

Глава

12

Основы линейной теории устройств сверхвысоких частот для гармонических процессов

12.1(*). Основные определения	525
12.2(*). Основные теоремы СВЧ-цепей	528
12.3(*). Соотношения между характеристическими матрицами (дескрипторами) четырёхполюсника	536
12.4(*). Основные свойства матрицы рассеяния	538
12.5(*). Анализ четырёхполюсников каскадной структуры с помощью матриц передачи	540
12.6(*). Метод симметричных восьмиполусников (метод синфазного и противофазного возбуждений)	543
12.7(*). Матрицы передачи и рассеяния для некоторых широко используемых типов четырёхполюсников	545
12.8(*). Пример использования матрицы рассеяния	549
12.9(*). Вычисление волновых сопротивлений линий передачи	551

^{*)} Символом «*» отмечены разделы и параграфы для самостоятельного и углубленного изучения материала.

Глава 12(*). Основы линейной теории устройств сверхвысоких частот для гармонических процессов

Любое линейное устройство СВЧ-диапазона (в том числе линию передачи и резонатор) в обобщенном виде можно представить в виде многополюсника (рис. 12.1), который обычно состоит из нескольких элементов, соединенных определенным образом между собой с помощью отрезков различных линий. Такие многополюсники (в эквивалентном их представлении) обычно описываются нормированными напряжениями и токами на входах устройства. На низких частотах для этой цели используются матрицы сопротивлений, матрицы проводимостей или («классические») матрицы передачи. Эти классы матриц весьма широко используются в инженерной практике. В СВЧ- и КВЧ-диапазонах напряжения и токи заменяются нормированными волновыми переменными и устройство анализируется с помощью матрицы рассеяния.

Большинство элементов СВЧ-устройств имеют один вход и один выход, то есть являются четырехполюсниками. Часто СВЧ-схемы могут быть представлены в виде каскадного соединения таких четырехполюсных элементов (базовых элементов). Анализ таких схем особенно удобен с помощью матриц передачи отдельных четырехполюсников.

12.1(*). Основные определения

12.1.1. Многополюсник СВЧ. Будем понимать под многополюсником СВЧ любую комбинацию проводников, диэлектриков и других элементов, имеющую несколько входов в виде поперечных сечений линий передачи с заданными типами волн в каждой линии (рис. 12.1). Для каждого входа многополюсника для определения фаз определяют *плоскости отсчета фаз* нормированных напряжений, которые выбирают таким образом, чтобы нераспространяющиеся волны высших типов, возбуждаемые в многополюснике, в этих сечениях были пренебрежимо малы, что исключает возможность обмена энергией между многополюсником и остальной частью тракта за счет высших типов волн. При использовании термина « $2N$ -полюсник СВЧ» подразумевается устройство с N подводными линиями передачи с заданными плоскостями отсчета фаз или, более строго, с N типами волн во входных линиях.

В нашем курсе рассматриваются пассивные линейные многополюсники. Свойство пассивности означает отсутствие усиления или генерации мощности СВЧ внутри многополюсника и выражается в виде неравенства $P_{\text{пот}} \geq 0$, где $P_{\text{пот}}$ — мощность потерь внутри многополюсника при любых его возбуждениях. Свойство линейности означает независимость внешних характеристик многополюсника от уровня мощности, то есть устройство описывается с помощью линеаризованных уравнений Максвелла. Однако этот уровень должен оставаться в определенных границах, например, он не должен превышать предела электрической прочности диэлектрика в устройстве СВЧ.

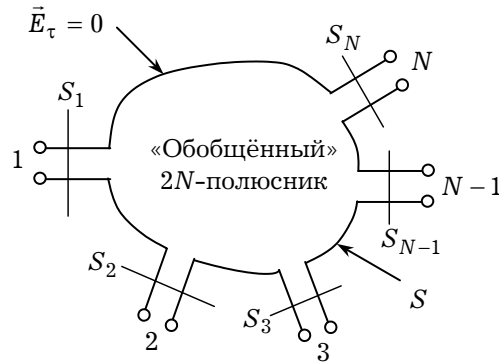


Рис. 12.1

Ниже будем рассматривать преимущественно внешние гармонические характеристики многополюсника, устанавливающие связи между электрическими величинами его входов. Зависимость от времени выбирается в виде $\exp(i\omega t)$. Для описания и расчета внешних характеристик линейных многополюсников используется матричный аппарат линейной алгебры.

12.1.2. Матрицы многополюсников выявляют взаимосвязи между электрическими режимами его входов. Режимы в плоскостях отсчета фаз многополюсника могут быть описаны как в терминах волнового, так и в терминах классического подходов.

При волновом подходе для каждого m -входа произвольного $2N$ -полюсника (рис. 12.2а) вводят нормированное напряжение для падающей волны, распространяющейся в сторону к многополюснику (вдоль продольной координаты ξ):

$$u_{nm} = \sqrt{P_{nm}} e^{i\varphi_{nm}^E} e^{-i\gamma_0^{(m)}\xi} = u_{nm}(0) e^{-i\gamma_0^{(m)}\xi}, \quad (12.1.1)$$

где активная мощность P_{nm} , переносимая падающей волной, определяется интегралом от вектора Умова–Пойнтинга этой волны по поперечному сечению S_m m -входа:

$$P_{nm} = \operatorname{Re} \left\{ \int_{S_m} [\vec{E}_{nm}, \vec{H}_{nm}^*] d\vec{S} \right\}, \quad (12.1.2)$$

$\gamma_0^{(m)}$ — постоянная распространения основной волны линии передачи в m -входе; φ_{nm}^E — фаза нормированного напряжения падающей волны в m -входе, равная фазе составляющей поперечного электрического поля для основной волны; $\vec{E}_{nm}, \vec{H}_{nm}$ — электрические и магнитные поля в m -входе для падающей волны; $d\vec{S} = \vec{n}_0 dS$ — векторный элемент площади поперечного сечения S , \vec{n}_0 — единичный вектор внешней нормали по отношению к поперечному сечению. Нормированное напряжение для отраженной волны в m -входе записывается аналогичным образом:

$$u_{om} = \sqrt{P_{om}} e^{i\varphi_{om}^E} e^{i\gamma_0^{(m)}\xi} = u_{om}(0) e^{i\gamma_0^{(m)}\xi}, \quad (12.1.3)$$

где активная мощность отраженной волны P_{om} и фаза нормированного напряже-

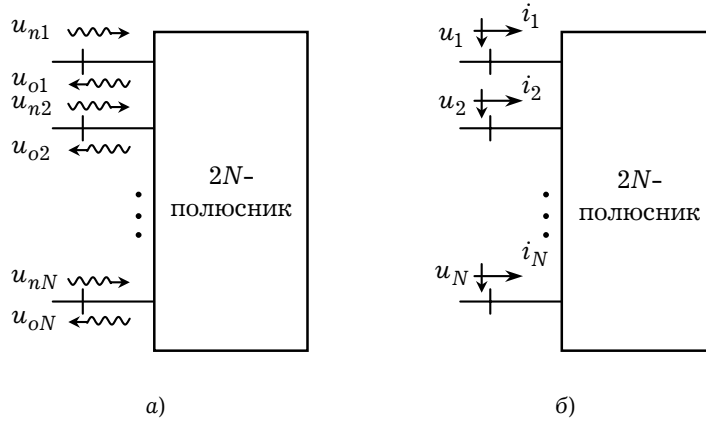


Рис. 12.2

ния отраженной волны φ_{om}^E определяется точно так же, как и для падающей волны. Заметим, что нормированные напряжения u_{nm} , u_{om} имеют размерность $\sqrt{\text{Вт}}$.

При классическом подходе для каждого m -входа устройства задаются нормированные напряжения u_m и нормированные токи i_m , втекающие внутрь многополюсника (рис. 12.2б), по формулам

$$u_m = u_{nm} + u_{om}, \quad i_m = u_{nm} - u_{om}. \quad (12.1.4)$$

Нормированные u_m и i_m также измеряются в $\sqrt{\text{Вт}}$.

В самом общем случае режим на m -входе многополюсника может быть однозначно описан двумя комплексными величинами, например, это могут быть u_{nm} , u_{om} или u_m , i_m , а также любая их комбинация. Выделяя на каждом входе $2N$ -полюсника одну из величин, входящих в (12.1.4), в качестве компонента независимого воздействия на многополюсник, а какую-либо другую — в качестве компонента реакции на это воздействие, сформируем N -мерные (по числу входов) векторы воздействия \vec{F} и реакции \vec{R} :

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \dots \\ F_N \end{pmatrix}, \quad \vec{R} = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \dots \\ R_N \end{pmatrix}. \quad (12.1.5)$$

В силу линейности многополюсника вектор реакции \vec{R} должен быть связан с вектором воздействия \vec{F} линейным матричным соотношением:

$$\vec{R} = \vec{T} \vec{F}, \quad (12.1.6)$$

где квадратная матрица \vec{T} N -порядка является полной внешней характеристикой $2N$ -полюсника в том смысле, что позволяет рассчитать реакцию многополюсника \vec{R} на любое выбранное воздействие \vec{F} . Матрица \vec{T} называется дескриптором устройства СВЧ.

12.1.3. Матрица рассеяния. Самым распространенным в теории устройств СВЧ является выбор вектора воздействия на $2N$ -полюсник в виде набора N -падающих

волн и вектора реакции в виде набора N отраженных волн, то есть

$$\vec{F} \equiv \vec{u}_n = \begin{pmatrix} u_{n1} \\ u_{n2} \\ \dots \\ u_{nN} \end{pmatrix}, \quad \vec{R} \equiv \vec{u}_o = \begin{pmatrix} u_{o1} \\ u_{o2} \\ \dots \\ u_{oN} \end{pmatrix}. \quad (12.1.7)$$

В этом случае взаимосвязь векторов воздействия и реакции определяется *матрицей рассеяния* \vec{S} ($\vec{T} \equiv \vec{S}$):

$$\vec{u}_o = \vec{S} \vec{u}_n. \quad (12.1.8)$$

Квадратная матрица \vec{S} имеет смысл математического оператора, указывающего правило преобразования вектор-воздействия \vec{u}_n в вектор-реакцию \vec{u}_o .

12.1.4. Матрицы сопротивлений и проводимостей. Пусть теперь воздействие на $2N$ -полюсник выбрано в виде набора N нормированных токов, а реакция — в виде набора N нормированных напряжений:

$$\vec{F} \equiv \vec{i} = \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \dots \\ i_N \end{pmatrix}, \quad \vec{R} \equiv \vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_N \end{pmatrix}. \quad (12.1.9)$$

Тогда связь между векторами \vec{i} и \vec{u} определяется *матрицей нормированных сопротивлений* $[\vec{Z}]$:

$$\vec{u} = [\vec{Z}] \vec{i}. \quad (12.1.10)$$

Подобным образом определяется *матрица нормированных проводимостей* $[\vec{Y}]$ $2N$ -полюсника:

$$\vec{i} = [\vec{Y}] \vec{u}. \quad (12.1.11)$$

Матрицы нормированных сопротивлений и проводимостей часто применяются при анализе и расчете многоэлементных антенн и антенных решеток (в частности, фазированных антенных решеток (пассивных и активных)) для учета влияния отдельных излучателей друг на друга.

Сравнивая определения матриц нормированных сопротивлений и проводимостей для одного и того же многополюсника, можно установить, что они взаимно обратны:

$$[\vec{Z}] = [\vec{Y}]^{-1}, \quad [\vec{Y}] = [\vec{Z}]^{-1}. \quad (12.1.12)$$

12.2(*). Основные теоремы СВЧ-цепей

В настоящем разделе рассмотрим основные теоремы цепей с распределенными параметрами, позволяющие существенно упростить анализ и синтез линейных устройств.

12.2.1. Теорема Умова–Пойнтинга. В электродинамике, теории дифракции и смежных дисциплинах широко используется теорема Умова–Пойнтинга, основывающаяся на понятии вектора Умова–Пойнтинга \vec{S} , определяемого как векторное произведение векторов электрического \vec{E} и магнитного \vec{H} полей в некоторой точке пространства: $\vec{S} = [\vec{E}, \vec{H}]$. Это классическое представление вектора Умова–Пойнтинга для поперечных электромагнитных полей. В нашем курсе мы будем пользоваться исключительно этим определением \vec{S} .

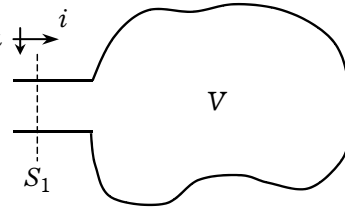


Рис. 12.3

Рассмотрим двухполюсник, подсоединенный каким-либо способом к внешней цепи в сечении S_1 (рис. 12.3); входные нормированные напряжение u и ток i считаются известными. Предположим также, что внутри объема V двухполюсника электрический и магнитный токи отсутствуют; его стенки изготовлены из идеальных проводников. Среду внутри объема V будем считать изотропной со скалярными параметрами ϵ, μ, σ , где σ — проводимость диэлектрика, заполняющего объем двухполюсника.

В случае гармонической зависимости от времени уравнения Максвелла для комплексных амплитуд могут быть записаны в форме

$$\text{rot } \vec{E} = -i\omega \mu_0 \vec{H}, \quad \text{rot } \vec{H} = (\sigma + i\omega \epsilon_0 \epsilon) \vec{E}. \quad (12.2.1)$$

Используя известное тождество:

$$\text{div} [\vec{E}, \vec{H}^*] = \vec{H}^* \text{rot } \vec{E} - \vec{E} \text{rot } \vec{H}^*, \quad (12.2.2)$$

получим

$$\text{div} [\vec{E}, \vec{H}^*] = -i\omega \mu_0 \mu |H|^2 - (\sigma - i\omega \epsilon_0 \epsilon) |E|^2. \quad (12.2.3)$$

Интеграл от дивергенции комплексного вектора Умова–Пойнтинга $[\vec{E}, \vec{H}^*]$ по объему устройства равен поверхностному интегралу от этого вектора. Так как стенки устройства являются идеальными проводниками, то векторное произведение $[\vec{E}, \vec{H}^*]$ на стенках двухполюсника равно нулю. Поэтому поверхностный интеграл берем только по поверхности S_1 (рис. 12.3):

$$\begin{aligned} \int_V \text{div} [\vec{E}, \vec{H}^*] dV &= \int_{S_1} [\vec{E}, \vec{H}^*] d\vec{S} = \\ &= i\omega \int_V (\epsilon_0 \epsilon |\vec{E}|^2 - \mu_0 \mu |H|^2) dV - \int_V \sigma |\vec{E}|^2 dV. \end{aligned} \quad (12.2.4)$$

Так как для двухполюсника

$$- \int_{S_1} [\vec{E}, \vec{H}^*] d\vec{S} = u i^*, \quad (12.2.5)$$

то

$$\frac{1}{2} u i^* = 2i\omega (P_H - P_E) + P_{\text{пот}}, \quad (12.2.6)$$

где

$$P_H = \frac{1}{4} \int_V \mu_0 \mu |H|^2 dV \quad \text{— средняя накопленная энергия магнитного поля;}$$

$$P_E = \frac{1}{4} \int_V \varepsilon_0 \varepsilon |E|^2 dV \quad \text{— средняя накопленная энергия электрического поля;}$$

$$P_{\text{пот}} = \frac{1}{2} \int_V \sigma |E|^2 dV \quad \text{— средняя мощность омических потерь.}$$

Таким образом, комплексная мощность $ui^*/2$, поступающая в двухполюсник, включает в себя действительную часть $P_{\text{пот}}$ (омические потери) и мнимую часть $2\omega(P_H - P_E)$, которая, в свою очередь, выражается через накопленную магнитную и электрическую мощности и частоту. Это есть теорема Умова–Пойнтинга для двухполюсника. Соотношение (12.2.6) — математическая формулировка теоремы.

Так как $\bar{u} = \bar{Z}i$, где \bar{Z} — нормированное сопротивление двухполюсника, то

$$\bar{Z} = \frac{4i\omega(P_H - P_E) + 2P_{\text{пот}}}{|i|^2}. \quad (12.2.7)$$

Аналогично для проводимости \bar{Y} получим

$$\bar{Y} = \frac{4i\omega(P_E - P_H) + 2P_{\text{пот}}}{|u|^2}. \quad (12.2.8)$$

Если $P_H = P_E$, то величина $\bar{Z}(\bar{Y})$ является чисто действительной; при $P_{\text{пот}} = 0$ (потери равны нулю) нормированное сопротивление \bar{Z} — чисто мнимая величина.

Теорема Умова–Пойнтинга (12.2.6) для случая $2N$ -полюсника записывается в виде

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^N u_k i_k^* = 2i\omega(P_H - P_E) + P_{\text{пот}}, \quad (12.2.9)$$

где $P_H, P_E, P_{\text{пот}}$ имеют тот же смысл, что и в уравнении (12.2.6).

Таким образом, теорема Умова–Пойнтинга для $2N$ -полюсника в форме (12.2.9) устанавливает связь между комплексной мощностью, поступающей на входы, активной мощностью и накопленной энергией.

12.2.2. Лемма Лоренца для многополюсников. Если (\vec{E}_1, \vec{H}_1) и (\vec{E}_2, \vec{H}_2) представляют собой два различных решения однородных (без источников) уравнений Максвелла для комплексных амплитуд, удовлетворяющие граничным условиям внутри рассматриваемого устройства с изотропным заполнением, то на одной и той же частоте имеет место равенство

$$\text{div} \{ [\vec{E}_1, \vec{H}_2] - [\vec{E}_2, \vec{H}_1] \} = 0. \quad (12.2.10)$$

Это соотношение справедливо как для двух различных типов волн устройства, так и для двух различных генераторов СВЧ.

Проинтегрируем уравнение (12.2.10) по объему устройства (рис. 12.1) и применим теорему Остроградского–Гаусса. Тогда

$$\int_{S_1+S_2+\dots+S_N} \{[\vec{E}_1, \vec{H}_2] - [\vec{E}_2, \vec{H}_1]\} d\vec{S} = 0, \quad (12.2.11)$$

где интегрирование ведется по поперечным сечениям S_k ($k = \overline{1, N}$) входов $2N$ -полюсника в плоскостях отсчета фаз. При выводе соотношения (12.2.11) было учтено, что вектор \vec{E} параллелен вектору $d\vec{S}$ на идеально проводящей части поверхности S (рис. 12.1).

Если два решения соответствуют одному и тому же типу волны, то есть предполагается наличие двух генераторов с одинаковой частотой ω , тогда на любом входе m

$$\int_{S_m} [\vec{E}_1, \vec{H}_1] d\vec{S} = C \int_{S_m} [\vec{E}_2, \vec{H}_2] d\vec{S}, \quad (12.2.12)$$

где C — комплексный постоянный множитель.

Если устройство внутри объема V содержит анизотропную среду с тензорами $\vec{\mu}$ и $\vec{\epsilon}$, то лемма Лоренца для комплексных амплитуд имеет вид (сторонние источники отсутствуют):

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \{[\vec{E}_1, \vec{H}_2] - [\vec{E}_2, \vec{H}_1]\} + i\omega(\mu_0 \vec{H}_2 \vec{\mu} \vec{H}_1 - \\ - \mu_0 \vec{H}_1 \vec{\mu} \vec{H}_2 - \epsilon_0 \vec{E}_2 \vec{\epsilon} \vec{E}_1 + \epsilon_0 \vec{E}_1 \vec{\epsilon} \vec{E}_2) = 0. \end{aligned} \quad (12.2.13)$$

Представим $\vec{\mu}$ и $\vec{\epsilon}$ в виде сумм симметричных $\vec{\mu}_c$, $\vec{\epsilon}_c$ и антисимметричных $\vec{\mu}_{ac}$, $\vec{\epsilon}_{ac}$ тензоров:

$$\vec{\mu} = \vec{\mu}_c + \vec{\mu}_{ac}, \quad \vec{\epsilon} = \vec{\epsilon}_c + \vec{\epsilon}_{ac}.$$

Легко убедиться, что

$$\vec{H}_1 \vec{\mu}_c \vec{H}_2 = \vec{H}_2 \vec{\mu}_c \vec{H}_1, \quad \vec{H}_1 \vec{\mu}_{ac} \vec{H}_2 = -\vec{H}_2 \vec{\mu}_{ac} \vec{H}_1.$$

Аналогичные соотношения имеют место и для тензоров $\vec{\epsilon}_c$, $\vec{\epsilon}_{ac}$. С учетом этих соотношений лемма Лоренца принимает более простой вид:

$$\operatorname{div} \{[\vec{E}_1, \vec{H}_2] - [\vec{E}_2, \vec{H}_1]\} + 2i\omega(\mu_0 \vec{H}_2 \vec{\mu}_{ac} \vec{H}_1 - \epsilon_0 \vec{E}_2 \vec{\epsilon}_{ac} \vec{E}_1) = 0. \quad (12.2.14)$$

Проинтегрировав уравнение (12.2.14) по объему устройства V (рис. 12.1) и применив теорему Остроградского–Гаусса, получим:

$$\begin{aligned} \int_{S_1+S_2+\dots+S_N} \{[\vec{E}_1, \vec{H}_2] - [\vec{E}_2, \vec{H}_1]\} d\vec{S} = \\ = -2i\omega \int_V (\mu_0 \vec{H}_2 \vec{\mu}_{ac} \vec{H}_1 - \epsilon_0 \vec{E}_2 \vec{\epsilon}_{ac} \vec{E}_1) dV. \end{aligned} \quad (12.2.15)$$

Устройства, для которых справедливы соотношения (12.2.14), (12.2.15), называются *независимыми*. Заметим, что необходимым условием появления антисимметричных компонент тензоров $\vec{\mu}$ и $\vec{\epsilon}$ является наличие внешнего постоянного поля или постоянной намагниченности. Это находится в соответствии с *обобщенным принципом симметрии кинетических коэффициентов* (принцип-

ном Онсагера), который может быть записан в виде:

$$\mu_{ij}(\omega, \vec{k}, \vec{B}_0) = \mu_{ji}(\omega, -\vec{k}, -\vec{B}_0), \quad (12.2.16)$$

где \vec{B}_0 — постоянная магнитная индукция.

Наличие сред, обладающих тензорами $\bar{\mu}$ или $\bar{\epsilon}$ с такими антисимметричными компонентами, является по определению условием создания невзаимных устройств. Однако наличие постоянного магнитного (электрического) поля или постоянной намагниченности служит необходимым, но не достаточным условием создания невзаимных устройств.

12.2.3. Теорема Фостера для недиссипативных многополюсников. Рассмотрим вначале недиссипативный двухполюсник с изотропным заполнением (рис. 12.3). Для него справедлива следующая теорема Фостера:

$$\begin{aligned} \int_{S_1} \{ [\vec{E}, d\vec{H}^*] - [d\vec{E}, \vec{H}^*] \} d\vec{S} = \\ = i d\omega \int_V (\mu_0 \mu |\vec{H}|^2 + \epsilon_0 \epsilon |\vec{E}|^2) dV, \end{aligned} \quad (12.2.17)$$

где $d\vec{H}$ и $d\vec{E}$ — приращения векторов \vec{H} и \vec{E} при изменении частоты ω на величину $d\omega$. Введем на входе двухполюсника нормированные напряжение u и ток i , так что

$$u = \bar{Z}i, \quad (12.2.18)$$

где \bar{Z} — нормированное сопротивление.

Используя соотношения (12.2.17), (12.2.18), нетрудно показать, что для нормированного реактивного сопротивления \bar{X} недиссипативного двухполюсника справедливо следующее соотношение ($\bar{Z} = i\bar{X}$):

$$\frac{d\bar{X}}{d\omega} = \frac{4(P_E + P_H)}{|i|^2} \geq 0. \quad (12.2.19)$$

Аналогично для нормированной реактивной проводимости \bar{B} двухполюсника без потерь имеем ($\bar{Y} = i\bar{B}$):

$$\frac{d\bar{B}}{d\omega} = \frac{4(P_E + P_H)}{|u|^2} \geq 0. \quad (12.2.20)$$

Соотношения (12.2.19), (12.2.20) выражают тот факт, что наклоны кривых зависимости реактивных сопротивления и проводимости от частоты всегда положительны. На рис. 12.4 приведена типичная зависимость нормированного реактивного сопротивления \bar{X} от частоты для двухполюсника без потерь.

Из соотношений (12.2.7), (12.2.19) можно сделать следующие выводы:

1. Для устройств без потерь на частоте $\omega = 0$ нормированное реактивное сопротивление \bar{X} равно нулю или $-\infty$. Между двумя полюсами кривая зависимости \bar{X} от частоты обязательно пересекает ось абсцисс; полюса и нули чередуются (рис. 12.4).

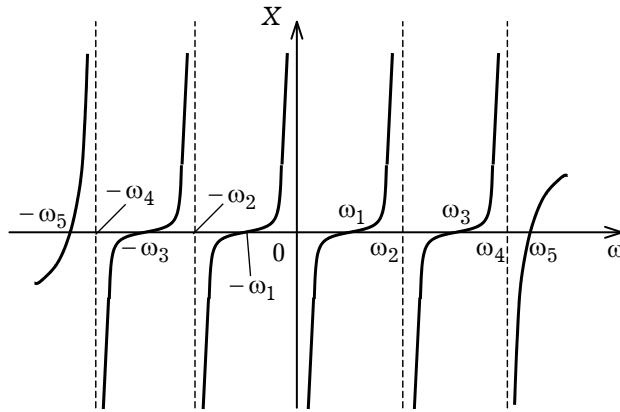


Рис. 12.4

2. Функция $\bar{X} = \bar{X}(\omega)$ является нечетной: $\bar{X}(-\omega) = -\bar{X}(\omega)$.

3. На комплексной плоскости сопротивление \bar{X} полностью определяется своими полюсами и нулями с точностью до некоторой произвольной постоянной A :

$$\bar{X} = \frac{A_\infty}{\omega} \prod_{n=2}^N \frac{(\omega^2 - \omega_{2n-1}^2)}{(\omega^2 - \omega_{2n-2}^2)}. \quad (12.2.21)$$

На основании теории вычетов (12.2.21) можно записать в виде ряда:

$$\bar{X} = A_\infty \omega + \frac{a_0}{\omega} + 2\omega \sum_{n=2}^N \frac{a_{2n-2}}{\omega^2 - \omega_{2n-2}^2}, \quad (12.2.22)$$

где A_∞ и коэффициенты a_0, a_2, a_{2n-2} называются *вычетами в соответствующих полюсах*.

Так как $\bar{B} = -1/\bar{X}$, то в соответствии с уравнением (12.2.22) имеем:

$$\bar{B} = C_\infty \omega + \frac{b_0}{\omega} + 2\omega \sum_{n=2}^N \frac{b_{2n-3}}{\omega^2 - \omega_{2n-3}^2}. \quad (12.2.23)$$

Таким образом, полюсы для \bar{X} становятся нулями для \bar{B} , а нули для \bar{X} — полюсами для \bar{B} .

В окрестности точки ω_{2i} запишем:

$$\bar{X} \approx \frac{2a_{2i}\omega}{\omega^2 - \omega_{2i}^2} \quad (12.2.24)$$

и

$$\bar{B} \approx -\frac{\omega^2 - \omega_{2i}^2}{2a_{2i}\omega}, \quad (12.2.25)$$

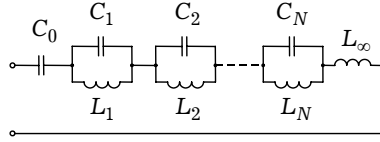


Рис. 12.5

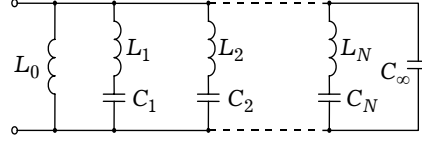


Рис. 12.6

где

$$a_{2i} = - \frac{1}{\left. \frac{d\bar{B}}{d\omega} \right|_{\omega_{2i}}}, \quad (12.2.26)$$

то есть вычеты функции $\bar{X}(\omega)$ могут быть получены, если известны значения производных $d\bar{B}(\omega)/d\omega$.

12.2.4. Первая эквивалентная схема. Соотношение (12.2.22) соответствует ряду параллельных резонансных контуров, соединенных последовательно (рис. 12.5). Типичное слагаемое $2a_{2i}\omega/(\omega^2 - \omega_{2i}^2)$ соответствует параллельному резонансному контуру, причем $\omega_{2i}^2 = 1/(L_i C_i)$.

Непосредственное сравнение схемы, изображенной на рис. 2.5 с формулой (12.2.22), показывает, что

$$C_0 = -\frac{1}{a_0}, \quad C_i = -\frac{1}{2a_i}, \quad \omega_{2i}^2 = \frac{1}{L_i C_i}, \quad L_\infty = A_0.$$

12.2.5. Вторая эквивалентная схема. Уравнение (12.2.23) соответствует ряду последовательных резонансных контуров, соединенных параллельно (рис. 12.6).

Из непосредственного сравнения схемы, изображенной на рис. 12.6 с формулой (12.2.23), следует, что

$$L_0 = -\frac{1}{b_0}, \quad L_i = -\frac{1}{2b_i}, \quad C_\infty = -\frac{1}{A_\infty}, \quad \omega_{2i-1}^2 = \frac{1}{L_i C_i}.$$

Во многих практических случаях рабочий диапазон устройства находится около какого-либо одного полюса, а другие полюса находятся достаточно далеко и не оказывают влияние на реактивное сопротивление в рабочем диапазоне. Поэтому двухполюсник может быть представлен простым LC -контуром, если пренебречь потерями. Кроме того, если учесть потери, то типичный элемент первой эквивалентной схемы (рис. 12.5) будет состоять из параллельного соединения сопротивления R_i , емкости C_i и индуктивности L_i , причем его добротность $Q_i = \omega_{2i} C_i R_i$ (рис. 12.7а). Для второй эквивалентной схемы элемент состоит из последовательного соединения R_i , L_i и C_i , причем $Q_i = \omega_{2i-1} L_i / R_i$ (рис. 12.7б).

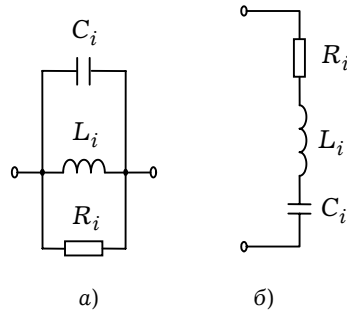


Рис. 12.7

Приведенные выше результаты легко обобщаются на случай $2N$ -полюсника (рис. 12.1). В этом случае теорема Фостера для $2N$ -полюсника записывается в виде

$$\int_{S_1+S_2+\dots+S_N} \{ [\vec{E}, d\vec{H}^*] - [d\vec{E}, \vec{H}^*] \} d\vec{S} = 4 id\omega (P_E + P_H), \quad (12.2.27)$$

где поверхностный интеграл берется по поперечным сечениям плоскостей отсчета фаз всех входов.

Перепишем уравнение (12.2.27) в переменных u_n, i_n ($n = 1, 2, \dots, N$):

$$\sum_{n=1}^N (u_n di_n^* - du_n i_n^*) = -4 id\omega (P_E + P_H). \quad (12.2.28)$$

Так как

$$u_n = \sum_{m=1}^N \bar{Z}_{nm} i_m,$$

то (12.2.28) для недиссипативного $2N$ -полюсника можно записать в виде $\bar{Z}_{nm} = i\bar{X}_{nm}$

$$\sum_{n, m=1}^N i_n i_m^* \frac{d\bar{X}_{mn}}{d\omega} = 4(P_E + P_H) \geq 0. \quad (12.2.29)$$

В матричной форме теорема Фостера записывается следующим образом:

$$\vec{i}_T^* [\bar{X}]' \vec{i} = 4(P_E + P_H) \geq 0, \quad (12.2.30)$$

где

$$[\bar{X}]' = \begin{vmatrix} \frac{d\bar{X}_{11}}{d\omega} & \frac{d\bar{X}_{12}}{d\omega} & \dots & \frac{d\bar{X}_{1N}}{d\omega} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{d\bar{X}_{N1}}{d\omega} & \frac{d\bar{X}_{N2}}{d\omega} & \dots & \frac{d\bar{X}_{NN}}{d\omega} \end{vmatrix}, \quad (12.2.31)$$

вектор \vec{i} определяется соотношением (2.1.8), индекс «Т» означает операцию транспонирования элементов вектора \vec{i}^* :

$$\vec{i}_T^* = \{i_1^*, i_2^*, \dots, i_N^*\}.$$

Из уравнения (12.2.30) также следует, что

$$\det[\vec{X}]' \geq 0. \quad (12.2.32)$$

Таким образом, можно сказать, что теорема Фостера позволяет анализировать сложные многополюсники и синтезировать их из простых элементов подобно тому, как гармонический анализ дает возможность анализировать и синтезировать периодические волны сложной формы путем разложения их на простые гармонические составляющие.

12.3(*). Соотношения между характеристическими матрицами (дескрипторами) многополюсника

12.3.1. Связь между матрицами $[\vec{Z}]$, $[\vec{Y}]$, $[S]$. Самой распространенной в теории линейных устройств СВЧ является матрица рассеяния. Поэтому подробно рассмотрим ее основные свойства. И прежде всего установим взаимосвязь между матрицей рассеяния $[S]$ и матрицей сопротивлений $[\vec{Z}]$. Имея в виду, что формулы (12.1.4) справедливы для всех входных линий $2N$ -полюсника (рис. 12.2б), их можно представить в матричной форме относительно векторов-столбцов нормированных напряжений \vec{u} и токов \vec{i} :

$$2\vec{u}_n = \vec{u} + \vec{i}, \quad 2\vec{u}_o = \vec{u} - \vec{i}. \quad (12.3.1)$$

Так как $\vec{u}_o = \vec{S}\vec{u}_n$, то из (12.3.1) следует, что

$$\vec{u} = (\vec{I} - \vec{S})^{-1} (\vec{I} + \vec{S})\vec{i},$$

где \vec{I} — единичная матрица.

Сопоставляя последнее соотношение с уравнением (12.1.10), получаем формулу связи матриц $[\vec{Z}]$ и \vec{S} :

$$[\vec{Z}] = (\vec{I} - \vec{S})^{-1} (\vec{I} + \vec{S}), \quad (12.3.2)$$

из которой следует, что матрица $[\vec{Z}]$ является неопределенной при обращении в нуль определителя матрицы, подлежащей обращению, то есть при $\det(\vec{I} - \vec{S}) = 0$.

Аналогично можно получить выражение, связывающее матрицы $[\vec{Y}]$ и \vec{S} :

$$[\vec{Y}] = (\vec{I} + \vec{S})^{-1} (\vec{I} - \vec{S}) \quad (12.3.3)$$

которое справедливо при условии, что определитель $\det(\vec{I} + \vec{S}) \neq 0$. При $\det(\vec{I} + \vec{S}) = 0$ матрица нормированных проводимостей $[\vec{Y}]$ для многополюсника отсутствует. В качестве примера многополюсника, для которого нельзя ввести матрицы $[\vec{Z}]$ и $[\vec{Y}]$, можно привести шестиполюсник в виде параллельного разветвления трех линий передачи, для которого

$$\det(\vec{I} - \vec{S}) = \det(\vec{I} + \vec{S}) = 0.$$

Из (12.3.2), (12.3.3) можно получить формулы для матрицы рассеяния через матрицы $[\bar{Z}]$ и $[\bar{Y}]$:

$$\bar{S} = ([\bar{Z}] - \bar{I})([\bar{Z}] + \bar{I})^{-1}, \quad \bar{S} = (\bar{I} - [\bar{Y}])(\bar{I} + [\bar{Y}])^{-1}. \quad (12.3.4)$$

12.3.2. Зависимость матриц многополюсников от нумерации входов. Любая матрица многополюсника имеет смысл только при установленном порядке нумерации входов. При изменении нумерации входов получаются другие матрицы: числовые значения элементов остаются теми же самыми, но расположение элементов матрицы изменяется. Для установления зависимости элементов матрицы $2N$ -полюсника от нумерации входов введем N -порядка квадратную матрицу перенумерования \bar{G} по следующему правилу. В каждую строку матрицы \bar{G} запишем $N - 1$ нулей и одну единицу в ту позицию, номер которой соответствует новому номеру входа, прежний номер которого равен номеру этой строки. Нетрудно показать, что матрица перенумерования является ортогональной, то есть

$$\bar{G} \bar{G}_T = \bar{I},$$

где \bar{I} — единичная матрица N -порядка, индекс «Т» указывает на транспонирование матрицы \bar{G} .

Обозначив через символ \bar{S}_G матрицу рассеяния $2N$ -полюсника с перенумерованными входами, запишем формулу для преобразования исходной матрицы рассеяния \bar{S} :

$$\bar{S}_G = \bar{G}_T \bar{S} \bar{G}, \quad (12.3.5)$$

которая является частным случаем известного в математике преобразования подобия.

Аналогично

$$[\bar{Z}]_G = \bar{G}_T [\bar{Z}] \bar{G}, \quad [\bar{Y}]_G = \bar{G}_T [\bar{Y}] \bar{G}. \quad (12.3.6)$$

Перенумерация входов позволяет приводить матрицы устройств к стандартной форме, принятой для многополюсников того или иного вида.

12.3.3. Сдвиг плоскостей отсчета фаз на входах многополюсника. На практике иногда необходимо преобразовать матрицы многополюсника к новым плоскостям отсчета фаз относительно первоначальных. Наиболее просто эта задача решается для матриц рассеяния. При изменении плоскостей отсчета входов многополюсника в элементы первоначальной матрицы рассеяния вносятся дополнительные запаздывающие или опережающие сдвиги из-за удлинения или укорочения путей прохождения сигналов. Кроме того, из-за затухания волн в подводящих линиях происходят изменения модулей элементов матрицы рассеяния.

Таким образом, формулу для преобразования элементов матрицы рассеяния \bar{S}^Φ с измененными плоскостями отсчета фаз на входах многополюсника можно записать в виде

$$S_{mn}^\Phi = S_{mn} \exp(-i\gamma_m l_m - i\gamma_n l_n), \quad (12.3.7)$$

где l_m и l_n — смещения плоскостей отсчета фаз в m -й и n -й входных линиях; $\gamma_m = \beta_m - i\alpha_m$, $\gamma_n = \beta_n - i\alpha_n$ — постоянные распространения в этих линиях.

Сдвиг плоскостей отсчета приводит также к изменению элементов матриц нормированных сопротивлений и проводимостей. Однако для элементов преобразованных матриц $[\bar{Z}]^\Phi$ и $[\bar{Y}]^\Phi$ простых формул не существует. Поэтому расчет измененных матриц сопротивления и проводимостей должен производиться путем перехода от этих матриц к матрице рассеяния и обратно по формулам (12.3.2)–(12.3.4).

12.4(*). Основные свойства матрицы рассеяния

Самой распространенной в теории линейных устройств СВЧ является матрица рассеяния. Поэтому ниже подробно рассмотрим основные ее свойства.

12.4.1. Физический смысл элементов матрицы рассеяния. Для матрицы рассеяния существуют простейшие испытательные режимы, позволяющие определить физический смысл элементов матрицы \tilde{S} . Обратившись к матричному уравнению (12.1.8), можно заметить, что если отлично от нуля только напряжение одной из падающих волн, то соответствующий столбец матрицы \tilde{S} может быть легко найден:

$$S_{mk} = \left. \frac{u_{om}}{u_{nk}} \right|_{u_{ni}=0; i=1, N; i \neq k}. \quad (12.4.1)$$

Из выражения (12.4.1) следует четкий физический смысл. Внедиагональный элемент S_{mk} ($m \neq k$) представляет собой волновой коэффициент передачи по нормированному напряжению из плеча k в плечо m при согласованных нагрузках на других входах. Диагональный элемент S_{mm} является коэффициентом отражения по нормированному напряжению для m - входа при согласованных нагрузках на других входах.

Заметим, что согласно выражению (12.4.1) элементы матрицы рассеяния безразмерны.

12.4.2. Симметричность матрицы рассеяния для взаимных устройств. К взаимным устройствам относятся многополюсники, которые удовлетворяют требованиям теоремы взаимности относительно двух любых входов при произвольных режимах на остальных входах. Математически это условие имеет вид

$$\tilde{S} = \tilde{S}_T \text{ или } S_{ij} = S_{ji}. \quad (12.4.2)$$

Аналогичные соотношения взаимности имеют место и для матриц нормированных сопротивлений и проводимостей:

$$[\bar{Z}] = [\bar{Z}]_T, \quad [\bar{Y}] = [\bar{Y}]_T. \quad (12.4.3)$$

Симметричность матриц взаимного многополюсника значительно уменьшает число независимых параметров. Для полного описания взаимного $2N$ -полюсника достаточно всего $N(N+1)/2$ элементов матрицы рассеяния.

Необходимым условием взаимности устройств является отсутствие внутри него анизотропных включений, например, подмагниченных ферритов или плазмы.

12.4.3. Унитарность матрицы рассеяния для недиссипативных многополюсников. Недиссипативными называют такие многополюсники, в которых отсутствуют внутренние потери электромагнитной энергии. Условием отсутствия потерь внутри многополюсника является унитарность матрицы \vec{S} :

$$\vec{S}_T^* \vec{S} = \vec{I}. \quad (12.4.4)$$

Унитарные матрицы обладают рядом характерных свойств. Норма каждого столбца унитарной матрицы (то есть корень квадратный из суммы квадратов модулей элементов столбца) равна единице, столбцы ортогональны между собой, а определитель унитарной матрицы имеет единичный модуль и его можно представить в виде

$$\det \vec{S} = e^{i\varphi}. \quad (12.4.5)$$

В качестве примера приведем в развернутом виде условие унитарности матрицы \vec{S} (12.4.4) для недиссипативного четырехполюсника:

$$\begin{aligned} |S_{11}|^2 + |S_{21}|^2 = 1, \quad |S_{22}|^2 + |S_{12}|^2 = 1, \\ S_{11}^* S_{12} + S_{21}^* S_{22} = 0. \end{aligned} \quad (12.4.6)$$

Первые два равенства являются выражениями закона сохранения энергии при возбуждении четырехполюсника со стороны входов 1 и 2 и при согласованной нагрузке на противоположном входе. Третье — устанавливает дополнительную связь между амплитудами и фазами элементов матрицы \vec{S} . Из совместного решения всех трех равенств вытекает, что для любого недиссипативного четырехполюсника должны выполняться ограничения

$$\begin{aligned} |S_{11}| = |S_{22}|, \quad |S_{12}| = |S_{21}|, \\ \varphi_{11} + \varphi_{22} = \varphi_{12} + \varphi_{21} \pm \pi, \end{aligned} \quad (12.4.7)$$

где φ_{mn} — фаза элемента S_{mn} матрицы рассеяния.

12.4.4. Коммутируемость матрицы рассеяния \vec{S} с матрицей симметрии \vec{G} для симметричных многополюсников. Матрица симметрии \vec{G} вводится аналогично матрице перенумерования, введенной в разделе 12.3.2. Она также должна содержать в каждой строке и в каждом столбце по одному ненулевому элементу, который может принимать значения ± 1 , причем -1 соответствует смене положительного направления нормированного напряжения на соответствующем входе. Применение матриц симметрии при анализе различных симметричных устройств СВЧ основано на том, что они коммутируют с матрицами параметров многополюсника:

$$\vec{G}\vec{S} = \vec{S}\vec{G}, \quad \vec{G}[\vec{Z}] = [\vec{Z}]\vec{G}, \quad \vec{G}[\vec{Y}] = [\vec{Y}]\vec{G}. \quad (12.4.8)$$

В качестве примера составления матрицы \vec{G} рассмотрим разветвление двухпроводных линий передачи (рис. 12.8). Режим шестиполосника и его описание останутся неизменными, если при «зеркальной» замене правой половины шестиполосника на

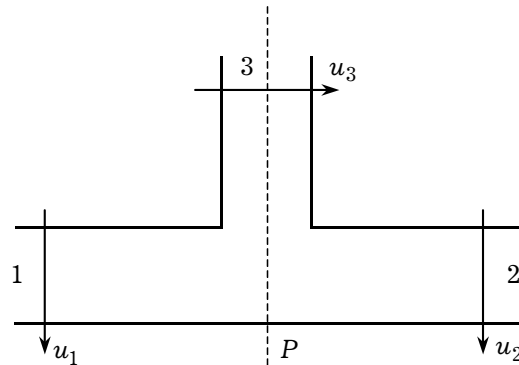


Рис. 12.8

левую одновременно изменяется положительное направление напряжения на входе 3 на противоположное. Поэтому матрица симметрии для разветвления двухпроводных линий передачи должна соответствовать перенумерации входов: $1 \rightarrow 2$, $2 \rightarrow 1$ и $3 \rightarrow -3$, что дает

$$\vec{G} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

12.4.5. Преимущества матрицы рассеяния. В заключение этого раздела приведем основные преимущества использования матрицы \vec{S} по сравнению с матрицами нормированных проводимостей $[\vec{Y}]$ и сопротивлений $[\vec{Z}]$.

1. В технике СВЧ и КВЧ кроме частоты непосредственно можно измерить только КСВН и мощность. Эти измерения по существу эквивалентны измерениям значений элементов матрицы \vec{S} . Что касается матриц $[\vec{Z}]$ и $[\vec{Y}]$, то аналогичных непосредственных измерений произвести нельзя.

2. Свойство унитарности матрицы \vec{S} позволяет легко проверить условие баланса мощностей для устройства без потерь. При использовании матриц $[\vec{Z}]$ и $[\vec{Y}]$ проверить это условие затруднительно.

3. При изменении положения плоскости отсчета многополюсника меняются только фазы коэффициентов матрицы рассеяния. При тех же условиях элементы матриц $[\vec{Z}]$ и $[\vec{Y}]$ будут меняться как по фазе, так и по модулю.

4. При определенных условиях физической симметрии можно определить матрицу \vec{S} исходя только из геометрических соображений.

12.5(*). Анализ четырехполюсников каскадной структуры с помощью матриц передачи

Рассмотренная ранее матрица рассеяния неудобна для анализа схем, состоящих из каскадно соединенных четырехполюсников, для которых характерно, что выход

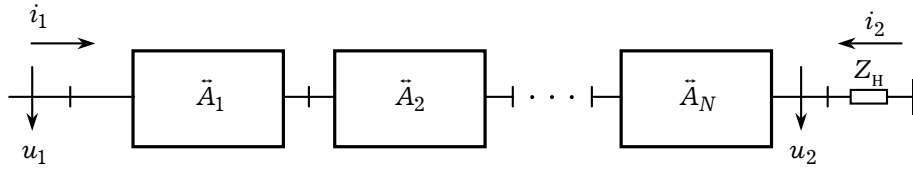


Рис. 12.9

предшествующего четырехполюсника является входом последующего (рис. 12.9). Анализ такого соединения значительно упрощается, если характеризовать четырехполюсники матрицами передачи.

Для классической матрицы передачи \tilde{A} связь воздействия и реакции имеет вид:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ i_1 \end{pmatrix} = \tilde{A} \begin{pmatrix} u_2 \\ -i_2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A} \equiv \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}. \quad (12.5.1)$$

При таком определении матрица передачи^{*)} для N -каскадно включенных четырехполюсников оказывается равной произведению матриц передачи \tilde{A}_n отдельных каскадов:

$$\tilde{A} = \prod_{n=1}^N \tilde{A}_n, \quad (12.5.2)$$

причем перемножать матрицы каскадов надо именно в той последовательности, в какой они включены в тракт. Иногда предпочитают пользоваться волновой матрицей передачи \tilde{T} , вводимой матричным соотношением:

$$\begin{pmatrix} u_{n1} \\ u_{01} \end{pmatrix} = \tilde{T} \begin{pmatrix} u_{n2} \\ u_{02} \end{pmatrix}, \quad \tilde{T} \equiv \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix}. \quad (12.5.3)$$

Зная элементы матрицы \tilde{A} , легко анализировать двухполюсники каскадной структуры, образующиеся при нагружении последнего каскада нормированной нагрузкой $Z_n = u_2 / (-i_2)$ (рис. 12.9). Нормированное входное сопротивление такого двухполюсника будет

$$Z_{\text{вх}} = \frac{u_1}{i_1} = \frac{A_{11}Z_n + A_{12}}{A_{21}Z_n + A_{22}}, \quad (12.5.4)$$

где использованы элементы матрицы \tilde{A} , определяемой соотношением (12.5.2).

Уравнения перехода от элементов матрицы \tilde{S} к элементам матрицы \tilde{A} имеют вид:

$$\begin{aligned} A_{11} &= \frac{1 + S_{11} - S_{22} - \Delta S}{2S_{21}}, & A_{12} &= \frac{1 + S_{11} + S_{22} + \Delta S}{2S_{21}}, \\ A_{21} &= \frac{1 - S_{11} - S_{22} + \Delta S}{2S_{21}}, & A_{22} &= \frac{1 - S_{11} + S_{22} - \Delta S}{2S_{21}}, \end{aligned} \quad (12.5.5)$$

^{*)} В литературе существуют и другие обозначения для элементов матрицы \tilde{A} :
 $A_{11} = a, A_{12} = b, A_{21} = c, A_{22} = d$

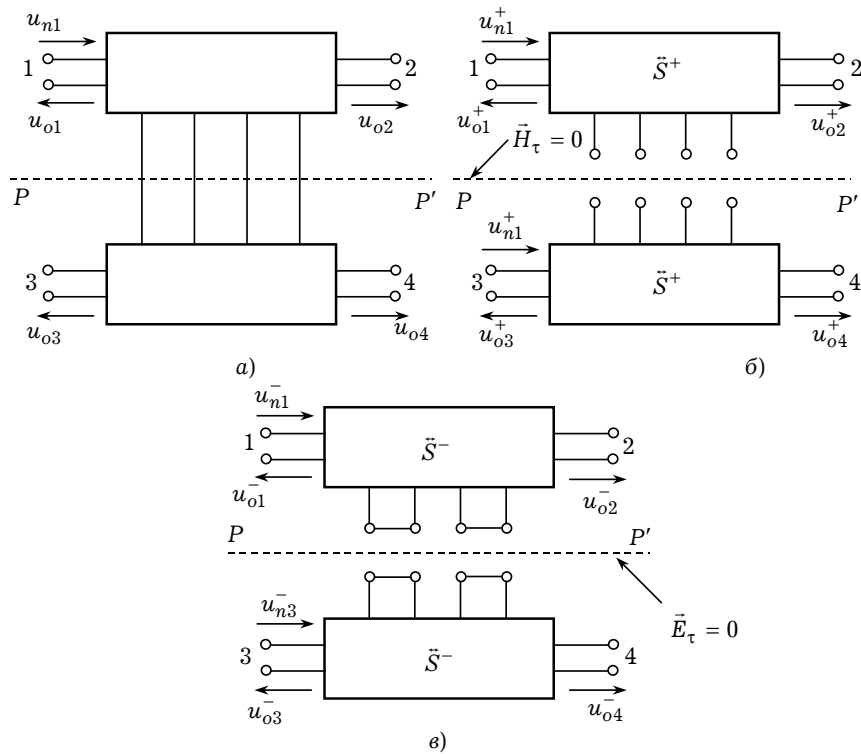


Рис. 12.10

где

$$\Delta S = S_{11}S_{22} - S_{21}S_{12}.$$

Заметим, что если $S_{21} = 0$, то элементы матрицы \bar{A} становятся неопределенными. Параметр S_{21} представляет собой коэффициент прямой передачи, и в СВЧ- и КВЧ-цепях он редко бывает равным нулю.

Формулы перехода от элементов матрицы \bar{A} к элементам матрицы рассеяния \bar{S} определяются следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} S_{11} &= \frac{(A_{11} - A_{22}) + (A_{12} - A_{21})}{A_{11} + A_{12} + A_{21} + A_{22}}, & S_{12} &= \frac{2(A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21})}{A_{11} + A_{12} + A_{21} + A_{22}}, \\ S_{21} &= \frac{2}{A_{11} + A_{12} + A_{21} + A_{22}}, & S_{22} &= \frac{-(A_{11} - A_{22}) + (A_{12} - A_{21})}{A_{11} + A_{12} + A_{21} + A_{22}}. \end{aligned} \quad (12.5.6)$$

Определенные соотношениями (12.5.3) T_{ij} — параметры связаны с элементами S_{ij} следующим образом:

$$\begin{aligned} T_{11} &= -\frac{\Delta S}{S_{21}}, & T_{12} &= \frac{S_{11}}{S_{21}}, \\ T_{21} &= -\frac{S_{22}}{S_{21}}, & T_{22} &= \frac{1}{S_{21}}. \end{aligned} \quad (12.5.7)$$

Как и в случае \vec{A} матрицы, элементы матрицы \vec{T} становятся неопределенными, если коэффициент прямой передачи $S_{21} = 0$.

Матрица рассеяния устройств СВЧ- и КВЧ-диапазонов может быть найдена из T -матрицы по следующим формулам:

$$\begin{aligned} S_{11} &= \frac{T_{12}}{T_{22}}, & S_{12} &= T_{11} - \frac{T_{12}T_{21}}{T_{22}}, \\ S_{21} &= \frac{1}{T_{22}}, & S_{22} &= -\frac{T_{21}}{T_{22}}. \end{aligned} \tag{12.5.8}$$

Для того, чтобы можно было осуществить преобразование \vec{T} -матрицы в \vec{S} -матрицу, параметр T_{22} не должен быть равным нулю.

Матрица передачи \vec{A} обладает следующими свойствами:

1. Для взаимных четырехполосников ($S_{12} = S_{21}$):

$$A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = 1. \tag{12.5.9}$$

2. Для симметричных четырехполосников (которые остаются неизменными при замене входных зажимов на выходные зажимы):

$$A_{11} = A_{22}. \tag{12.5.10}$$

3. Для недиссипативного четырехполосника в матрице передачи \vec{A} элементы A_{11} и A_{22} должны быть чисто вещественными, а элементы A_{12} и A_{21} — чисто мнимыми.

12.6(*). Метод симметричных восьмиполосников (метод синфазного и противофазного возбуждений)

Этот метод сводит анализ восьмиполосников, имеющих плоскость симметрии (рис. 12.10), к анализу более простых четырехполосников, представляющих собой «половины» восьмиполосников.

12.6.1. Режим холостого хода (синфазное возбуждение). Рассмотрим восьмиполосник (рис. 12.10а), симметричный относительно плоскости PP' . Такой восьмиполосник можно рассмотреть в двух режимах: синфазное возбуждение, когда в плоскости симметрии находится максимум напряжения, и противофазное возбуждение, когда в плоскости симметрии находится максимум тока. Рассмотрим первый режим. Подведем ко входам 1 и 3 одинаковые по амплитуде синфазные волны $u_{n1}^+ = u_{n3}^+ = u_n / 2$. Допустим, что все остальные входы согласованы. Эти волны относительно плоскости симметрии мы будем называть четными волнами. В силу симметрии максимум напряжения будет в плоскости PP' (рис. 12.10б), то есть в ней устанавливается пучность распределения напряженности касательного электрического поля \vec{E}_τ и нуль распределения напряженности касательного магнитного поля \vec{H}_τ (режим холостого хода). Плоскость PP' условно расчленяет восьмиполос-

ник на два не связанных между собой одинаковых (парциальных) четырехполюсника синфазного возбуждения с матрицами рассеяния

$$\tilde{S}^+ = \begin{bmatrix} S_{11}^+ & S_{12}^+ \\ S_{21}^+ & S_{22}^+ \end{bmatrix}.$$

В этом случае четные волны, отраженные от входов восьмиполюсника, соответственно будут связаны соотношениями:

$$\begin{aligned} u_{o1}^+ &= u_{o3}^+ = S_{11}^+ \frac{u_n}{2}, \\ u_{o2}^+ &= u_{o4}^+ = S_{21}^+ \frac{u_n}{2}. \end{aligned} \quad (12.6.1)$$

12.6.2. Режим короткого замыкания (противофазное возбуждение). Если же к входам 1 и 3 подвести одинаковые по амплитуде противофазные (сдвинутые на 180°) волны, то есть $u_{n1}^- = -u_{n3}^- = u_n/2$ (нечетные волны), то в плоскости PP' будет нуль напряжения (рис. 12.10в). В этом случае в плоскости симметрии устанавливается пучность распределения напряженности касательного магнитного поля \vec{H}_τ и нуль распределения напряженности касательного электрического поля \vec{E}_τ (режим короткого замыкания). Плоскость симметрии условно расчленяет восьмиполюсник на два не связанных между собой одинаковых парциальных четырехполюсника противофазного возбуждения с матрицами рассеяния:

$$\tilde{S}^- = \begin{bmatrix} S_{11}^- & S_{12}^- \\ S_{21}^- & S_{22}^- \end{bmatrix}. \quad (12.6.2)$$

Тогда волны, отраженные от входов восьмиполюсника, будут связаны соотношениями

$$u_{o1}^- = -u_{o3}^- = S_{11}^- \frac{u_n}{2}, \quad u_{o2}^- = -u_{o4}^- = S_{21}^- \frac{u_n}{2}. \quad (12.6.3)$$

12.6.3. Общее решение задачи возбуждения восьмиполюсников со стороны плеча 1 волной амплитудой u_n определится в виде наложения (суперпозиции) частных решений для синфазного и противофазного возбуждений:

$$\begin{aligned} u_{n1} &= u_{n1}^+ + u_{n1}^- = u_n, \quad u_{n3} = u_{n3}^+ + u_{n3}^- = 0, \\ u_{o1} &= u_{o1}^+ + u_{o1}^- = (S_{11}^+ + S_{11}^-) \frac{u_n}{2} = S_{11} u_n, \\ u_{o2} &= u_{o2}^+ + u_{o2}^- = (S_{21}^+ + S_{21}^-) \frac{u_n}{2} = S_{21} u_n, \\ u_{o3} &= u_{o3}^+ + u_{o3}^- = (S_{11}^+ - S_{11}^-) \frac{u_n}{2} = S_{31} u_n, \\ u_{o4} &= u_{o4}^+ + u_{o4}^- = (S_{21}^+ - S_{21}^-) \frac{u_n}{2} = S_{41} u_n. \end{aligned} \quad (12.6.4)$$

12.6.4. Связь между матрицами. Из этих соотношений следует, что между элементами матрицы рассеяния восьмиполюсника \tilde{S} (рис. 12.10а) и элементами матриц рассеяния четырехполюсников S^+ и S^- (рис. 12.10 б и рис. 12.10 в) существуют следующие

щие зависимости:

$$\begin{aligned} S_{11} &= \frac{S_{11}^+ + S_{11}^-}{2}, & S_{21} &= \frac{S_{21}^+ + S_{21}^-}{2}, \\ S_{31} &= \frac{S_{11}^+ - S_{11}^-}{2}, & S_{41} &= \frac{S_{21}^+ - S_{21}^-}{2}. \end{aligned} \quad (12.6.5)$$

Если восьмиполусник возбуждается со стороны плеча 2, то аналогично

$$\begin{aligned} S_{12} &= \frac{S_{12}^+ + S_{12}^-}{2}, & S_{22} &= \frac{S_{22}^+ + S_{22}^-}{2}, \\ S_{32} &= \frac{S_{12}^+ - S_{12}^-}{2}, & S_{42} &= \frac{S_{22}^+ - S_{22}^-}{2}. \end{aligned} \quad (12.6.6)$$

При возбуждении восьмиполусника со стороны плеча 3 определяются элементы матрицы S_{i3} ($i = 1, 4$):

$$\begin{aligned} S_{13} &= \frac{S_{11}^+ - S_{11}^-}{2}, & S_{23} &= \frac{S_{21}^+ - S_{21}^-}{2}, \\ S_{33} &= \frac{S_{11}^+ + S_{11}^-}{2}, & S_{43} &= \frac{S_{21}^+ + S_{21}^-}{2}. \end{aligned} \quad (12.6.7)$$

Аналогично для элементов S_{i4} ($i = 1, 4$) имеем:

$$\begin{aligned} S_{14} &= \frac{S_{12}^+ - S_{12}^-}{2}, & S_{24} &= \frac{S_{22}^+ - S_{22}^-}{2}, \\ S_{34} &= \frac{S_{12}^+ + S_{12}^-}{2}, & S_{44} &= \frac{S_{22}^+ + S_{22}^-}{2}. \end{aligned} \quad (12.6.8)$$

12.6.5. Схема анализа. Опишем последовательность расчета рабочих параметров симметричного восьмиполусника:

1. Определение матриц рассеяния S^+ и S^- четырехполусников, образующихся при синфазном и противофазном видах возбуждения восьмиполусника.
2. Выбор (первостепенного) рабочего параметра (например, элемент S_{11} , характеризующий согласование со стороны первой пары полюсов) и его расчет.
3. Из условия идеальности выбранного первостепенного рабочего параметра (например, $S_{11} = 0$ для идеального согласования входа 1) установление связи между проводимостями (или сопротивлениями) плеч восьмиполусника.
4. Расчет остальных элементов матрицы \tilde{S} с учетом найденных соотношений между проводимостями.
5. Вычисление рабочих параметров восьмиполусника.

12.7(*). Матрицы передачи и рассеяния для некоторых широко используемых четырехполусников

Иногда на практике для анализа четырехполусников используют и ненормированную матрицу передачи, так называемую матрицу $ABCD$, которая определя-

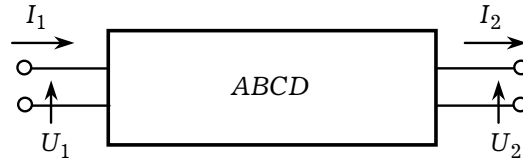


Рис. 12.11

ется как (см. рис. 12.11)

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix}, \quad (12.7.1)$$

где напряжения U_k и токи I_k в k -плече связаны с нормированными величинами u_k , i_k следующим образом:

$$U_k = \sqrt{Z_k} u_k, \quad I_k = \frac{i_k}{\sqrt{Z_k}}, \quad (12.7.2)$$

где Z_k — волновое сопротивление k -входа.

Элементы $ABCD$ -матрицы выражаются через элементы матрицы передачи \bar{A} по формулам:

$$\begin{aligned} A_{11} &= \sqrt{\frac{Z_2}{Z_1}} A, & A_{12} &= \frac{B}{\sqrt{Z_1 Z_2}}, \\ A_{21} &= C \sqrt{Z_1 Z_2}, & A_{22} &= \sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}} D, \end{aligned} \quad (12.7.3)$$

где Z_1 и Z_2 — волновые сопротивления линий передачи соответственно на входах 1 и 2 четырехполюсника.

Уравнения перехода от $ABCD$ -матрицы к матрице рассеяния \bar{S} имеют вид:

$$\begin{aligned} S_{11} &= \frac{AZ_2 + B - CZ_1 Z_2 - DZ_1}{AZ_2 + B + CZ_1 Z_2 + DZ_1}, \\ S_{12} &= \frac{2(AD - BC)\sqrt{Z_1 Z_2}}{AZ_2 + B + CZ_1 Z_2 + DZ_1}, \\ S_{21} &= \frac{2\sqrt{Z_1 Z_2}}{AZ_2 + B + CZ_1 Z_2 + DZ_1}, \\ S_{22} &= \frac{-AZ_2 + B - CZ_1 Z_2 + DZ_1}{AZ_2 + B + CZ_1 Z_2 + DZ_1}. \end{aligned} \quad (12.7.4)$$

В таблице 12.1 приведены выражения для матриц \bar{S} и \bar{A} для наиболее широко используемых четырехполюсников. Причем элементы матрицы \bar{S} являются безразмерными, то есть они являются нормированными.

Таблица 12.1

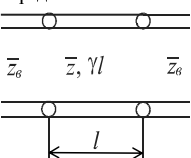
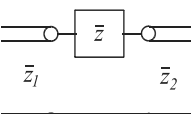
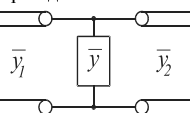
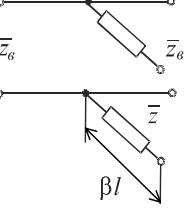
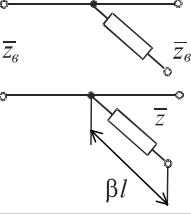
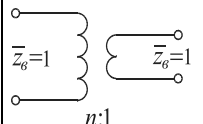
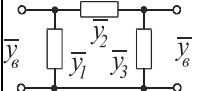
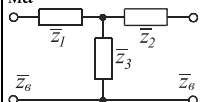
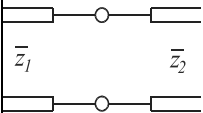
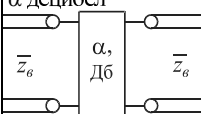
Элемент	ABCD-матрица	S-матрица
1. Отрезок линии передачи 	$\begin{bmatrix} \operatorname{ch} \gamma l & \bar{z}_0 \operatorname{sh} \gamma l \\ \operatorname{sh} \gamma l / \bar{z}_0 & \operatorname{ch} \gamma l \end{bmatrix}$	$\frac{1}{D_s} \begin{bmatrix} (\bar{z}^2 - \bar{z}_0^2) \operatorname{sh} \gamma l & 2\bar{z}_0 \bar{z} \\ 2\bar{z}_0 \bar{z} & (\bar{z}^2 - \bar{z}_0^2) \operatorname{sh} \gamma l \end{bmatrix},$ <p>где $D_s = 2\bar{z}_0 \bar{z} \operatorname{ch} \gamma l + (\bar{z}^2 + \bar{z}_0^2) \operatorname{sh} \gamma l$</p>
2. Последовательное сопротивление 	$\begin{bmatrix} 1 & \bar{z} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{D_s} \begin{bmatrix} \bar{z} + \bar{z}_2 - \bar{z}_1 & 2\sqrt{\bar{z}_1 \bar{z}_2} \\ 2\sqrt{\bar{z}_1 \bar{z}_2} & \bar{z} + \bar{z}_1 - \bar{z}_2 \end{bmatrix},$ <p>где $D_s = \bar{z} + \bar{z}_1 + \bar{z}_2$</p>
3. Параллельная проводимость 	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \bar{y} & 1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{D_s} \begin{bmatrix} \bar{y}_1 - \bar{y}_2 - \bar{y} & 2\sqrt{\bar{y}_1 \bar{y}_2} \\ 2\sqrt{\bar{y}_1 \bar{y}_2} & \bar{y}_2 - \bar{y}_1 - \bar{y} \end{bmatrix},$ <p>где $D_s = \bar{y} + \bar{y}_1 + \bar{y}_2$</p>
4. Разомкнутый шлейф, параллельно включенный в линию 	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/(i\bar{z} \operatorname{tg} \beta l) & 1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{D_s} \begin{bmatrix} -1 & D_s - 1 \\ D_s - 1 & 1 \end{bmatrix},$ <p>где $D_s = 1 + 2i\bar{z} \operatorname{tg} \beta l / Z_0$</p>
5. Короткозамкнутый шлейф, параллельно включенный в линию 	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ i \operatorname{tg} \beta l / \bar{z} & 1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{D_s} \begin{bmatrix} -1 & D_s - 1 \\ D_s - 1 & 1 \end{bmatrix},$ <p>где $D_s = 1 + 2i\bar{z} \operatorname{tg} \beta l / \bar{z}_0$</p>

Таблица 12.1 (продолжение)

<p>6. Идеальный трансформатор</p> 	$\begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & 1/n \end{bmatrix}$	$\frac{1}{n^2+1} \begin{bmatrix} n^2-1 & 2n \\ 2n & 1-n^2 \end{bmatrix}$
<p>7. П-образная схема</p> 	$\begin{bmatrix} 1 + \bar{y}_2/\bar{y}_3 & 1/\bar{y}_3 \\ D/\bar{y}_3 & 1 + \bar{y}_1/\bar{y}_3 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{D_s} \begin{bmatrix} \bar{y}_g^2 - P\bar{y}_g - D & 2\bar{y}_g\bar{y}_3 \\ 2\bar{y}_g\bar{y}_3 & \bar{y}_g^2 + P\bar{y}_g - D \end{bmatrix},$
<p>где $D_s = \bar{y}_g^2 + Q\bar{y}_g + D$, $D = \bar{y}_1\bar{y}_2 + \bar{y}_2\bar{y}_3 + \bar{y}_3\bar{y}_1$ $Q = \bar{y}_1 + \bar{y}_2 + 2\bar{y}_3$, $P = \bar{y}_1 - \bar{y}_2$</p>		
<p>8. T-образная схема</p> 	$\begin{bmatrix} 1 + \bar{z}_1/\bar{z}_3 & D/\bar{z}_3 \\ 1/\bar{z}_3 & 1 + \bar{z}_2/\bar{z}_3 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{D_s} \begin{bmatrix} -\bar{z}_g^2 + P\bar{z}_g + D & 2\bar{z}_g\bar{z}_3 \\ 2\bar{z}_g\bar{z}_3 & -\bar{z}_g^2 - P\bar{z}_g + D \end{bmatrix},$
<p>где $D_s = \bar{z}_g^2 + Q\bar{z}_g + D$, $D = \bar{z}_1\bar{z}_2 + \bar{z}_2\bar{z}_3 + \bar{z}_3\bar{z}_1$ $Q = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 + 2\bar{z}_3$, $P = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$</p>		
<p>9. Скачок волнового сопротивления</p> 	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{D_s} \begin{bmatrix} \bar{z}_2 - \bar{z}_1 & 2\sqrt{\bar{z}_1\bar{z}_2} \\ 2\sqrt{\bar{z}_1\bar{z}_2} & \bar{z}_1 - \bar{z}_2 \end{bmatrix},$ <p>где $D_s = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$</p>
<p>10. Атенюатор на α децибел</p> 	$\begin{bmatrix} (A+B)/2 & \bar{z}_g(A-B)/2 \\ (A-B)/2\bar{z}_g & (A+B)/2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & B \\ B & 0 \end{bmatrix},$
<p>где $A = 10^{\alpha/20}$, $B = 1/A$</p>		

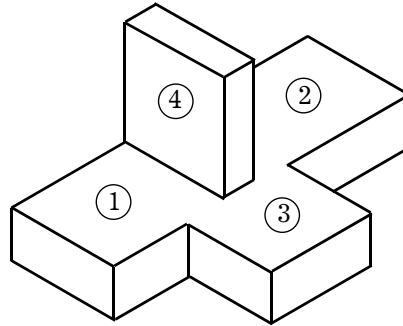


Рис. 12.12

12.8(*). Пример использования матрицы рассеяния

12.8.1. Двойной волноводный тройник. Рассмотрим восьмиполюсник, представляющий собой двойной волноводный тройник (рис. 12.12). Идеальная матрица рассеяния такого устройства при определенном выборе плоскостей отсчета имеет вид

$$\vec{S} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{12.8.1}$$

Тогда зависимости между падающими и отраженными нормированными напряжениями в матричной форме в соответствии с (12.8.1) определяются соотношениями

$$\begin{bmatrix} u_{o1} \\ u_{o2} \\ u_{o3} \\ u_{o4} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} u_{n3} + u_{n4} \\ u_{n3} - u_{n4} \\ u_{n1} + u_{n2} \\ u_{n1} - u_{n2} \end{bmatrix}. \tag{12.8.2}$$

12.8.2. Свойства двойного волноводного тройника:

1. Сигнал, поданный в плечо 3 (*H*-плечо), делится на две равные части и без отражений синфазно попадает в плечи 1 и 2; в плечо 4 (*E*-плечо) — сигнал не попадает. Действительно, при $u_{n3} \neq 0, u_{n1} = u_{n2} = u_{n4} = 0$ $u_{o1} = u_{o2} = u_{n3} / \sqrt{2}, u_{o4} = u_{o3} = 0$.

2. Сигнал, поданный в плечо 4 (*E*-плечо), делится на две равные части и в противофазах проходит в плечи 1 и 2. В плечо 3 (*H*-плечо) сигнал не проходит. Действительно, при $u_{n4} \neq 0, u_{n1} = u_{n2} = u_{n3} = 0$ $u_{o1} = -u_{o2} = u_{n4} / \sqrt{2}$, а $u_{o3} = u_{o4} = 0$.

3. При подаче двух одинаковых синфазных сигналов в плечи 3 и 4 суммарный сигнал без отражений проходит в плечо 1. В плечо 2 сигналы не проходят. Действительно, при $u_{n3} = u_{n4}$ и $u_{n1} = u_{n2} = 0$ $u_{o1} = \sqrt{2} u_{n3}$, а $u_{o2} = u_{o3} = u_{o4} = 0$.

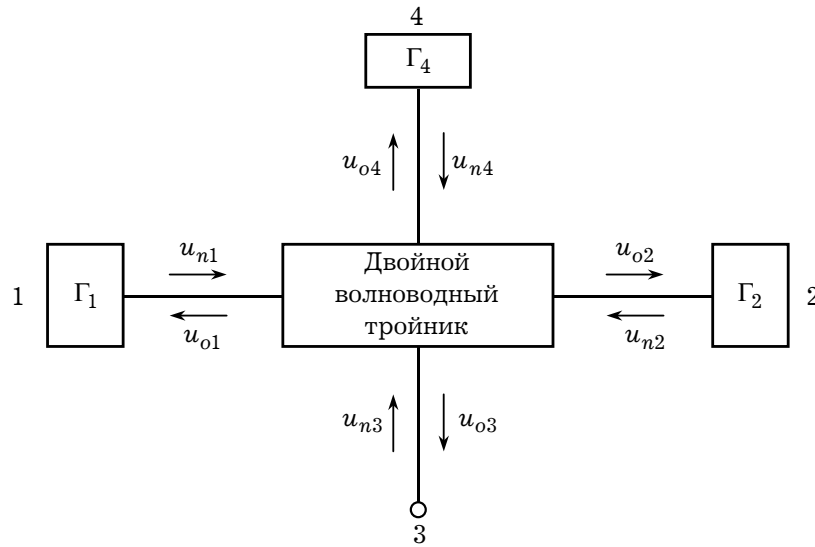


Рис. 12.13

4. При подаче двух сигналов, поданных противофазно в плечи 3 и 4, суммарный сигнал без отражений проходит в плечо 2. В плечо 1 сигнал не проходит. Действительно, при $u_{n3} = -u_{n4}$ и $u_{n1} = u_{n2} = 0$, $u_{o2} = \sqrt{2}u_{n3}$, а $u_{o1} = u_{o3} = u_{o4} = 0$.

Остальные свойства двойного волноводного тройника приведем без доказательства. Предлагаем Читателю проделать это самостоятельно.

5. Сигнал, поданный в плечо 1, делится на две равные части и без отражений синфазно проходит в плечи 3 и 4; в плечо 2 сигнал не проходит.

6. Сигнал, поданный в плечо 2, делится на две равные части и без отражений синфазно попадает в плечи 3 и 4; в плечо 1 сигнал не попадает.

7. Сигналы, поданные синфазно в плечи 1 и 2, складываясь, без отражений попадают в плечо 3; в плечо 4 сигналы не проходят.

8. Сигналы, поданные противофазно в плечи 1 и 2, суммируясь, без отражений попадают в плечо 4; в плечо 3 сигнал не проходит.

12.8.3. Пример. Определим свойства двойного волноводного тройника с матрицей рассеяния (12.8.1) при подаче сигнала в плечо 3 при условиях, что в плоскостях отсчета фаз плеч 1, 2, и 4 включены несогласованные нагрузки с коэффициентами отражения соответственно Γ_1 , Γ_2 и Γ_4 .

Для несогласованных нагрузок справедливо (рис. 12.13):

$$u_{n1} = \Gamma_1 u_{o1}, \quad u_{n2} = \Gamma_2 u_{o2}, \quad u_{n4} = \Gamma_4 u_{o4}.$$

Подставив значения u_{ni} ($i = 1, 4$) в уравнение (12.1.8), где матрица рассеяния \vec{S} определяется формулой (12.8.1), получим:

$$\begin{aligned} u_{o1} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(u_{n3} + \Gamma_4 u_{o4}), & u_{o2} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(u_{n3} - \Gamma_4 u_{o4}), \\ u_{o3} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\Gamma_1 u_{o1} + \Gamma_2 u_{o2}), & u_{o4} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\Gamma_1 u_{o1} - \Gamma_2 u_{o2}). \end{aligned}$$

Эти уравнения можно привести к каноническому виду:

$$\begin{aligned}\sqrt{2}u_{o1} - \Gamma_4 u_{o4} &= u_{n3}, \\ \sqrt{2}u_{o2} + \Gamma_4 u_{o4} &= u_{n3}, \\ \Gamma_1 u_{o1} + \Gamma_2 u_{o2} &= \sqrt{2}u_{o3} = 0, \\ -\Gamma_1 u_{o1} + \Gamma_2 u_{o2} + \sqrt{2}u_{o4} &= 0.\end{aligned}$$

Решая эту систему относительно неизвестных u_{oi} ($i = \overline{1, 4}$), получим:

$$\begin{aligned}u_{o1} &= \sqrt{2} \frac{1 - \Gamma_2 \Gamma_4}{2 - \Gamma_4(\Gamma_1 + \Gamma_2)} u_{n3}, & u_{o2} &= \sqrt{2} \frac{1 - \Gamma_1 \Gamma_4}{2 - \Gamma_4(\Gamma_1 + \Gamma_2)} u_{n3}, \\ u_{o3} &= \sqrt{2} \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2 - 2\Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_4}{2 - \Gamma_4(\Gamma_1 + \Gamma_2)} u_{n3}, & u_{o4} &= \sqrt{2} \frac{\Gamma_1 - \Gamma_2}{2 - \Gamma_4(\Gamma_1 + \Gamma_2)} u_{n3}.\end{aligned}\tag{12.8.3}$$

Вычисленные величины u_{oi} ($i = \overline{1, 4}$) определяют свойства восьмиполосника при несогласованных нагрузках плеч.

Мощность, поглощаемая в каждом плече, равна разности между мощностью, падающей на соответствующую нагрузку, и мощностью, отраженной от этой нагрузки (см. рис. 12.13):

$$\begin{aligned}P_1 &= \frac{1}{2}(|u_{n1}|^2 - |u_{o1}|^2), \\ P_2 &= \frac{1}{2}(|u_{n2}|^2 - |u_{o2}|^2), \\ P_4 &= \frac{1}{2}(|u_{n4}|^2 - |u_{o4}|^2).\end{aligned}\tag{12.8.4}$$

Разность мощностей падающей и отраженной волн в плече 3 равна мощности, поглощаемой во всей системе:

$$P_3 = \frac{1}{2}(|u_{n3}|^2 - |u_{o3}|^2).\tag{12.8.5}$$

12.9(*). Вычисление волновых сопротивлений линий передачи

Понятие волнового сопротивления линии передачи «пришло» в электродинамику СВЧ-структур из теории цепей и, нужно сказать, является очень полезным, если не пользоваться им бездумно. Дело в том, что нельзя ввести единого понятия волнового сопротивления для разных типов и классов линий передачи. Такая неоднозначность в определении волнового сопротивления связана с различной картиной полей собственных волн в разных типах линий.

Устройства СВЧ зачастую одновременно содержат различные типы линий и, подчеркнем особо, с разными типами волн. Основной задачей конструктора является согласование разных типов линий передачи с неодинаковыми структурами электромагнитных полей между собой. Это очень непростая задача, и для ее эф-

эффективного решения необходим строгий электродинамический подход к решению задач дифракции на стыках различных линий передачи. Введение волнового сопротивления линии передачи позволяет, в ряде случаев, более просто, хотя и более грубо, подойти к проблеме согласования различных типов линий передачи.

Рассмотренная в этой главе теория линейных устройств СВЧ- и КВЧ-диапазонов основана на введении векторов нормированных волновых напряжений для падающих и отраженных волн \vec{u}_n, \vec{u}_o , а также векторов нормированных напряжения \vec{u} и тока \vec{i} , втекающего внутрь многополюсника. Истинные (реальные) напряжения U_k и ток I_k k -входа (плеча) устройства связаны с нормированными величинами следующими соотношениями:

$$U_k = \sqrt{Z_k} u_k, \quad I_k = \frac{i_k}{\sqrt{Z_k}}; \quad k = \overline{1, N}, \quad (12.9.1)$$

где N — число входов многополюсника. Поэтому одной из проблем, возникающих при анализе устройств СВЧ, является задача определения волновых сопротивлений линий передачи, на основе которых построены входы многополюсника.

12.9.1. Волновое сопротивление линии с Т-волной. Определим волновое сопротивление линии передачи, работающей на волне типа Т. В этом случае просто ввести реальные напряжения U и ток I :

$$U = - \int_{L_1} \vec{E}(l) d\vec{l}, \quad I = \int_{L_2} \vec{H}(l) d\vec{l}, \quad (12.9.2)$$

где интегрирование проводится в общем случае по несовпадающим контурам L_1, L_2 .

В случае, например, коаксиальной линии передачи (рис. 4.14) напряжение U между внутренним и наружным проводниками вычисляется интегрированием радиальной напряженности электрического поля:

$$U = \int_{R_1}^{R_2} E_\rho d\rho = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\delta d\rho}{2\pi\rho} = E_{\max} R_1 \ln \frac{R_2}{R_1},$$

где $E_{\max} = \delta/(2\pi\rho)$ — радиальная напряженность электрического поля на поверхности внутреннего проводника при $\rho = R_1$, δ — величина погонного заряда. Продольный электрический ток I , текущий по внутреннему проводнику, определяется интегралом от касательной составляющей напряженности магнитного поля на поверхности внутреннего проводника:

$$I = \int_0^{2\pi} H_\phi \rho d\phi \Big|_{\rho=R_1} = R_1 \int_0^{2\pi} H_{\max} d\phi = 2\pi R_1 H_{\max},$$

где $H_{\max} = E_{\max} / W_0$, W_0 — характеристическое сопротивление среды с параметрами ϵ, μ .

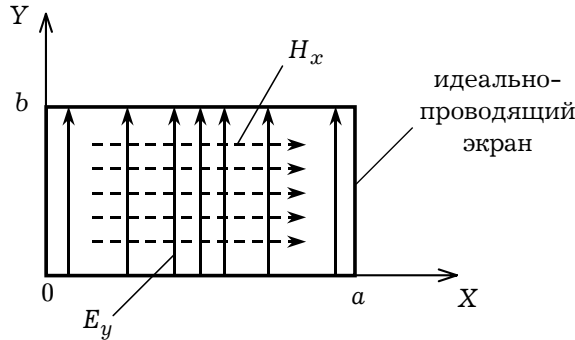


Рис. 12.14

Определим волновое сопротивление коаксиального волновода как отношение напряжения к току в бегущей волне:

$$Z(U, I) = \frac{U}{I}. \tag{12.9.3}$$

Тогда для коаксиальной линии передачи

$$Z = 60 \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \ln \frac{R_2}{R_1}. \tag{12.9.4}$$

12.9.2. Волновое сопротивление линии с Е-, Н- и гибридными волнами. Для линий передачи с другими типами волн можно лишь ввести условные напряжение и ток. Напряжение определяется как интеграл от \vec{E}_\perp (индекс « \perp » обозначает поперечную составляющую) вдоль направления максимального значения этого вектора. Ток можно определить как интеграл от вектора \vec{H}_τ по границам поперечных сечений металлических проводников.

В качестве примера определим волновое сопротивление прямоугольного волновода для H_{10} -волны. Поперечное сечение данной структуры показано на рис. 12.14. В соответствии с определением для волны H_{10} имеем:

$$\begin{aligned} H_z &= H_0 \cos \frac{\pi x}{a} e^{-i\gamma_0 z}, & H_x &= -i\gamma_0 \frac{a}{\pi} H_0 \sin \frac{\pi x}{a} e^{-i\gamma_0 z}, \\ E_y &= \frac{i\omega\mu_0\mu a}{\pi} H_0 \sin \frac{\pi x}{a} e^{-i\gamma_0 z}, & E_z &= E_x = H_y = 0, \end{aligned} \tag{12.9.5}$$

где

$$\gamma_0 = k_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2} -$$

постоянная распространения для H_{10} -волны. Напряжение определим как интеграл от E_y вдоль направления, где $E_y = E_{max}$, то есть при $x = a/2$:

$$U = - \int_0^b E_y(y) dy \Big|_{x=\frac{a}{2}} = - \frac{i\omega\mu_0\mu a}{\pi} H_0 b e^{-i\gamma_0 z}.$$

Ток равен интегралу от H_x по внутренним частям металлических стенок волновода L :

$$\begin{aligned} I &= \int_L \vec{H}_x d\vec{l} = \int_0^a H_x(x) dx \Big|_{y=0} - \int_a^0 H_x(x) dx \Big|_{y=b} = \\ &= 2 \int_0^a H_x(x) dx = -\frac{4i\gamma_0 a^2}{\pi^2} H_0 e^{-i\gamma_0 z}. \end{aligned}$$

Используя определение для волнового сопротивления в форме (12.9.3), получим

$$Z(U, I) = \frac{\pi b}{4a} Z_{\text{уд}}, \quad (12.9.6)$$

где

$$Z_{\text{уд}} = \frac{\omega\mu_0\mu}{\gamma_0} = \sqrt{\frac{\mu_0\mu}{\varepsilon_0\varepsilon}} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2}} -$$

удельное сопротивление прямоугольного волновода для H -волны.

12.9.3. «Энергетическое» определение волнового сопротивления. Кроме формулы для волнового сопротивления через U и I в форме (12.9.3) для линий передачи используют и энергетические определения:

$$Z(P, I) = \frac{2P}{|I|^2}, \quad (12.9.7)$$

$$Z(P, U) = \frac{|U|^2}{2P}. \quad (12.9.8)$$

Величина

$$P = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \int_S [\vec{E}, \vec{H}^*] d\vec{S} \right\} -$$

представляет средний по времени за период $T = \frac{2\pi}{\omega}$ поток активной мощности,

проходящей через поперечное сечение S линии передачи. Подынтегральное выражение для P есть вектор Умова–Пойнтинга.

В случае прямоугольного волновода значения волнового сопротивления, определяемые формулами (12.9.7) и (12.9.8), могут быть выражены через удельное сопротивление $Z_{\text{уд}}$:

$$Z(P, I) = \frac{\pi^2 b}{8a} Z_{\text{уд}}, \quad (12.9.9)$$

$$Z(P, U) = 2 \frac{b}{a} Z_{\text{уд}}. \quad (12.9.10)$$

12.9.4. Резюме. Таким образом, понятие волнового сопротивления линии передачи является условным и зависит от его определения. В случае линий передачи с T -волной все три определения волнового сопротивления (формулы (12.9.3), (12.9.7) и (12.9.8)) являются идентичными.

Выбор того или иного определения для волнового сопротивления диктуется следующими соображениями. Во-первых, необходимо учитывать, какие величины $\{U, I, P\}$ проще вычислить. Во-вторых, принимая во внимание характер распределения магнитных и электрических полей в линии передачи, следует определить, какая из величин (U или I) определяется более естественным образом. Другими словами, использование напряжения целесообразно при условии, что в поперечном сечении линии передачи можно выделить область, для которой оно определяется естественным образом (область с максимальной концентрацией электрического поля). Ток вводится для областей, в которых существует максимальная концентрация магнитного поля. Так, например, для полосковых волноведущих структур (полосковые и связанные полосковые линии) целесообразно использовать определение (12.9.7), в котором фигурирует ток, протекающий по токопроводящим полоскам. Аналогично для щелевых линий передачи более удобно применять формулу (12.9.8), в которую входит напряжение. Его можно представлять (интерпретировать) как напряжение в щели структуры, где наблюдается максимальная концентрация электрического поля.