

Моды многослойного концентрического сферического резонатора

М.В. Давидович, Ю.В. Стефюк

Получены характеристические уравнения для экранированного и открытого многослойного концентрического сферического резонатора (КСР), включая случай внешних импедансных сфер. Приведены численные решения для полого КСР с идеально проводящими сферами. Построена теория возбуждения КСР с идеально проводящими сферами точечным радиальным диполем. Итерационным методом получены решения для мод многослойного КСР, включая и открытый случай, на основе чего исследованы резонансы Шумана в системе Земля-ионосфера (СЗИ) и влияние на них высоты слоя Хевисайда и влажности атмосферы.

Введение

Собственные моды сферического резонатора (СР) относятся к устоявшемуся разделу вопросов, посвященных резонаторам СВЧ, и изложены в ряде монографий, например, в [1–4], хотя СР встречаются на практике редко [5]. Указанные изложения основаны на рассмотрении сферических волн [1–4, 6–12]. Моды СР с двумя концентрическими идеально проводящими сферами – концентрического сферического резонатора (КСР) в монографиях не рассмотрены, но были исследованы в работе [13], где корни характеристических уравнений приведены с небольшой точностью (один знак после запятой). В публикации [14] указанные корни и моды КСР определены неверно. Многослойные СР были исследованы в ряде работ как в экранированном случае [15], так и для открытого и экранированного случаев [16–18]. Открытый однородный диэлектрический СР рассмотрен в работе [19]. Хотя характеристическое уравнение и численные результаты в [19] верные, но их трактовка имеет ошибку. Так, в [19] предположено убывание мод на бесконечности. Однако на бесконечности собственные моды возрастают по закону $\exp(-jk_0 r)/r$, $\text{Im}(k_0) = \text{Im}(\omega)/c > 0$ [20] в силу их затухания во времени. При реальном нестационарном возбуждении, длящемся конечное время, такого возрастания нет: поля резонатора малы в области фронта предвестника $r = ct$ и равны нулю перед ним. Приведенному в [19] уравнению удовлетворяют решения с асимптотиками $\exp(\mp jk_0 r)/r$. Решение задачи о возбуждении диэлектричес-

кой сферы плоской волной получено Ми и изложено в ряде монографий (например, [2, 6, 11]). Возбуждение проводящей сферы внутренним и внешним диполями приведено в [7, 8], а в работе [21] рассмотрена функция Грина (ФГ) для сферы. Имеются публикации по дифракции на многослойных, неоднородных и анизотропных телах сферической формы, а также по распространению волн в сферическом волноводе СЗИ [22–30]. Распространение радиоволн вдоль приземных трасс рассмотрено в [31]. Колебания в СЗИ анализировались в работах [32–39], в том числе и открытые Отто Шуманом в 1949 г. резонансы на частотах в несколько герц [32–37, 40]. СР нашли применение в нанотехнологиях (СР с брэгговской оболочкой) и для контроля плазменных колебаний [41, 42].

Решение задачи о возбуждении волноводов и резонаторов сводится к построению функции Грина (ФГ) или резольвенты соответствующего оператора [43]. Если задача самосопряженная, то существует не более чем счетный набор собственных значений без точек сгущения в конечной области и соответствующие системы собственных функций, которые полны. При этом в резольвенте имеются действительные полюса. Реальные волноводы и резонаторы имеют потери, т. е. их частоты и волновые числа комплексные, а краевые задачи несамосопряженные. Их моды называют квазисобственными. Они не пригодны для построения теории возбуждения открытых структур. Ее следует строить на основе собственных функций самосопряженных задач. Между экранированными и открытыми структурами нет глухой стены: при очень высоких частотах возникают радиационные потери сквозь оболоч-

М.В. Давидович, Ю.В. Стефюк

г. Саратов, Саратовский государственный университет

ку. Разложение по квазисобственным модам известно как теория возбуждения Вайнштейна [1]. Хотя уравнение для частот многослойного КСР аналогично уравнению СР, в известной автору литературе оно не рассмотрено.

Цель данной работы – получение и анализ характеристического уравнения многослойного КСР, включая неоднородное заполнение и импедансные условия на сферах, а также получение уравнений стационарного возбуждения идеального экранированного КСР. В работе также рассматривается возможность нелинейного плазменного пробоя в КСР, соответствующего СЗИ. Для сверхнизкочастотных колебаний (СНЧ) нижнюю границу ионосферы можно считать резкой с малым по модулю импедансом. Это же относится и к земной поверхности. В СЗИ отдельно можно рассматривать высокочастотные квазисобственные моды. Для многослойной модели ионосферы применен импедансный подход. Проведен анализ возможности накопления энергии колебаний в таком КСР под действием атмосферного электричества. Исследованы СНЧ резонансы Шумана, сильно влияющие на альфа-ритмы мозга и состояние человека.

1. Модель многослойного КСР

КСР представляет собой две концентрические сферы радиусов $r = a$ и $r = b$ ($a < b$), пространство между которыми заполнено средой с проницаемостями ϵ_i , μ_i , $i = 1, 2, \dots, N$. Слой i такого N -слойного КСР характеризуется радиусами $r_{i-1} \leq r \leq r_i$, причем $r_0 = a$, $r_N = b$. Переход к резонатору, заполненному радиально-неоднородной средой, может быть осуществлен в пределе при $N \rightarrow \infty$. Переход к многослойному СР осуществляется при $a = 0$. Анализ выполним как при идеальных нулевых импедансных условиях на сферах, так и при заданных поверхностных импедансах. Если считать, что последний слой имеет резкую границу, то он нагружен на соответствующий импеданс вакуума. Реально ионосфера начинается с высоты 50 км на границе стратосферы, где появляется достаточная проводимость для выравнивания потенциала по всей сферической поверхности [44]. Высокопроводящий и отражающий СНЧ-радиоволны слой на высоте 80 км известен как слой Хевисайда. Далее проводимость достигает максимума на высоте примерно 300 км, а затем начинает спадать [45].

Рассмотрение многослойного КСР имеет как

самостоятельный технический интерес, так и связано с изучением ряда природных явлений. Вплоть до декаметрового диапазона радиоволн ионосферу в приближении однокомпонентной плазмы можно считать многослойной средой с высокими низкочастотными проводимостями $\sigma_0 = \epsilon_0 \omega_p^2 / \omega_c$ в слоях (при $\omega \ll \omega_c$) и с отрицательными действительными частями диэлектрических проницаемостей (при $\omega_p^2 > \omega^2 + \omega_c^2$). Здесь ω_p – плазменная частота, ω_c – частота столкновений, σ_0 – проводимость при постоянном токе. В определенной области частот может иметь место практически полное отражение радиоволн от некоторых слоев, а также и от земной поверхности в силу наличия влаги в почве, поверхности океанов и других водоемов, а также присутствия в воде и почве ионов проводимости [45]. Многослойный концентрический характер имеет и тропосфера. Отдельным слоем считаем стратосферу. В них диэлектрическая проницаемость близка к единице. Каждый день на Земле происходит около 300 гроз [26,44,46–48], разряды молний которых имитируют радиальные электрические диполи (на Землю приходится около 80% разрядов). Они как минимум по несколько десятков раз в секунду в широком диапазоне возбуждают КСЗ в виде СЗИ. Почти каждая из молний представляет собой несколько разрядов в секунду по пробитому каналу [44]. В такой системе возможен широкий спектр квазисобственных колебаний: СНЧ, ультранизкочастотных (УНЧ), а также колебаний верхней части килогерцового и мегагерцового диапазонов. При возбуждении резонансные кривые пересекаются и имеется непрерывный спектр [20], проявляющийся сильнее для высоких частот. Возбуждение СЗИ молниями является нестационарным, в котором ток можно аппроксимировать временными зависимостями $\sum_i A_i \delta(t - t_i)$ (или наборами экспонент [37]). Решать эту задачу сложно, поэтому ниже использован стационарный подход с учетом только конечного числа квазисобственных мод, для которых ионосфера и Земля представляют резкие импедансные поверхности. Именно эти моды могут накапливать энергию от разрядов молний и образовывать плазменные пробои, и только такие процессы можно считать квазистационарными. Задача о нестационарном возбуждении экранированного и открытого резонаторов строго рассмотрена в работах [49–51]. УНЧ-колебания, называемые

атмосферами, влияют на низкочастотную радиосвязь [47,48]. Низшие СНЧ-моды соответствуют резонансам Шумана.

2. Однородный экранированный КСР

Рассмотрим КСР, заполненный однородной средой с проницаемостями ε и μ . Электрические и магнитные моды описываются функциями Борнгиса $U_{nm}^{(e,h)}(r, \theta, \varphi)$ или потенциалами Дебая $u_{nm}^{(e,h)} = U_{nm}^{(e,h)}(r, \theta, \varphi) / r$ [1,2,6,9]. Для электрических мод имеем:

$$E_r = \frac{n(n+1)}{r} u_{nm}^e, \quad E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r u_{nm}^e)}{\partial \theta \partial r}, \quad (1)$$

$$E_\varphi = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2 (r u_{nm}^e)}{\partial \varphi \partial r},$$

$$H_r = 0, \quad H_\theta = \frac{j\omega \varepsilon_0 \varepsilon}{r \sin \theta} \frac{\partial (r u_{nm}^e)}{\partial \varphi}, \quad (2)$$

$$H_\varphi = -\frac{j\omega \varepsilon_0 \varepsilon}{r} \frac{\partial (r u_{nm}^e)}{\partial \theta}.$$

Для магнитных мод в этих формулах следует сделать замены $e \leftrightarrow h$, $\vec{E} \leftrightarrow \vec{H}$. Если имеем полый КСР, то $\varepsilon = \mu = 1$. Функции Борнгиса удовлетворяют следующим условиям, эквивалентным однородным уравнениям Максвелла:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + k_0^2 \varepsilon \mu - \frac{n(n+1)}{r} \right] U_{nm}^{(e,h)} = 0, \quad (3)$$

$$\left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + n(n+1) \right] U_{nm}^{(e,h)} = 0, \quad (4)$$

где

$$u_{nm}^{(e,h)}(r, \theta, \varphi) = P_n^m(\cos \theta) \exp(-jm\varphi) \Psi_n^{(e,h)}(kr),$$

$$k = k_0 \sqrt{\varepsilon \mu} = \omega \sqrt{\varepsilon \mu} / c,$$

а потенциалы Дебая – волновому уравнению. Функции $\Psi_n^{(e,h)}$ удовлетворяют уравнению сферических функций Бесселя [1,7] с полуцелым индексом. Уравнению (4) удовлетворяют присоединенные функции Лежандра, т. к. потенциалы пропорциональны $\exp(-jm\varphi)$, а двойное дифференцирование по азимуту в (4) дает $-m^2$. Функции $\Psi_n^{(e,h)}$ следует взять в виде

$$\Psi_n^{(e)}(kr) = v'_n(ka) \psi'_n(kr) - \psi'_n(ka) v'_n(kr), \quad (5)$$

$$\Psi_n^{(h)}(kr) = v_n(ka) \psi_n(kr) - \psi_n(ka) v_n(kr),$$

где

$$\psi_n(kr) = \sqrt{\pi / (2kr)} J_{n+1/2}(kr) \text{ и}$$

$$v_n(kr) = \sqrt{\pi / (2kr)} N_{n+1/2}(kr)$$

– сферические функции Бесселя и Неймана, а

штрих означает производную. При этом поля (1), (2) удовлетворяют условию электрической стенки при $r = a$. Характеристические уравнения для определения резонансных частот при условии электрической стенки при $r = b$ имеют вид

$$\Psi_n^{(e)}(kb) = 0, \quad \Psi_n^{(h)}(kb) = 0. \quad (6)$$

Собственные колебания для условий (6) являются $2n+1$ кратно вырожденными, т. е. имеющими одну и ту же частоту при $-n \leq m < n$. Приведенные соотношения можно записать через векторы Герца или вектор-потенциалы (электрический и магнитный), направленные вдоль орт-вектора $\vec{r}_0 = \vec{r} / r$, т. е. положить, например, $\vec{A}^{(e,h)} = \vec{r}_0 U_{nm}^{(e,h)}$. Тогда поля выражаются в виде простых соотношений (1.29), приведенных в [7]. Надо иметь в виду, что вектор \vec{r}_0 не сохраняет своего направления в пространстве, поэтому для данной моды существует бесконечное количество свободных колебаний с различными ориентациями радиальной компоненты электрического (для E -мод) и магнитного (для H -мод) полей. В случае $a = 0$ соотношения (5) должны быть конечными, поэтому необходимо $\psi'_n(kb) = 0$ для E -мод и $\psi_n(kb) = 0$ для H -мод. При $n = 1$ имеем

$$\psi_1(kb) = \sin(kb) / (kb)^2 - \cos(kb) / (kb) = 0. \quad (7)$$

Первый ненулевой корень уравнения (7) есть $x_1 \approx 4.5$ [1]. Первый корень уравнения $\psi'_n(x) = 0$ имеет приближенное значение 2.744. В монографии [4] электрические и магнитные моды СР перепутаны. Обозначим $a/b = \alpha < 1$. В таблице 1 даны значения первых корней уравнений (6) при $n = 1$. Видно, что в случае $\alpha \rightarrow 0$ (отсутствие внутренней сферы) они соответствуют модам СР. E -моды более низкочастотные по сравнению с H -модами, при этом их частоты при $n = 1$ падают по сравнению с модами СР, а при $n > 1$ возрастают. Частоты H -мод всегда выше частот соответствующего СР и частот E -мод КСР. При $a \rightarrow b$ ($\alpha \rightarrow 1$) резонатор на низших модах становится квазистатическим в виде плоскопараллельного волновода, свернутого по сферической поверхности, и для магнитных мод корень находится из уравнения $v'_1(x) \psi_1(kr) - \psi'_1(x) v_1(x) = 0$. Аналогично записывается уравнение для электрических мод. При $a \approx b$ для корней высокого порядка имеем приближение $x_{nl} = l\pi / (1 - \alpha)$, $n \ll l$. При малом зазоре $1 - \alpha$ вдоль окружности укладывается чуть больше длины волны основной моды. Величине $\alpha = 0.95522$ соответствует КСР в виде земного шара и отражающего слоя атмосферы на высоте примерно 300 км ($a = 6368$ км).

Низшие частоты при этом имеют порядок 10 Гц. Им соответствуют резонансы Шумана на частотах 8–10, 16–17, 20–24 Гц. Низшая частота резонанса Шумана 7.83 Гц была точно определена после многочисленных исследований. Из-за неидеальности, связанной с суточными ритмами, флуктуациями плотности ионосферы и атмосферы, наиболее четко наблюдаются пики на частотах примерно 8, 14, 20, 26, 32 Гц. На более высоких частотах резонансы перекрываются. Для основной частоты возможны вариации в пределах 7–11 Гц, но обычно разброс лежит в пределах $\pm(0.1-0.2)$ Гц. Спектральная плотность колебаний составляет 0.1 мВ/м и длится 0.3–3 с, реже – до 30 с. Заметим, что частота 7.49 Гц получается как обратное время, необходимое волне для прохода в вакууме расстояния, равного среднему периметру Земли 40008.5 км. По данным таблицы, считая СЗИ пустым КСР, образованным идеально проводящей поверхностью Земли и сферой на высоте 300 км, получим частоту 10.355 Гц. Если взять высоту 80 км, то будет 10.176 Гц. Снижение указанной частоты произойдет, если учесть влагосодержание атмосферы, конечность глубины проникновения и то, что происходит частичное отражение волн на меньших высотах. Для возбуждения таких колебаний достаточной интенсивности нужна большая мощность, т. к. глубины проникновения как сквозь ионосферу, так и внутрь земли достаточно большие, а добротности не очень высоки. Так, глубина проникновения δ в морскую воду ($\sigma_0 \sim 4$ С/м) имеет порядок 80 м, а для ионосферы со средней проводимостью $\sigma_0 = 2.2$ С/м (для $\omega_p = 50$ МГц и $\omega_c = 10$ кГц) она равна 106 м. Далее для ионосферы с ростом частоты δ падает и в диапазоне от 3 кГц до 4 МГц равна примерно 6 м. Затем она резко растет и достигает значения 57 км при $f = 10$ МГц. Для морской воды в указанном диапазоне она падает от 45 до 8 см на 10 МГц. Для строгого анализа таких колебаний нужен учет многослойного характера атмосферы и задание конечных импедансов при $r = a$ и $r = b$. Так, на нижней границе ионосферы на высоте 50 км ($\sigma_0 = 2.2 \cdot 10^{-7}$ С/м для $\omega_p = 500$ кГц и $\omega_c = 10^7$ Гц) для частот от 10 Гц до 100 кГц глубины проникновения изменяются от $3.4 \cdot 10^5$ м до $2.4 \cdot 10^4$ м соответственно. Добротность атмосфериков с частотой до 1 кГц не очень высокая. Достаточно добротные колебания с высокой энергией могут быть в диапазоне от нескольких кГц до десятков МГц. Таких резонансных частот мно-

го. Ограничившись сверху частотой $f = 10$ МГц, получаем $N \sim 3 \cdot 10^5$. Тогда число электрических мод (с учетом азимутальных и радиальных вариаций) имеет порядок 10^{10} . Магнитными модами можно пренебречь, т. к. они очень слабо возбуждаются. Средняя мощность атмосферного электричества равна 700 МВт [44]. Исходя из нее при равномерном распределении энергии по модам, имеем минимальную оценку для напряженности электрического поля в пучностях мод $E \sim 0.001$ В/м. Горизонтальная неоднородность поля в высших модах на поверхности земли порядка 400 м, а вертикальная неоднородность порядка 5 м. При одновременном воздействии нескольких десятков разрядов молний может накопиться энергия, приводящая к локальному плазменному пробоя. Если $n \sim 10^4$ и $l \sim 10^5$, моды высокого порядка удовлетворяют соотношению $x_i \approx x'_i = k_i b = i\pi / (1 - \alpha)$, $i \gg n$, следующему из асимптотических свойств функций Бесселя. После разряда молнии величина напряженности поля плазменного пробоя падает на несколько порядков. Кроме вариаций по меридиональному и азимутальному углам возможны различные ориентации направления оси z' отсчета азимута мод, что при хаотическом сложении может приводить к возникновению локальных пучностей поля порядка нескольких метров и даже дециметров. Вероятность сложения с образованием пробоя мала, а наблюдаются такие явления редко.

В работе [52] предположено образование и поддержание шаровых молний за счет ВЧ-излучения, а в монографии [20] в качестве поддерживающей структуры рассмотрен открытый резонатор типа земная поверхность – облачный покров. Однако облако не может быть проводящим зеркалом. Облако – это почти идеальный изолятор, а точнее – диэлектрическая линза, фокусирующие свойства которой тем лучше, чем больше влагосодержание. Поскольку на УНЧ для воды $\epsilon \sim 80$, а влагосодержание может достигать нескольких процентов, для длин волн до нескольких сотен метров облако – это хорошая линза. Вторым зеркалом открытого резонатора является ионосфера. Фокусы от нескольких облаков для нескольких разрядов молний могут совпадать, что приводит к более мелким и сильным неоднородностям поля. Само облако заряжено, а статические поля сильно снижают порог ионизации. Такая модель объясняет возникновение, энергетическую подпитку, сложное

перемещение и внезапное исчезновение различных свечений и плазмOIDов в атмосфере как изменение условий фокусировки.

Для исследования плазменного пробоя надо решать нелинейную нестационарную задачу возбуждения. Она может быть решена с учетом феноменологических соотношений, связывающих диэлектрическую проницаемость плазмы с амплитудой греющего электрического поля в условиях ударной ионизации [53–55]. Концентрацию носителей удобно описать феноменологической зависимостью [53]

$$n(E) = n_0 \left[1 + \gamma \exp(-(E_p / (E_0 + E))^v) \right], \quad (8)$$

где n_0 – равновесная концентрация электронов при заданной температуре и отсутствии внешних полей; $1 + \gamma$ – коэффициент увеличения концентрации при насыщении в результате пробоя; E_p – пороговая напряженность пробоя (при грозеона на порядки ниже, чем $3 \cdot 10^4$ В/см); E_0 – постоянное поле у поверхности Земли (при хорошей погоде ~ 100 В/м); E – амплитуда ВЧ-поля, показатель v порядка 2. Сухой воздух имеет проводимостью $\sigma_0 = 10^{-16}$ С/м. Ей соответствовала бы большая вносимая добротность $Q_0 \sim \omega \cdot 10^5$. Но часть атмосферы составляют облака, потоки дождя, туманы. Пары и капельки воды, которую можно считать дистиллированной, имеют тангенс диэлектрических потерь от $6 \cdot 10^{-9}$ до $6 \cdot 10^{-4}$, а указанные структуры составляют несколько процентов от объема атмосферы. Проводимость, связанная с захватом молекулами воды электронов и ионов, совсем ничтожна из-за малой их подвижности. Существенный вклад в понижение полной добротности вносит слой с высотами от 50 до 100 км, где проводимость высока, но еще недостаточна до полного отражения. Взяв усредненную проводимость атмосферы $\sigma_0 = 10^{-7}$ С/м, получим $Q_0 \sim \omega \cdot 10^{-2}$. Эта оценка не верна для СНЧ. Если взять толщину атмосферы 300 км и среднюю глубину проникновения в ионосферу и землю 3 м, получим оценку для добротности из-за потерь на поверхности КСР $Q_1 \sim 5 \cdot 10^4$. Т. е. добротности порядка 10^3 – 10^4 реальны. На частоте 100 кГц при $Q \sim 10^3$ временной декремент затухания моды равен 3 мс. За это время может произойти несколько ударов молний с весьма неравномерным распределением энергии по модам [48].

3. Характеристическое уравнение многослойного КСР

Ищем решение для электрических мод многослойного КСР в виде:

$$\begin{aligned} \bar{A}_i^e &= \bar{r}_0 \left[A_{ie}^+ U_{nm}^{e+}(r, \theta, \varphi) + A_{ie}^- U_{nm}^{e-}(r, \theta, \varphi) \right], \\ \bar{A}_i^h &= \bar{r}_0 \left[A_{ih}^+ U_{nm}^{h+}(r, \theta, \varphi) + A_{ih}^- U_{nm}^{h-}(r, \theta, \varphi) \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь

$$\begin{aligned} U_{nm}^\pm(r, \theta, \varphi) &= r u_{nm}^\pm(r, \theta, \varphi) = \\ &= P_m^n(\cos \theta) \exp(-jm\varphi) \sqrt{2kr} / \pi H_{n+1/2}^{(2,1)}(kr), \end{aligned}$$

причем знаку “плюс” соответствует функция Ганкеля второго рода, а знаку “минус” – первого рода. Поскольку функции Ганкеля имеют асимптотику

$$H_{n+1/2}^{(2,1)}(kr) \approx \sqrt{2 / (\pi kr)} \exp(\mp jkr),$$

решения представляют расходящиеся и сходящиеся сферические волны в слое i . Введем функции

$$h_{n(2,1)}(kr) = \sqrt{2kr} / \pi H_{n+1/2}^{(2,1)}(kr),$$

нормированные волновые сопротивления $\rho_i = \sqrt{\mu_i / \varepsilon_i}$ и волновые числа $k_i = k \sqrt{\varepsilon_i \mu_i}$. Спшивая поперечные компоненты полей, найдем электрические матрицы передачи слоев, связывающие их амплитуды в слоях i и $i+1$:

$$\hat{T}_{ni}^e = \frac{k_i \varepsilon_i}{\Delta_{n(i+1)}^e} \times$$

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \frac{h'_{n2}(k_i r_i) h_{n1}(k_{i+1} r_i)}{k_{i+1} \varepsilon_i} & \frac{h'_{n1}(k_i r_i) h_{n1}(k_{i+1} r_i)}{k_{i+1} \varepsilon_i} \\ \frac{h'_{n1}(k_{i+1} r_i) h_{n2}(k_i r_i)}{k_i \varepsilon_{i+1}} & \frac{h'_{n1}(k_{i+1} r_i) h_{n1}(k_i r_i)}{k_i \varepsilon_{i+1}} \end{bmatrix} \\ & \times \begin{bmatrix} \frac{h'_{n2}(k_{i+1} r_i) h_{n2}(k_i r_i)}{k_i \varepsilon_{i+1}} & \frac{h'_{n2}(k_{i+1} r_i) h_{n1}(k_i r_i)}{k_i \varepsilon_{i+1}} \\ \frac{h'_{n2}(k_i r_i) h_{n2}(k_{i+1} r_i)}{k_{i+1} \varepsilon_i} & \frac{h'_{n1}(k_i r_i) h_{n2}(k_{i+1} r_i)}{k_{i+1} \varepsilon_i} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Delta_{n(i+1)}^e &= \left[h'_{n2}(k_{i+1} r_i) h_{n1}(k_{i+1} r_i) - \right. \\ & \left. - h'_{n1}(k_{i+1} r_i) h_{n2}(k_{i+1} r_i) \right]. \end{aligned}$$

Построим матрицу передачи КСР:

$$\hat{T}_n^e = \prod_{i=1}^{N-1} \hat{T}_{ni}^e.$$

В последнем слое при электрической стенке следует положить

$$A_{Ne}^+ h'_{n2}(k_N b) + A_{Ne}^- h'_{n1}(k_N b) = 0,$$

а в первом слое соответственно

$$A_{1e}^+ h'_{n2}(k_1 a) + A_{1e}^- h'_{n1}(k_1 a) = 0.$$

Тогда имеем характеристическое уравнение

$$A_{Ne}^+ / A_{Ne}^- = -\frac{h'_{n2}(k_N b)}{h'_{n2}(k_N a)} = \frac{T_{n(11)}^e h'_{n1}(k_1 a) - T_{n(12)}^e h'_{n2}(k_1 a)}{T_{n(22)}^e h'_{n2}(k_1 a) - T_{n(21)}^e h'_{n1}(k_1 a)}. \quad (10)$$

Если последний слой неограничен, следует наложить парциальное условие излучения $A_{Ne}^- = 0$ (открытый КСР). Обычно в этом случае последний слой – вакуум: $\rho_N = 1$. Вместо связи амплитуды прямых и обратных волн можно связывать компоненты полей в соседних слоях. Тогда имеем другие матрицы. Матрица \hat{Q}_{in} , связывающая амплитуды A_i^\pm с компонентами E_{i0} и $H_{i\phi}$ при $r = r_i$, очевидно, имеет вид

$$\hat{Q}_{ni}^e = \frac{r_i}{\Delta_{ni}^e} \begin{bmatrix} \frac{h_{1n}(k_i r_i)}{k_i} & -\frac{jZ_0 h'_{1n}(k_i r_i)}{k \varepsilon_i} \\ -\frac{h_{2n}(k_i r_i)}{k_i} & \frac{jZ_0 h'_{2n}(k_i r_i)}{k \varepsilon_i} \end{bmatrix}.$$

Здесь $Z_0 = \sqrt{\mu_0 / \varepsilon_0}$. Матрица передачи \hat{a}_{ni} , связывающая указанные компоненты при $r = r_i$ с соответствующими компонентами при $r = r_{i-1}$, имеет вид $\hat{a}_{ni} = \hat{Q}_{ni}^{e-1} \hat{T}_{n(i-1)}^e \hat{Q}_{n(i-1)}^e$. Введем нормированные импедансы Z_{S0} и Z_{SN} при $r = a$ и $r = b$. В общем случае следует вводить электрические и магнитные моды, т. е. использовать по четыре амплитуды в слое и матрицы четвертого порядка. Если импедансы малы, имеем приближение в виде матриц второго порядка и два импедансных условия:

$$\begin{aligned} A_{1e}^+ h'_{n2}(k_1 a) + A_{1e}^- h'_{n1}(k_1 a) &= \\ &= jZ_{S0} \varepsilon_1 \left[A_{1e}^+ h_{n2}(k_1 a) + A_{1e}^- h_{n1}(k_1 a) \right], \\ A_{Ne}^+ h'_{n2}(k_N b) + A_{Ne}^- h'_{n1}(k_N b) &= \\ &= -jZ_{SN} \varepsilon_N \left[A_{Ne}^+ h_{n2}(k_N b) + A_{Ne}^- h_{n1}(k_N b) \right], \end{aligned}$$

в силу которых резонансные частоты всегда комплексные. Для магнитных мод получаем аналогичные соотношения в силу принципа перестановочной двойственности [7]. Четырехмерная матрица, связывающая все четыре поперечные компоненты в соседних полях, строится из элементов матриц \hat{a}_{ni}^e и \hat{a}_{ni}^m . Обозначая $Z_i = \sqrt{\mu_0 \mu_i / (\varepsilon_0 \varepsilon_i)}$, имеем формулу трансформации импедансов в слое i для электрических волн:

$$\begin{aligned} Z_{S(i-1)} &= jZ_i \{h'_{n2}(k_i r_{i-1}) [jZ_i h'_{n1}(k_i r_i) - \\ &- Z_{Si} h_{n1}(k_i r_i)] + h'_{n1}(k_i r_{i-1}) \times \\ &\times [Z_{Si} h_{n2}(k_i r_{i-1}) - jZ_i h'_{n2}(k_i r_i)]\} / \\ &/ \{h_{n2}(k_i r_{i-1}) [jZ_i h'_{n1}(k_i r_i) - \\ &- Z_{Si} h_{n1}(k_i r_i)] + h_{n1}(k_i r_{i-1}) \times \end{aligned} \quad (11)$$

$$\times [Z_{Si} h'_{n2}(k_i r_{i-1}) - jZ_i h'_{n2}(k_i r_i)]\}.$$

Оценим резонансные частоты первой моды резонанса Шумана. Примем среднюю проводимость поверхности Земли $\sigma_0 = 2.6$ С/м, считая, что она однородна, и учитывая, что на 2/3 она покрыта океанами и морями. Возьмем модель открытого пятислойного резонатора. Первый атмосферный слой (тропосфера) толщины $t_1 = 18$ км считаем почти непроводящим и влагосодержащим. Коэффициент влагосодержания (относительная влажность) η в нем порядка 0.03–0.04, что соответствует его диэлектрической проницаемости около 3. Второй слой от 18 до 50 км (стратосфера толщины $t_2 = 32$ км) не содержит влаги и также является почти непроводящим. Проводимость слоев 1 и 2 взята в виде $\sigma_1 = \sigma_2 = 10^{-14}$ С/м (вносимая добротность $Q \sim 3 \cdot 10^4$). Третий проводящий с низкой проводимостью слой толщины $t_3 = 30$ км от 50 до 80 км (D-слой) соответствует началу ионосферы. Для него плотность электронов $n_3 = 10^3$ см⁻³, а частота столкновений $\nu_3 = 8 \cdot 10^6$ Гц. Четвертый E-слой – слой Хевисайда от 80 до 160 км с толщиной $t_4 = 80$ км. Здесь $n_4 = 10^5$ см⁻³, $\nu_4 = 10^5$ Гц. Пятый F-слой с максимальной электронной концентрацией имеет переменную толщину t . Для него средние значения $n_5 = 5 \cdot 10^5$ см⁻³, $\nu_5 = 10^4$ Гц. Обычно он заканчивается на высоте 400–500 км и затем плавно переходит в космическое пространство с $\varepsilon = 1$ на высоте порядка 20 000 км. Мы будем считать указанный переход резким, т. е. КСР нагруженным на импеданс вакуума. Для СНЧ-волн с частотой порядка 10 Гц всегда $\omega \ll \omega_c$, поэтому отрицательной ε' можно пренебречь по сравнению с большой мнимой частью ε'' . Для проводимостей и глубин проникновения соответственно имеем: $\sigma_3 = 4.485 \cdot 10^{-7}$ С/м, $\delta_3 = 237.6$ км; $\sigma_4 = 4.485 \cdot 10^1$ С/м, $\delta_4 = 23.76$ м; $\sigma_5 = 2.242 \cdot 10^3$ С/м, $\delta_5 = 3.361$ м. Третий слой частично проникаем, и им можно пренебречь, отнеся его к слою 2. Проводимость пятого слоя с высотой изменяется значительно слабее, чем четвертого, который и оказывает основное влияние на резонансы. Средняя глубина проникновения резонансов Шумана в Землю при указанных условиях равна $\delta_0 = 98.7$ м. Она существенно меньше средней глубины океанов и морей. На глубине порядка 2–3 δ_0 поле практически затухает, поэтому опять можно использовать пятислойную модель с нулевым слоем $t_0 = 3\delta_0$ и нулевым импедансом при $r = a - 3\delta$. Однако удоб-

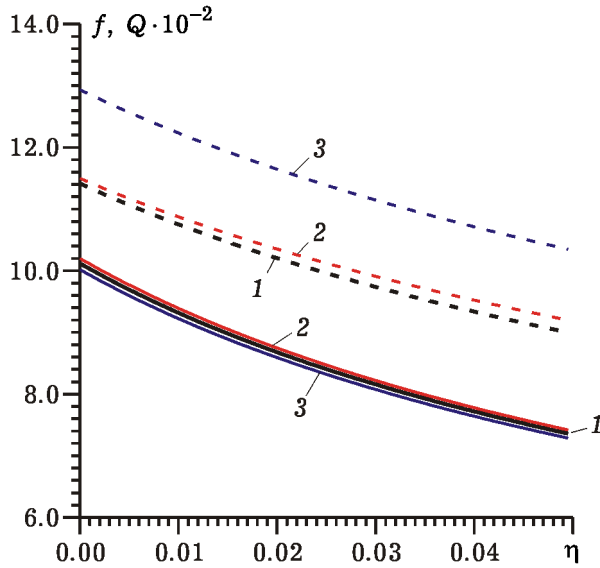


Рис. 1. Частота f , Гц (сплошные кривые) и добротность $Q \cdot 10^{-2}$ (штриховые кривые) первого резонанса Шумана в зависимости от влажности η : 1 и 3 – модель на основе импедансного алгоритма для $t_3 = 30$ и $t_3 = 40$ км соответственно; 2 – модель на основе матричного алгоритма для $t_3 = 30$ км

нее при $r = a$ наложить импедансное условие. На частоте 10 Гц этот поверхностный импеданс мал и равен $Z_{S0} = 3.7 \cdot 10^{-3}(1 + j)$ Ом.

На рис. 1 приведены результаты моделирования низшего резонанса по рассмотренным моделям. Для расчета использовано два итерационных алгоритма: в форме метода минимальных невязок и прямой итерации [56]. Оба алгоритма сходятся к одним и тем же результатам. В первом алгоритме использованы приведенные соотношения типа (10), записанные с помощью обратной матрицы передачи для первого слоя и разрешенные относительно комплексного волнового числа в виде $k = \arctan(f(k, Z_{S0}, Z_{S1}))$. Функция f зависит от параметров всех слоев. Параметр итерации на каждом шаге определялся из линеаризованного соотношения [56], в правую часть которого подставлялись результаты предыдущего шага. Второй алгоритм основан на вычислении входного импеданса при $r = a$, который полагался равным импедансу Земли. Импедансы пересчитывались от импеданса ионосферы методом матриц передачи или по формуле [11] и при $i = 1$ приравнялись значению Z_{S0} . Далее характеристическое уравнение разрешалось относительно величины $\tan(kt_1 \sqrt{\epsilon_1})$, а затем и k .

4. Стационарное возбуждение КСР радиальным диполем

Рассмотрим КСР с идеальными металлическими сферами и точечный электрический диполь с

единичным моментом в точке q с координатами $r' = r_d$, $\theta' = 0$, $\varphi' = 0$. Диполь ориентирован вдоль оси $z' = r'$ вертикально вверх. Плотность возбуждающего КСР электрического тока имеет вид

$$\vec{J}(r, \theta, \varphi) = \vec{n}_0 \delta(r - r') \delta(\theta - \theta') \delta(\varphi - \varphi') / r_d^2.$$

Вектор-потенциал не зависит от φ и имеет одну компоненту $A_r^e = A_z^e = G_r^e(r, \theta, \varphi | r', \theta', 0)$. Компонента G_r^e ФГ удовлетворяет уравнению

$$\left\{ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + k^2 \right\} G_r^e(r, \theta, \varphi | r', \theta', 0) = (12)$$

$$= -\delta(r - r') \delta(\theta - \theta') \delta(\varphi) / r^2.$$

Решение (12) по аналогии с результатами из [7] имеет вид

$$G_r^e(r, \theta, \varphi | r', \theta', 0) = \frac{k}{4\pi j} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \times (13)$$

$$\times P_n(\cos \beta) \begin{cases} \Psi_n^-(kr) \Psi_n^+(kr'), r < r' \\ \Psi_n^+(kr) \Psi_n^-(kr'), r > r' \end{cases},$$

где введены полиномы Лежандра и функции, удовлетворяющие граничным условиям:

$$\Psi_n^-(kr) = [\psi_n'(kr) - \psi_n'(ka) v_n'(kr) / v_n'(ka)], (14)$$

$$\Psi_n^+(kr) = [\psi_n'(kr) - \psi_n'(kb) v_n'(kr) / v_n'(kb)].$$

Приведенные соотношения упрощаются, если положить $\theta' = 0$, т. е. направить ось диполя z' вдоль оси z . Тогда имеем один член, $P_n(\cos \theta)$, и G_r^e перестает зависеть от φ .

Мы нашли компоненту ФГ для электрического вектор-потенциала для радиального диполя. Можно рассмотреть меридиональный и азимутальный электрические диполи. Тогда получим диагональную тензорную электрическую ФГ для определения электрического вектор-потенциала. Аналогично определяется тензорная ФГ, связанная с магнитными дипольными токами. Находя с помощью этих ФГ и вектор-потенциалов поля, получим связь последних с токами посредством тензорных ФГ, которых четыре: $\hat{\Gamma}^{\alpha\beta}$, $\alpha, \beta = e, m$. Они уже не диагональные. Обозначая $\vec{E}_0(\vec{r})$ поле полого КСР, возбужденного заданными источниками, и используя ток поляризации ионосферной плазмы

$$\vec{J}_p^e(\vec{r}) = -j\epsilon_0 \vec{E}(\vec{r}) \omega_p^2(\vec{r}) / (\omega - j\omega_c(\vec{r})),$$

получим интегральное уравнение возбуждения СЗИ

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_0(\vec{r}) - j\epsilon_0 \int_V \frac{\hat{\Gamma}^{ee}(\vec{r}, \vec{r}') \vec{E}(\vec{r}') \omega_p^2(\vec{r}')}{\omega - j\omega_c(\vec{r}')} dr'^3. (15)$$

Оно пригодно для закрытой и открытой моделей. Решение (15) внутри неоднородного слоя с границей r_p удобно искать в виде

$$\vec{E}(\vec{r}) = A(r)\vec{E}_0(r_p, \theta, \varphi)\exp(-\alpha(r)r).$$

Эта задача сводится к определению профиля затухания $A(r)\exp(-\alpha(r))$ и коэффициента отражения $R = A(r_p) - 1$, что существенно снижает ее размерность. Удобным для анализа многослойного или радиально неоднородного КСР является метод объемного интегрального уравнения [49–51, 56].

Заключение

Получены характеристические уравнения для экранированного и открытого многослойного КСР, включая открытый случай и случай импедансных сфер. Приведены численные результаты их решения. Построена теория возбуждения КСР точечным радиальным (вертикальным) диполем и приведена одна из трех диагональных компонент электрической тензорной функции Грина. Произведено моделирование резонансов Шумана и исследовано влияние различных факторов (в частности, влажности) на их частоты и добротности. Показано, что частоты сильно уменьшаются с ростом влажности и слабо зависят от других факторов, а добротности в основном зависят от высоты слоя Хевисайда и слабо от влажности. Обсуждена возможность возбуждения мощных добротных колебаний, приводящих к нелинейному плазменному пробою в СЗИ.

В работе [14] приведены неверные резонансные частоты КСР, полученные на основе ошибочного подхода. Рассмотренная там же однородная внешняя задача в силу теоремы единственности [1–3, 6–12, 44] имеет тривиальное решение. Ошибочна и работа [57], противоречащая принципу излучения и теореме единственности.

Литература

1. Вайнштейн Л.А. Электромагнитные волны. М.: Радио и связь, 1988. 440 с.
2. Стрэттон Дж. Теория электромагнетизма. М.–Л.: ОГИЗ, 1948. 540 с.
3. Смайт В. Электростатика и электродинамика. М.: ИЛ, 1954. 604 с.
4. Семенов А.А. Теория электромагнитных волн. Изд-во Московск. ун-та, 1968. 180 с.
5. Гуревич Л.Г. Полые резонаторы и волноводы. М. Сов. радио, 1952. 75 с.
6. Пановский В. Филипс. Классическая электродинамика. М.: ГИФМЛ, 1963. 432 с.
7. Марков Г.Т., Чаплин А.Ф. Возбуждение электромагнитных волн. М.: Радио и связь, 1983. 296 с.
8. Марков Г.Т. Возбуждение шара // ЖТФ. 1953. Т. 23. № 5.
9. Ильинский А.С., Кравцов В.В., Свешников А.Г. Математические модели электродинамики. М.: Высшая школа, 1991. 224 с.
10. Левин Л. Теория волноводов. М.: Радио и связь, 1981. 312 с.
11. Хенл Х., Мауэ А., Вестпфаль К. Теория дифракции. М.: Мир, 1964. 428 с.
12. Harrington R.F. Time-Harmonic Electromagnetic Fields. N. Y.: McGraw-Hill, 1961.
13. Rode D.L. Concentric Spherical Resonator Eigenfrequencies // IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. 1968. V. MTT-16. No. 6. P. 369–372.
14. Зюрюкин Ю.А., Павлова М.В. Осесимметричные сферические электромагнитные волны в изотропной среде с отражающим идеально проводящим «ядром» в центре и концентрические сферические резонаторы на их основе // Изв. вузов. ПНД. 2002. Т. 10. № 5. С. 84–92.
15. Еременко З.Е., Филиппов Ю.Ф. Резонансные колебания в изотропном неоднородном сферическом резонаторе // 9-th International Crimean Microwave Conference. 1999. Microwave & Telecommunication Technology. 1999. P. 390–391.
16. Julien A., Guillon P. Electromagnetic Analysis of Spherical Dielectric Shielded Resonators // IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. 1986. V. MTT-34. No. 6. P. 723–729.
17. Wolff I.A. Generalized Description of the Spherical Three-Layer Resonator with an Anisotropic Dielectric Material // MTT-S International Microwave Symposium Digest. 1987. V. 87. Issue 1. P. 307–310.
18. Burlak G.N., Koshevaya S.V., Sanchez-Mondragon J., Gutierrez-D E., Grimalsky V. The theory of high quality electromagnetic oscillations in the multilayer spherical resonator // 13th International Conference on Microwaves, Radar and Wireless Communications. 2000. MIKON-2000. 2000. V. 1. P. 113–115.
19. Gastine M.L., Courtois L., Dormann J.L. Electromagnetic Resonances of Free Dielectric Spheres // IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. 1967. V. MTT-15. No. 12. P. 694–700.
20. Вайнштейн Л.А. Открытые резонаторы и открытые волноводы. М.: Сов. радио, 1966. 476 с.
21. Bressan M., Conciauro G. Singularity Extraction from the Electric Green's Function for a Spherical Resonator // IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. 1985. V. MTT-33. No. 5. P. 407–414.
22. Альперт Я.Л. Распространение электромагнитных волн и ионосфера. М., 1972. 564 с.

23. Макаров Г.И., Новиков В.В., Рыбачек С.Т. Распространение радиоволн в волноводном канале Земля-ионосфера и в ионосфере. М.: Наука, 1994. 152 с.
24. Rybachek S.T. Radio wave propagation from antennae at satellite altitudes into the earth-ionosphere waveguide // *Jour. Atm. Terr. Phys.* 1995. **V. 57. No. 3. P. 303–309.**
25. Rybachek S.T., Ivanov V.I., Senina V.L. Ionospheric fields excited by sources located in the earth - ionosphere irregular waveguide // *Jour. Atm. Sol.-Terr. Phys.* 1997. **V. 59. No. 1. P. 139–149.**
26. Rybachek S.T., Ivanov V.I., Senina V.L. Excitation of the earth-ionosphere irregular waveguide by sources located in an anisotropic ionosphere // *Jour. Atm. Sol.-Terr. Phys.* 1997. **V. 59. No. 5. P. 561–567.**
27. Орлов А.Б., Азарнин Г.В. Основные закономерности распространения сигналов СДВ-диапазона в волноводном канале Земля-ионосфера (Обзор экспериментальных работ) // *Проблемы дифракции и распространения волн.* 1970. Вып. 10. С. 3–107.
28. Галюк Ю.П., Иванов В.И. Определение характеристик распространения СДВ-полей в волноводном канале Земля - неоднородная по высоте анизотропная ионосфера // *Проблемы дифракции и распространения волн.* 1978. Вып. 16. С. 148–153.
29. Рыбачек С. Т. О влиянии существенной области ионосферного слоя на характеристики распространения СДВ // *Изв. вузов. Радиофизика.* 1972. Т. 15. № 9. С. 1300–1303.
30. Макаров Г.И., Новиков В.В., Орлов А.Б. О распространении километровых и более длинных радиоволн // *УФН.* 1989. Т. 157. Вып. 4. С. 720–722.
31. Фейнберг Е.Л. Распространение радиоволн вдоль Земной поверхности. М: Наука, ФИЗМАТЛИТ, 1999. 496 с.
32. Bliokh P.V., Nikolaenko A.P., and Filippov Yu.F. Schumann resonances in the Earth ionosphere cavity / ed. by D.L. Jones. Peter Perigrinus, London, Oxford, New York, Paris, 1980.
33. Nikolaenko A.P., Rabinowicz L.M. // *Space Research.* 1982. V. 20. № 1. P. 82.
34. Sentman, D.D. Magnetic polarization of Schumann resonances // *Radio Science.* 1987. V. 22. P. 595–606.
35. Sentman D.D. // *Handbook of atmospheric electrodynamics. V. 1. Atmospheric electricity / ed. by H. Volland, Boca Raton, London, Tokyo: CRC Press Inc., 1995. 267 p.*
36. Sentman, D.D. and Fraser B.J. Simultaneous observations of Schumann resonances in California and Australia: Evidence for intensity modulation by the local height of the D region // *J. Geophys. Res.* 1991. **V. 96. P. 15973–15984.**
37. Николаенко А.П., Хайакава М. Электрические поля модельных грозовых разрядов в нейтральной атмосфере // *Изв. вузов. Радиофизика.* 1998. Т. 41. № 6. С. 699–717.
38. Nikolaenko A.P., Hayakawa M. Resonances in the Earth-ionosphere cavity (modern approaches in geophysics). Springer, 2002. 392 p.
39. Nikolaenko A.P., Hayakawa M. Resonances in the Earth ionosphere cavity. Kluwer Academic Publisher, 2004. 392 p.
40. Schumann W.O. Uber die strahlungslosen Eigenschwingungen einer leitenden Kugel, die von einer Luftshicht und einer Ionosphdrenhulle umgeben ist // *Z. Naturforsch.* 1952. 7a. P. 149.
41. Tobar M.E., Krupka J., Ivanov E.N., Le Floch J.-M., Cros, D. Spherical resonators with Bragg confinement // 2004 Digest of the LEOS Summer Topical Meetings: Biophotonics / Optical Interconnects and VLSI Photonics/WBM Microcavities. 2004. P. 14–15.
42. Hrabar S., Eres Z., Kumric H. Spherical resonators acting as rf replicas of plasmonic nanospheres // 2007 IEEE Antennas and Propagation International Symposium. 2007. P. 4340–4343.
43. Морс Ф.М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. Т. 1. М.: ИЛ, 1958. 930 с.
44. Фейнман Р., Лейтон Р., Сендс М. Фейнмановские лекции по физике. Электродинамика. Т. 6. М.: Мир, 1966. 344 с.
45. Марков Г.Т., Петров В.М., Грудинская Г.П. Электродинамика и распространение радиоволн. М.: Сов. Радио, 1970. 376 с.
46. Симпсон Д.К. Молния // *УФН.* 1930. Т. 10. № 5–6. С. 756–780.
47. Бак М.А., Николаевская Н.Н. Молния и ее физическая природа // *УФН.* 1939. Т. 26. Вып. 3. С. 204–356.
48. Альперт Я.Л. Молния и распространение электромагнитных волн звуковой частоты // *УФН.* 1956. Т. 40. Вып. 3. С. 369–389.
49. Давидович М.В. Нестационарное возбуждение открытых структур // *Известия Саратовского университета. Новая серия.* 2005. Серия Физика. Т. 5. В. 1. С. 68–83.
50. Давидович М.В. Метод конечных элементов в пространственно-временной области для нестационарной электродинамики // *ЖТФ.* 2006. Т. 76. Вып. 1. С. 13–23.
51. Давидович М.В. К нестационарной теории возбуждения резонатора // *РЭ.* 2001. Т. 46. № 10. С. 1198–1205.
52. Капица П.Л. О природе шаровой молнии // *ДАН СССР.* 1955. Т. 101. № 2. С. 245–248.
53. Басс Ф.Г., Гуревич Ю.Г. Горячие электроны и сильные электромагнитные волны в плазме полупроводников и газового разряда. М.: Наука, 1975. 400 с.
54. Гуревич А.В., Шварцбург А.Б. Нелинейная теория распространения радиоволн в ионосфере. М.: Наука, 1973. 473 с.
55. Ерохин Н.С., Кузелев М.В., Моисеев С.С., Рухадзе А.А., Шварцбург А.Б. Неравновесные и резонансные процессы в плазменной радиофизике. М.: Наука, 1982. 272 с.
56. Самохин А.Б. Интегральные уравнения и итерационные методы в электромагнитном рассеянии. М.: Радио и связь, 1998. 160 с.

57. Зюрюкин Ю.А., Павлова М.В. Осесимметричные сферические бегущие электромагнитные волны // РЭ. 2008. Т. 53. № 3. С. 286–294.

Таблица 1

Магнитные моды $H_{011}, H_{-111}, H_{111}$		Электрические моды $E_{011}, E_{-111}, E_{111}$	
$\alpha = a / b$	$x_1 = kb$	$\alpha = a / b$	$x'_1 = kb$
0.00001	4.49341	0.00001	2.74371
0.01	4.49345	0.01	2.74369
0.1	4.52228	0.1	2.72275
0.5	6.57201	0.5	1.98456
0.9	31.45125	0.9	1.49071
0.95522	70.1710	0.95522	1.44692
0.99	314.16198	0.99	1.42133
0.999	3141.5210	0.999	1.41491

Eigenmodes of multilayered concentric spherical resonator

M.V. Davidovich, Yu.V. Stefuk

The characteristic equations for shielded and open multilayered concentric spherical resonator (CSR) have been obtained including the case of impedance spheres, and the correspondent numerical results have been presented with high accuracy. These results correspond to spherical resonator eigenmodes when the inner sphere is removed from CSR. The excitation theory of CSR for the radial electric dipole case has been constructed and the Schumann resonances have been investigated. The possibility of excitation of powerful high quality oscillations and the probability of nonlinear impact ionization or plasmic air breakdown are discussing in this paper concerning the CSR which is corresponded to the system: the Earth-ionosphere.



Давидович Михаил Владимирович, 1950 года рождения. Окончил физический факультет Саратовского государственного университета по специальности физика (специализация – теоретическая и ядерная физика, 1972). С 1972 по 1974 годы служил в СА. Около 20 лет проработал на предприятиях электронной промышленности г. Саратова. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в области радиофизики, включая квантовую радиофизику (1991), и доктора физико-математических наук в области применения вычислительной техники, математического моделирования и математических методов в научных исследованиях (2000). Профессор ка-

федры радиотехники и электродинамики СГУ, профессор (2002), саратовский доцент (2000), саратовский профессор (2001), Member, IEEE (1995), Senior Member, IEEE (2001), IEEE MTT/ED/AP/CPMT Saratov-Penza Chapter Vice Chair. Область научных интересов: решение краевых задач методом интегральных и интегродифференциальных уравнений, метод конечных элементов, вариационные методы, электродинамика и оптика структур, включая волноводы (линии передачи), резонаторы, волноводные трансформаторы (неоднородности) в спектральной области, решение обратных задач, микроволновое зондирование, нестационарная нелинейная электродинамика структур и диспергирующих сред, включая распространение импульсов. Автор более 200 работ по указанным направлениям, опубликованных в отечественной и зарубежной печати



Стефук Юлия Валентиновна, 1973 года рождения. Окончила механико-математический факультет СГУ (2004), в настоящее время является начальником отдела в правительстве Саратовской области и аспирантом-заочником кафедры радиотехники и электродинамики СГУ. Имеет 11 научных публикаций. Область научных интересов: численные методы, итерационные методы в электродинамике