < z < l$ , содержащей полупроводниковые элементы, представим так:

$$\begin{aligned} \vec{E}(x, y, z) &= \sum_n \vec{E}_n(x, y) \times \\ &\times [a_n \cos(\gamma_n z) + b_n \sin(\gamma_n z)], \\ \vec{H}(x, y, z) &= \sum_n \vec{H}_n(x, y) \times \\ &\times [c_n \cos(\gamma_n z) + d_n \sin(\gamma_n z)], \end{aligned} \quad (2)$$

или в эквивалентной форме так:

$$\begin{aligned}\bar{E}(\bar{r}) &= \sum_n \bar{E}_n(x, y) \times \\ &\times \left[ a_n^+ \exp(-j\gamma_n z) + a_n^- \exp(j\gamma_n z) \right], \\ \bar{H}(\bar{r}) &= \sum_n \bar{H}_n(x, y) \times \\ &\times \left[ b_n^+ \exp(-j\gamma_n z) + b_n^- \exp(j\gamma_n z) \right].\end{aligned}\quad (3)$$

Здесь  $n = (m, k)$  - мультииндекс,

$$\gamma_n \equiv \gamma_{mk} = \sqrt{k_0^2 - (m\pi/a)^2 - (k\pi/b)^2}$$

- постоянные распространения, а базис в (2) и (3) соответствует основному базису пустого ПВ и дается соотношениями (10.59) и (10.72) из [34]. Далее разложения (2), (3) можно использовать, подставляя их в уравнения Максвелла либо в уравнение Гельмгольца для электрического или магнитного полей, а также в соответствующие функционалы или интегральные уравнения (ИУ) в качестве пробных функций. Весовыми функциями в методе Галеркина выступают ЭМ-поля из (2) или (3). Для решения задачи надо сшить поля при  $z = 0$  и  $z = l$ , для чего представим их при  $z < 0$  в виде

$$\begin{aligned}\bar{E}(\bar{r}) &= \bar{E}^{(0)}(x, y) \left[ \exp(-j\gamma^{(0)}z) + \right. \\ &+ R^{(0)} \exp(j\gamma^{(0)}z) \left. \right] + \\ &+ \sum_n \bar{E}_n(x, y) c_n^- \exp(j\gamma_n z), \\ \bar{H}(\bar{r}) &= \bar{H}^{(0)}(x, y) \left[ \exp(-j\gamma^{(0)}z) - \right. \\ &- R^{(0)} \exp(j\gamma^{(0)}z) \left. \right] + \\ &+ \sum_n \bar{H}_n(x, y) d_n^- \exp(j\gamma_n z),\end{aligned}\quad (4)$$

а при  $z > l$  так:

$$\begin{aligned}\bar{E}(\bar{r}) &= \bar{E}^{(0)}(x, y) T^{(0)} \exp(-j\gamma^{(0)}z) + \\ &+ \sum_n \bar{E}_n(x, y) c_n^+ \exp(-j\gamma_n(z-l)), \\ \bar{H}(\bar{r}) &= \bar{H}^{(0)}(x, y) T^{(0)} \exp(-j\gamma^{(0)}z) + \\ &+ \sum_n \bar{H}_n(x, y) d_n^+ \exp(-j\gamma_n(z-l))\end{aligned}\quad (6)$$

Здесь с помощью «(0)» обозначена выделенная падающая мода. Предполагаем, что возбуждение осуществляется одной произвольной модой. Иначе надо использовать принцип суперпозиции с приведенными соотношениями. Обычно в качестве такой моды в ПВ используется основная  $H_{10}$ - волна. В представлении (4), (5) ее амплитуда  $A = 1$ . Образует четыре невязки гранич-

ных условий:

$$\Delta_1(x, y) = \bar{z}_0 \times \left[ \bar{E}(x, y, +0) - \bar{E}(x, y, -0) \right], \quad (8)$$

$$\Delta_2(x, y) = \bar{z}_0 \times \left[ \bar{H}(x, y, +0) - \bar{H}(x, y, -0) \right],$$

$$\Delta_3(x, y) = \bar{z}_0 \times \left[ \bar{E}(x, y, l+0) - \bar{E}(x, y, l-0) \right], \quad (9)$$

$$\Delta_4(x, y) = \bar{z}_0 \times \left[ \bar{H}(x, y, l+0) - \bar{H}(x, y, l-0) \right].$$

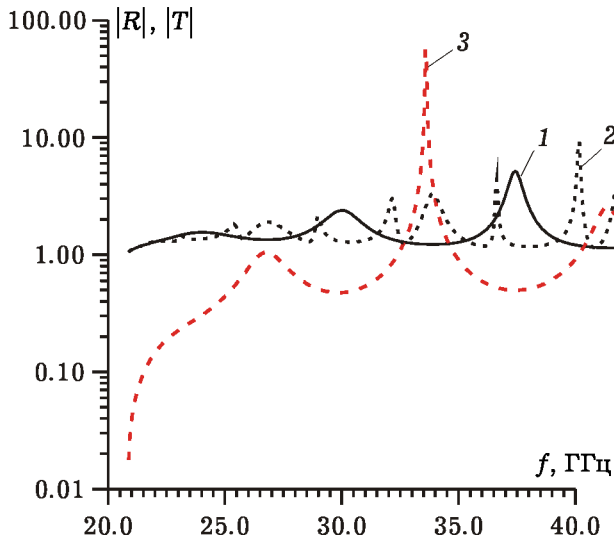
ЭМ-поля берутся из соответствующих соотношений справа и слева от границ сшивания. При подстановке (4)-(7) непосредственно в уравнения Максвелла следует применять проекционные процедуры как к соотношениям (2), (3), так и к невязкам (8), (9), что при усечении числа мод дает неоднородную систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), позволяющую определить все коэффициенты разложения по модам. Здесь удобнее использовать формулировку относительно электрического поля (брать уравнение Гельмгольца), а на границах  $z = 0$  и  $z = l$  сшивать электрические поля и их производные (магнитные поля). Это снижает вдвое размерность. Другой подход - задание полей на апертурах  $z = 0$  и  $z = l$ , что позволяет получить ПИУ.

В работе [11] для анализа линейной задачи использовался метод объемного интегрального уравнения (ОИУ). В качестве базиса брались трехмерные прямоугольные конечные элементы. Представление полей (4) также можно использовать для такого базиса. ОИУ формулируется в виде.

$$\begin{aligned}\bar{E}(\bar{r}) &= \bar{E}^{(0)}(x, y) \exp(-j\gamma^{(0)}z) + \\ &+ \int_V \hat{K}(\bar{r}, \bar{r}') (\hat{\epsilon}(\bar{r}') - \hat{I}) \bar{E}(\bar{r}') d^3 r',\end{aligned}\quad (10)$$

где первое слагаемое в правой части есть поле падающей волны возбуждения, а вид тензорного ядра приведен в нашей работе [10]. Уравнение (10) наиболее общее, поскольку включает случай неоднородных анизотропных сред (соответственно  $\hat{\epsilon}(\bar{r}')$  есть тензор, а  $\hat{I}$  - единичный тензор),  $\hat{\epsilon}(\bar{r}')$  может зависеть от поля, т.е. ОИУ (10) описывает и нелинейный случай. ОИУ (10) достаточно рассматривать в области нахождения включения, т.е. в объеме  $V$ , а затем оно определяет решение во всей области. В частности, после нахождения решения несложно определяются коэффициент отражения  $R^{(0)}$  как коэффициент при функции  $\exp(j\gamma^{(0)}z)$  в области  $z < 0$  и коэффициент прохождения  $T^{(0)}$  как коэффициент при функции  $\exp(-j\gamma^{(0)}(z-l))$  в области  $z > l$ .

С помощью уравнения (10) в работе [10] иссле-



**Рис. 1.** Коэффициенты отражения (1) и прохождения (2) ЭМ-волны для полупроводниковой вставки длины  $l = 30$  мм в ПВ и коэффициент отражения для той же вставки при короткозамкнутом поршне на расстоянии  $d = 4$  мм. Параметры волновода и вставки:  $a = 7.2$  мм,  $b = 3.4$  мм,  $\epsilon_r = 17.0$ ,  $\omega_p = 500$  ГГц,  $\omega_c = -44$  ГГц (модельно)

довано линейное усиление ЭМ-волны в ПВ полупроводниковым элементом, находящимся под воздействием постоянного электрического поля. Элемент частично заполнял ПВ в направлении оси  $x$ , а вдоль оси  $y$  приложено постоянное напряжение. Соответственно, одна из граней изолируется от широкой стенки ПВ. Под действием приложенного сильного электрического поля возникла отрицательная дифференциальная проводимость. В общем случае такая проводимость — тензорная величина. Для симметричного расположения полупроводниковой пластины существенна только компонента  $\sigma_{yy}$ , соответствующая направлению вектора электрического СВЧ- либо КВЧ-поля.

Решением ОИУ (10) в этом случае является функция

$$E_y(x, z) = a^+ \exp(-j\gamma z) + a^- \exp(j\gamma z),$$

где введены обозначения:

$$\gamma = \sqrt{k_0^2 \epsilon - (\pi/a)^2},$$

$$a^+ = 2\gamma_0(\gamma - \gamma_0) / \{(\epsilon - 1)k_0^2 [1 - R_0^2 \exp(-2j\gamma l)]\},$$

$$a^- = a^+ R_0 \exp(-2j\gamma l),$$

$$R_0 = (\gamma_0 - \gamma) / (\gamma_0 + \gamma),$$

$$\gamma_0 = \sqrt{k_0^2 - (\pi/a)^2}.$$

$R_0$  — коэффициент отражения от полубесконечной пластины. Соответственно, для коэффициента отражения и прохождения имеем стандартные выражения  $R = (Z_{in} - 1) / (Z_{in} + 1)$  и  $T = S_{21} = 1 / T_{11}$ , которые аналитически выража-

ются через тригонометрические функции от  $\gamma l$ . В частности,

$$Z_{in} = k_0 (\gamma + j\gamma_0 \operatorname{tg}(\gamma l)) / (\gamma_0 + j\gamma \operatorname{tg}(\gamma l)) / \gamma.$$

Отрицательная проводимость соответствует модели отрицательной частоты столкновений в формуле (1). На рис. 1 приведены результаты численных расчетов для усиления, отражения и прохождения ЭМ-волны для полупроводниковой вставки длины  $l$  с отрицательной проводимостью и такой же вставки при короткозамкнутом ПВ за ней на расстоянии  $d$ . Приведенные результаты хорошо коррелируют с данными работ [26, 27] для частично заполняющей ПВ аналогичной вставки. Они показывают, что имеются частоты, на которых отмечается существенное усиление как прошедшей, так и отраженной ЭМВ.

## 2. Модели нелинейных полупроводниковых включений

Взаимодействие сильной ЭМВ со средой приводит к нелинейным эффектам, которые в электродинамике сплошных сред описываются различными материальными уравнениями (моделями). Известны, например, уравнения в форме Ландау-Лифшица и Казимира, учитывающие временную дисперсию, которые можно рассматривать и в нелинейном случае. Материальные уравнения возникают как результат усреднения по физически бесконечно малому объему движения вещества, т. е. служат заменой уравнений движения. Другой подход состоит в решении кинетического уравнения [16]. В данной работе использован феноменологический подход, позволяющий получать параметры рассеяния из решения только электродинамической задачи. Считаем воздействующее поле гармоническим, а спектральная диэлектрическая проницаемость — функция координат и квадрата электрического поля, тогда материальное уравнение имеет вид

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \epsilon(\vec{r}, \langle \vec{E}^2(\vec{r}, t) \rangle) \vec{E}(\vec{r}, t). \quad (11)$$

Обозначим  $\tilde{u} = \vec{E}^2(\vec{r}, t)$ . Скобка Дирака означает усреднение по времени за период.

Соотношение (11) означает пренебрежение процессами запаздывания (мгновенное установление поляризации). Если воздействует циркулярно поляризованная ЭМВ, то квадрат поля и ДП не зависят от времени [16]. Для полупроводниковой плазмы процессы поляризации вещества не успевают за быстропеременным полем, а ДП зависит от усредненного за период квад-



рата поля  $u = \langle \tilde{u} \rangle$  (скобки означают усреднение за период  $T_0 = 2\pi / \omega$ ) и определяется разогревом вещества, процессами рассеяния, генерации и рекомбинации. Средний квадрат поля есть функция только координат  $z$ . Решение задачи для линейно поляризованной волны в ПВ ищем в виде ( $\vec{y}_0$  – орт-вектор оси  $y$ )

$$\begin{aligned} \vec{E}(x, z, t) &= \vec{y}_0 E(x, z, t) = \\ &= \vec{y}_0 \operatorname{Re} \left[ E(x, z) \exp(j(\omega t - \gamma(z))) \right], \end{aligned} \quad (12)$$

где введено комплексное поле

$$E(x, z) = |E(x, z)| \exp(j\varphi),$$

при этом

$$\langle \vec{E}(x, z, t) \rangle = u(x, z) = |E(x, z)|^2 / 2. \quad (13)$$

Функция  $E(x, z)$  действительна,  $\varphi \equiv 0$ . Комплексная функция

$$\dot{E}(x, z) = E(x, z) \exp(-j\gamma(z))$$

с амплитудой  $E(x, z)$  удовлетворяет волновому уравнению [16]

$$\begin{aligned} \partial^2 \dot{E}(x, z) / \partial x^2 + \partial^2 \dot{E}(x, z) / \partial z^2 + \\ + k_0^2 \varepsilon(x, \omega, u(x, z)) \dot{E}(x, z) = 0, \end{aligned} \quad (14)$$

где ДП может быть комплексной. Далее зависимость от частоты указывать не будем. Слабая нелинейность исследуется разложением ДП в ряд Тейлора по  $u$  в окрестности нуля. Оставляя слагаемые до первого порядка, получим модель Керра. Рассмотрим подобную полевую зависимость ДП при положительном параметре  $p$ :

$$\begin{aligned} \varepsilon(u(z)) &= \varepsilon^{(0)} + \varepsilon^{(2)} u^p(z) = \\ &= \varepsilon^{(0)} + \varepsilon^{(2)} \left( E^2(z) / 2 \right)^p, \end{aligned} \quad (15)$$

а также и более общую феноменологическую зависимость ДП с насыщением

$$\varepsilon(E) = \left[ \frac{\sqrt[p]{\varepsilon^{(0)}} + \sqrt[p]{\varepsilon_\infty} (E / E_0)^p}{1 + r (E / E_0)^q} \right]^s. \quad (16)$$

Безразмерные величины  $\varepsilon^{(0)}$  и  $\varepsilon_\infty$  характеризуют ДП соответственно в бесконечно слабом и сильном полях. Если  $p = q$ , то  $r = 1$ , и в сильном поле ДП достигает значения насыщения  $\varepsilon_\infty$ . При  $q = 0$   $r = 0$ , а в остальных случаях этот параметр произвольный. Величина  $E_0$  соответствует внутреннему характеристическому полю [16,26]. Если  $p = q = 0$  или  $r = \varepsilon_\infty = 0$ , то реализуется линейный случай. Введение феноменологических зависимостей позволяет обойти решение кинетических уравнений при исследовании процессов в полупроводниковой плазме. В работах [26,27] рассмотрены две другие подобные феноменологические модели и неполным методом Галеркина

с использованием решения ДУ на основе МРК исследовано ограничение мощности устройством в виде отрезка прямоугольного волновода с двумя частично заполняющими его поперечное сечение тонкими полупроводниковыми пластинами. Толщина пластин много меньше размера широкой стенки, поэтому уравнения в [26, 27] не жесткие. Далее в (5) будем рассматривать в случае  $p = 1$ . Для моделирования полупроводниковой плазмы в InSb аналогично (1) возьмем ДП в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon(\omega, E) &= \varepsilon_r - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - j\omega_c)} = \\ &= \varepsilon_r - \frac{\omega_{p0}^2 n(E) / n_0}{\omega(\omega - j\omega_{c0} (n(E) / n_0)^\alpha)}, \end{aligned} \quad (17)$$

где  $\omega_p = \omega_{p0} (n / n_0)^{1/2}$  – плазменная частота;  $\omega_c = \omega_{c0} (n / n_0)^{1/2}$  – частота столкновений;  $n$  – концентрация носителей;  $\varepsilon_r$  – относительная диэлектрическая проницаемость кристаллической решетки;  $\alpha$  – феноменологический параметр (в расчетах лежащий в пределах  $1/3 \leq \alpha \leq 3/2$ ). Индекс ноль у введенных величин указывает на их равновесные значения. Параметр  $\alpha$  описывает изменение времени релаксации  $\tau = \omega_c^{-1}$  в зависимости от концентрации основных носителей и может быть определен из решения кинетического уравнения.

Соотношение (17) соответствует однокомпонентной плазме электронов. Для концентрации  $n$  использовались две феноменологические модели зависимости от амплитуды  $E$  электрического поля:

$$n(E) = n_0 / \left[ 1 - \delta \exp \left( - (E_0 / (E_- + E))^v \right) \right], \quad (18)$$

$$n(E) = n_0 \left( 1 + \tilde{\gamma} \exp \left( - (E_0 / (E_- + E))^v \right) \right). \quad (19)$$

Здесь  $\tilde{\gamma} = \beta \exp \left( (E_0 / E_-)^v \right)$ ; постоянная  $E_0$  – характерное поле (кинетический параметр) [23];  $E_-$  – греющее поле постоянного тока, обусловленное приложенным к пластине постоянным напряжением;  $n_0 = n(0)$  – равновесная концентрация электронов;  $\delta$  и  $\tilde{\gamma}$  – параметры нелинейности;  $v$  – феноменологический показатель степени (использовались значения 1,2). Первый случай  $v = 1$  соответствует баллистическому, а второй – диффузионному механизмам рассеяния [16,26]. В соотношениях 2,3 учтена аддитивность постоянного  $E_-$  и СВЧ “греющих” полей. В приведенных численных расчетах использовано значение  $\varepsilon_r = 17 - 0.01j$ , соответствующее

кристаллу InSb в отсутствие свободных носителей. При  $E_- = 0$  положительный параметр  $(1 - \delta)^{-1}$  характеризует увеличение концентрации при насыщении в режиме большого сигнала по сравнению с  $n_0$  (обычно  $\delta \sim 1$ ). Для этой модели в численных расчетах использованы значения:  $\delta = 0.9$ ,  $E_0 / E_- = 1$ ;  $\delta = 0.99$ ,  $E_0 / E_- = 0.30872$ ;  $\delta = 0.999$ ,  $E_0 / E_- = 0.32305$ . В первом, втором и третьем случаях при насыщении отношение  $n / n_0$  соответственно равно 10,  $10^2$  и  $10^3$ . В модели использовано значение отношения  $E_0 / E_- = 3$ . Бралась значения  $\beta = 2$  и  $\beta = 9$  (соответственно трехкратное и десятикратное увеличение концентрации носителей при разогреве только постоянным полем). Для этих двух случаев в режиме насыщения имеем  $n / n_0 = 1.62 \cdot 10^4$  и  $n / n_0 = 8 \cdot 10^7$ . При  $E = E_-$  соответственно имеем  $n / n_0 = 1709$  и  $n / n_0 = 7687$ . Рассмотрена также и модель (2) при  $\delta = \exp((E_0 / (2E_-))^v) \gg 1$ , т. е. при  $E_0 > 2E_-$ ,  $v = 2$ , модель (2) применима только для  $E < E_-$ . Во всех моделях в отсутствие СВЧ-поля постоянное греющее поле вызывает рост концентрации по сравнению с равновесной в несколько раз, а при большом сигнале – на несколько порядков. При амплитуде  $E \sim E_-$  наступает режим большого сигнала (сильно нелинейный режим), при котором концентрация возрастает на несколько порядков. В режиме большого сигнала имеем  $\omega_c \gg \omega$ , и соотношение (1) может быть записано с использованием низкочастотной проводимости  $\sigma_0(E) = \varepsilon_0 \omega_p^2 / \omega_c$  в виде  $\varepsilon(\omega, E) = \varepsilon_r - j\sigma_0(E) / (\omega \varepsilon_0)$ . Указанная проводимость зависит от амплитуды поля нелинейно  $\sigma_0(E) = \varepsilon_0 [n(E)]^{1-\alpha} \omega_{p0}^2 / \omega_{c0}$ , а  $\sigma(\omega, E)$  в общем случае подчиняется формуле Друде. В режиме большого сигнала считаем проводимость не зависящей от частоты, при этом в случае  $\alpha < 1$  она возрастает с ростом амплитуды поля и достигает насыщения, а при  $\alpha > 1$  – убывает. При  $\alpha = 1$  имеем линейный режим и при малом, и при большом сигналах, а нелинейность имеет место только в промежуточном случае.

Другой феноменологический метод введения нелинейных материальных уравнений может быть основан на представлении плотности тока как функции поля, включая и диффузионную компоненту тока [25].

### 3. Анализ нелинейной дифракции

Не ограничивая общность, рассмотрим дифракцию основной  $H_{10}$ -волны на полупроводниковой вставке высоты  $b$ . Для нелинейной диф-

ракции использовать стандартные сеточные методы и МКЭ проблематично, т. к. необходимо задавать начальные распределения полей на входном или выходном сечениях, которые зависят от амплитуды падающей волны и неизвестны. Можно использовать непосредственно ДУ (14) для единственной компоненты поля  $E_y = \dot{E}(x, z)$  и искать решение в виде

$$\dot{E}(x, z) = \sum_{m=1}^M a_m E_m(z) \sin(m\pi x / a). \quad (20)$$

Подставляя (20) в (14) и проектируя на функции  $\sin(m\pi x / a)$ , получим систему обыкновенных ДУ:

$$d^2 E_m(z) / dz^2 + k_0^2 \sum_{k=1}^M A_{mk}(z) E_k(z) - (m\pi / a)^2 E_m(z) = 0. \quad (21)$$

Здесь матрица  $A$ , имеющая матричные элементы

$$A_{mk}(z) = \frac{2}{a} \int_0^a \varepsilon(x, u(x, z)) \times \sin(m\pi x / a) \sin(k\pi x / a) dx. \quad (22)$$

$u(x, z)$  – квадрат модуля величины (20).

Интегрируя уравнение (21) дважды в пределах от нуля до  $z$ , получаем систему зацепляющихся ИУ:

$$E_m(z) = E_m(0) + E'_m(0)z - k_0^2 \int_0^z \int_0^{z'} dz'' \times \left[ A(z'') E(z'') - (m\pi / a)^2 E_m(z'') \right], \quad (23)$$

где  $E(z)$  – вектор-столбец, а штрих означает производную по  $z$ . В данной задаче можно решать связанные ИУ (23) либо ДУ (21). Неизвестные коэффициенты в  $a_m$  в (20) определяем из сшивания электрического поля и его производных при  $z = 0$  и  $z = l$ . При этом образуются невязки типа (8), (9). ЭМ-поле слева и справа представим в виде

$$E(x, z) = A \sin(\pi x / a) \exp(-j\gamma_{10} z) [1 + R_1] + A \sum_{m=2}^M R_m \sin(\pi x / a) \exp(j\gamma_{m0} z), \quad (24)$$

$$E(x, z) = A \sum_{m=1}^M T_m \sin(\pi x / a) \times \exp(-j\gamma_{m0} (z - l)). \quad (25)$$

Здесь  $\gamma_{m0} = \sqrt{k_0^2 - (m\pi / a)^2}$ , а  $R_1 = R$  – коэффициент отражения. Образуются невязки  $\Delta_1, \Delta_2$  для поля и его производной при  $z = 0$ , а также аналогичные невязки  $\Delta_3, \Delta_4$  при  $z = l$ . Построим

также полную невязку  $\Delta = \Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 + \Delta_4^2$ , зависящую от коэффициентов  $a_m$  амплитуды  $A$ , коэффициентов  $R_m$  и  $T_m$ . Задача состоит в многократном решении уравнений (21) или (23) с минимизацией невязки  $\Delta$ . Указанную минимизацию можно поводить стандартными методами, а также и итерационными методами типа спуска. При попадании в окрестность сходимости целесообразно использовать метод минимальных невязок или наискорейший спуск. Данный подход соответствует неполному методу Галеркина. Для полного метода Галеркина берем разложения типа (2) или (3) с соответствующими функциями типа  $\vec{E}_n(x, y)\exp(\pm j\gamma_n z)$ . Для метода моментов продольную зависимость у весовых функций удобно взять в виде полной системы функций рядов Фурье, например,  $\cos(k\pi z / l)$ . Так, для однородной по  $y$  вставки с высотой  $b$  имеем систему функций  $\sin(m\pi x / a)\cos(k\pi z / l)$ . Методы Галеркина и моментов сводятся к системе нелинейных алгебраических уравнений, связанных посредством матриц, элементы которых вычисляем численно. Необходимо минимизировать невязки типа (8), (9), многократно решая указанную систему уравнений. Удобнее строить глобальную невязку уравнения и условий сопряжения и минимизировать ее одновременно. Для этого наиболее подходят итерационные методы типа спуска. Вначале можно использовать методы типа пристрелки с несколькими начальными значениями. При достижении области сходимости (при попадании в соответствующую окрестность решения, в которой относительная невязка мала) выполняется принцип сжимающих отображений, и желательно переходить к методам типа Ньютона-Рафсона (наискорейшего спуска). Но размерность такой задачи и алгоритмическая сложность больше, чем в неполном методе Галеркина. Последний предпочтителен и потому, что методы решения обыкновенных ДУ даже в случае жестких задач хорошо разработаны [20].

Другой универсальный подход при нелинейной дифракции - метод ОИУ, в форме (10) с зависимостью диэлектрической проницаемости от среднего квадрата модуля электрического поля метод приводит к системе нелинейных алгебраических уравнений. Поэтому возникает проблема решения указанных систем таких уравнений [33], что сложнее интегрирования систем обыкновенных ДУ.

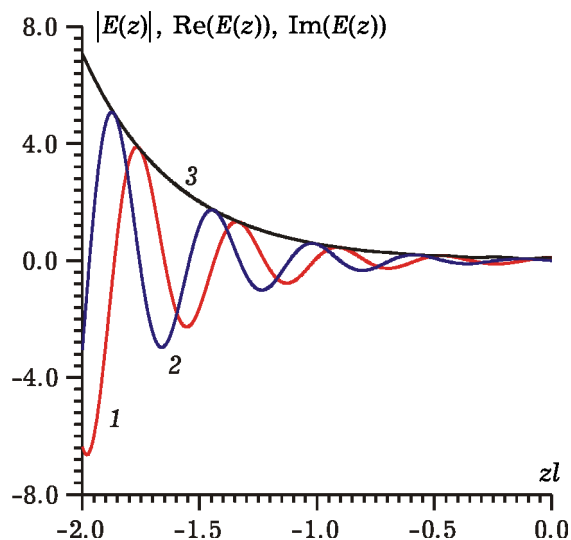
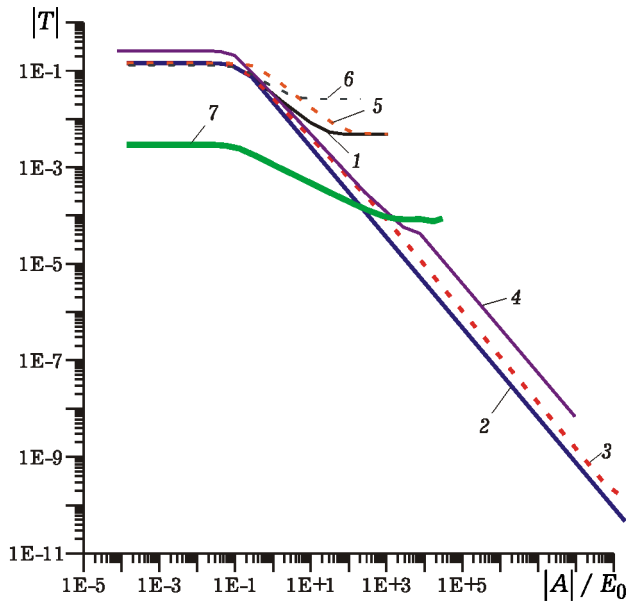


Рис. 2. Рассчитанные зависимости реальной части (1), мнимой части (2) и модуля (3) электрического поля от продольной координаты для полностью заполняющей ПВ полупроводниковой пластины с ДП, описываемой по модели (16), при параметрах:  $A / E_0 = 14$ ,  $k_0 l = 10$ ,  $n_\infty = 100$ ,  $\omega = 150$ ,  $\omega_{0p} = 300$ ,  $\omega_{0c} = 100$  ГГц

#### 4. Численные результаты

В работах [26,27] теоретически исследовано ограничение сильной ЭМВ двумя тонкими полупроводниковыми слоями в ПВ с двумя зависимостями (18) и (19) концентрации основных носителей заряда от поля. Было показано, что ограничение в области применимости указанных формул слабо зависит от их вида, а его уровень определяется в основном внутренним и постоянным полями. Показано также, что ЭМ-поле в продольном направлении затухает быстрее, чем по экспоненте. Численные результаты рис. 2-4 получены методом Штермера седьмого порядка с началом по методу Рунге-Кутты и с применением процедуры Эйткена улучшения сходимости по трем шагам. При  $k_0 l = 10$  использовано 3000 точек. Решение осуществлялось обратным вычислительным проходом с минимизацией невязок граничных условий методом итераций. Использовался метод спуска по нескольким переменным с последующим применением метода Ньютона-Рафсона. На рис. 2 представлены результаты распределения реальной и мнимой частей, а также модуля поля полного поля для полупроводниковой пластины, полностью заполняющей сечение ПВ  $a = 7.2$ ,  $b = 3.4$  мм. Использована модель (16), (17) при  $s = 1$ ,  $\alpha = 1$ . В данном случае из-за нелинейности точного решения не существует, поскольку возникают высшие типы волн. В расчетах учтены первые пять типов волн  $H_{m0}$  с нечетными индексами  $m$ .

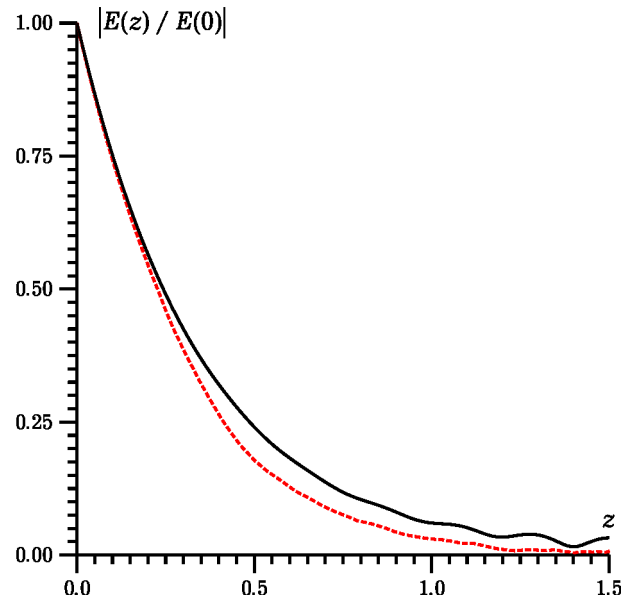


**Рис. 3.** Ограничение мощности ЭМ-волны полупроводниковой пластиной на длине  $l = 2$  см в плоскопараллельном волноводе при различных параметрах:  $\alpha = 1$  (1,4-7),  $\alpha = 0.5$  (2),  $\alpha = 0.8$  (3) и  $n_{\infty} = 100$  (1-4,6,7),  $n_{\infty} = 10$  (5), а также различных малосигнальных значений плазменной частоты  $\omega_{0p} = 300$  (1-3,5,6),  $\omega_{0p} = 500$  (7) и частоты столкновений  $\omega_{0c} = 100$  (1-3,5,7),  $\omega_{0c} = 50$  (4),  $\omega_{0c} = 150$  (6) ГГц. Использованы параметры:  $\omega = 150$  ГГц,  $k_0 d = 10$

На рис. 3 представлены результаты ограничения ЭМВ в плоскопараллельном волноводе. Этот случай соответствует дифракции (туннелированию) плоской ЭМ-волны. Результаты распределения поля в ПВ с двумя и тремя тонкими пластинами даны на рис. 4. Использованы параметры, соответствующие работе [26] для материала  $\text{InSb}$  при температуре  $T = 77^\circ\text{K}$ , и модель (19). Видно, что использование трех полупроводниковых элементов позволяет увеличить ослабление ЭМ-волны по сравнению с двумя элементами той же суммарной толщины.

### Заключение

В работе рассмотрены и развиты методы решения задач нелинейной дифракции сильной ЭМ-волны на твердотельных элементах в волноводах. Электродинамический анализ проведен на примере полупроводниковых элементов в прямоугольном волноводе, которые моделируются как твердотельная плазма с зависимостью концентрации основных носителей заряда от амплитуды ЭМ-волны. Развита проекционный неполный метод Галеркина, рассмотрены методы типа Галеркина, моментов, метод объемного интегрального уравнения, а также итерационные методы получения решения. Получены результаты по ограничению мощности сильной ЭМ-волны



**Рис. 4.** Нормированное затухание модуля полного ЭМ поля вдоль длины ПВ с двумя толщиной по 150 мкм (сплошная кривая) и тремя - толщиной вдоль широкой стенки ПВ по 100 мкм каждая (штриховая кривая) тонкими полупроводниковыми элементами, продольная длина элементов 1.5 см. Расстояние между двумя элементами 0.24 см, а между тремя элементами - последовательно по 0.18 см

полупроводниковыми вставками в ПВ, частично или полностью заполняющими его поперечное сечение. Наилучшие результаты по ограничению имеют место для двух и особенно - трех тонких параллельных вставок, частично заполняющих ПВ. В этом случае отражение относительно невелико, а ограничение происходит в основном из-за нелинейного затухания при взаимодействии ЭМ-волны с полупроводником. Уровень ограничения не сильно зависит от механизма рассеяния носителей и определяется в основном внутренним полем и постоянным греющим полем. Решение рассмотренных нелинейных задач может быть обобщено и для нестационарных случаев, которые соответствует дифракции квазистационарных волновых пакетов (импульсов).



## Литература

- Бреббия К., Телес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов. М.: Мир, 1987. 524с.
- Muller C. Foundation of the mathematical theory of electromagnetic waves. Berlin: Springer-Verlag, 1969.
- Хижняк Н.А. Интегральные уравнения макроскопической электродинамики. Киев. Наукова думка, 1986. 280 с.
- Самохин А.Б. Интегральные уравнения и итерационные методы в электромагнитном рассеянии. М.: Радио и связь, 1998. 160 с.
- Неганов В.А., Нефедов Е.И., Яровой Г.П. Полосково-щелевые структуры сверх- и крайневых частот. М.: Физматлит, 1996. 304 с.
- Хенл Х., Мауэ А., Вестпфаль К. Теория дифракции. М.: Мир, 1964. 428 с.
- Вычислительные методы в электродинамике / под ред. Р.Миттры. М.: Мир, 1977. 486 с.
- Davidovich M.V. Regularization of kernels for volume integral equations // Modeling in applied electromagnetics and electronics. Saratov University Press. 2006. Issue 7. P. 30–38.
- Давидович М.В. Фотонные кристаллы: функции Грина, Интегро-дифференциальные уравнения, результаты моделирования // Известия вузов. Радиофизика. 2006. Т. 49. № 2. С. 150–163.
- Альтшулер Е.Ю., Давидович М.В. Математическое моделирование дифракции электромагнитной волны на полупроводниковой пластине в прямоугольном волноводе // Радиотехника и электроника. 2004. Т. 49. № 11. С. 1344–1349.
- Давидович М.В. Метод конечных элементов в пространственно-временной области для нестационарной электродинамики // ЖТФ. 2006. Т. 76. Вып. 1. С. 13–23.
- Mayergoyz I.D. Some remarks concerning electromagnetic potentials // IEEE Trans. 1993. V. Magn.-29. No. 2. P. 1301–1305.
- Doncker P.D. A potential integral equations method for electromagnetic scattering by penetrable bodies // IEEE Trans. 2001. V. AP-49. No. 7. P. 1037–1042.
- Sarma M.S. Potential functions in electromagnetic field problems // IEEE Trans. 1970. V. Magnet. 6. No. 3. P. 513–518.
- Каханер Д., Моулер К., Нэщ, С. Численные методы и программное обеспечение. М.: Мир, 1998. 576 с
- Басс Ф.Г., Гуревич Ю.Г. Горячие электроны и сильные электромагнитные волны в плазме полупроводников и газозового разряда. М.: Наука, 1975. 400 с.
- Миронов В.А. О нелинейном просветлении плоского плазменного слоя // Изв. вузов. Радиофизика. 1971. Т. 14. С. 1450–1452.
- Литвак А.Г. Динамические нелинейные электромагнитные явления в плазме / Вопросы теории плазмы. Вып. № 10. М.: Атомиздат, 1980. С. 164–242.
- Исаков М.В., Пермяков В.А. Численный анализ распространения Н-волны в прямоугольном волноводе с включением нелинейного диэлектрика // Известия вузов. Радиофизика. 1988. Т. 31. № 9. С. 1139–1140.
- Глуценко А.Г. Теория волноведущих структур СВЧ с нелинейными пленками // Изв. вузов. Радиофизика. 1988. Т. 31. № 9. С. 1098–1103.
- Никогосян А.С. Генерация УКИ миллиметрового и субмиллиметрового диапазонов в волноводе, частично заполненном нелинейным кристаллом // Квантовая электроника. 1988. Т. 15. № 5. С. 969–971.
- Молотков И.А., Вакуленко С.А. Сосредоточенные нелинейные волны. Л.: Изд-во Ленинградск. ун-та, 1988. 240 с.
- Голованов О.А. Электродинамический анализ нерегулярных волноводов и резонаторов с нелинейными средами // Радиотехника и электроника. 1990. Т. 35. № 9. С. 1853–1863.
- Неганов В.А., Осипов О.В., Раевский С.Б., Яровой Г.П. Электродинамика и распространение радиоволн: Учебное пособие для вузов / под ред. проф. Неганова В.А. М.: Радио и связь, 2005. 648 с.
- Макеева Г.С., Голованов О.А. Электродинамический анализ взаимодействия электромагнитных волн с нелинейными гиромангнитными включениями в волноведущих структурах // Радиотехника и электроника. 2006. Т. 51. № 3. С. 261–267.
- Альтшулер Е.Ю., Давидович М.В. Дифракция сильной электромагнитной волны на полупроводниковых элементах в прямоугольном волноводе // Успехи современной радиоэлектроники. 2008. № 10. С. 39–46.
- Альтшулер Е.Ю., Давидович М.В. Нелинейная дифракция электромагнитной волны на полупроводниковом элементе в прямоугольном волноводе // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2008. Т. 11. № 4. С. 64–69.
- Тихоновров А.В., Трубецков М.К. Новые задачи многослойной оптики // РЭ. 2005. Т. 50, № 2. С. 265–272.
- Голант Е.И., Голант К.М. Новый метод расчета спектра и радиационных потерь вытекающих мод многослойных оптических волноводов // ЖТФ. 2006. Т. 86. Вып. 8. С. 99–106.
- Свешников А.Г. К обоснованию метода исследования распространения электромагнитных колебаний в нерегулярных волноводах // ЖВМ и МФ. 1963. Т. 3. № 2.
- Никольский В.В. Вариационные методы для внутренних задач электродинамики. М.: Наука, 1967. 460 с.
- Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. М.: Физматгиз, 1962.
- Ортега Дж., Рейнболдт В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. М.: Мир, 1975. 558 с.
- Гольдштейн Л.Д., Зернов Н.В. Электромагнитные поля и волны. М.: Соврадио, 1971. 654 с.

## Mathematical modeling of waveguide systems with semiconductor elements: nonlinear and diffraction phenomenon

*E.U. Altshuler*

The methods of mathematical modeling of nonlinear diffraction in the waveguide structure and the comparative effectiveness of their implementations. Theoretically analyzed the diffraction of electromagnetic waves on the boxes of semiconductor, partially filling the cross section of rectangular waveguide. Based on the results of numerical calculations investigated limit the power of strong electromagnetic wave in a waveguide partially filled with semiconductor plasma in terms of impact ionization (reversible electrical breakdown) of semiconductor material.

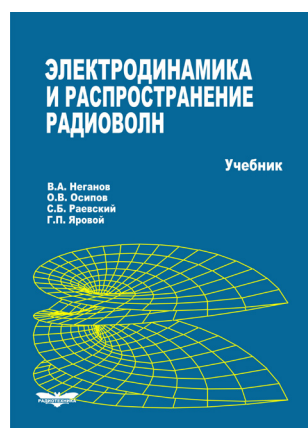


**Альтшулер Евгений Юрьевич**, 1955 года рождения. С отличием окончил физический факультет Саратовского государственного университета. Длительное время работал на различных инженерных, научных и научно-руководящих должностях на научно-производственном предприятии «Алмаз» города Саратова. Известный специалист в области радиопроизводниковой СВЧ-электроники. Кандидат физико-математических наук (с 1991 г.).

В настоящее время - доцент Саратовского государственного университета и Саратовского государственного технического университета. Завершил работу над докторской диссертацией. Область научных интересов: радиопроизводниковая СВЧ-электроника, техника и приборы сверхвысоких частот, нанотехнологии, прикладное математическое моделирование

### Неганов В.А.

**Электродинамика и распространение радиоволн:** учебник / В.А. Неганов [и др.]; под ред. В.А. Неганова и С.Б. Раевского. Изд. 4-е, доп. и перераб. — М.: Радиотехника, 2009. — 744 с., ил.



ISBN 978-5-88070-154-4

УДК 537.87(075.3)

ББК 22.3

Н 41

Учебник

В.А. Неганов  
О.В. Осипов  
С.Б. Раевский  
Г.П. Яровой

Книга написана активно работающими в области электродинамики учеными. Излагаются теория электромагнитного поля с акцентом на радиотехническую электродинамику и анализ волновых процессов; рассматриваются отражение и преломление волн, излучение и дифракция; описываются основные закономерности распространения электромагнитных волн в различных безграничных средах (изотропных, анизотропных, диспергирующих, неоднородных), в направляющих и резонансных структурах, в природных условиях. Обсуждаются

методы математического моделирования в электродинамике, опирающегося на применение ЭВМ.

Отличительной особенностью книги является обсуждение современных проблем электродинамики: расчет электромагнитных волн в ближних зонах излучающих структур (самосогласованный метод расчета), комплексных волн в волноведущих структурах и др.

Предназначается для студентов радиотехнических и радиофизических специальностей вузов, а также инженеров-радиотехников и радиофизиков.

Табл. 5. Ил. 280. Библиогр. 378 назв.